

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

46. Band, Heft 1/5

1. Februar 1953.

S. 1—240

## Geschichte.

**Bruins, E. M.:** *Ancient Egyptian arithmetic: 2/N*. *Indagationes math.* 14, 81—91 = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* 55, 81—91 (1952).

Verf. greift die seit Eisenlohr und Sylvester immer wieder diskutierte Frage nach der Berechnung der  $2:n$ -Tabelle des Papyrus Rhind von neuem auf. Auf Grund einer mit modernen Mitteln durchgeführten Klassifikation kommt er zu einer Reihe von teils neuen (z. B.: alle Nenner  $< 1000$ ) teils bekannten (letzter Nenner möglichst klein) Regeln. Verf. lehnt die Ansicht Neugebauers u. a. über die allmähliche Entwicklung der Tabelle ab; ein ägyptischer Rechner hätte sie mindestens in einem Tag konstruieren können! Natürlich kann man das jetzt; aber ist denn das Bedürfnis, mit Brüchen umgehen zu können, an einem Tag entstanden? Auch die Auffassung (vander Waerden u. a.), daß man die Tabelle durch Ausführung der Division  $2:n$  erhalten habe, wird abgelehnt. Aber gerade der Divisionsterminus ( $nj s^2 hnt n$ ) bildet doch die Überschrift jeder  $2/n$ -Zerlegung, außerdem wird diese Division zuerst ausführlich, dann in gedrängter Form wirklich durchgeführt. Verf. hält diese Rechnungen für Proben. Diese würden, da es sich dabei um Additionen handelt, in einer Zeile fortlaufend durchgerechnet worden sein. Demgegenüber wird aber das bekannte Divisionsschema (mit Merkstrichen) verwendet. Da es bei der interessanten Theorie des Verf. wieder zahlreiche Ausnahmefälle gibt (auch „schlechte“ und „schöne“ Faktoren sind schwer zu definieren), bleiben weiterhin noch ungelöste Fragen offen. K. Vogel.

**Irani, Rida A. K.:** *A sexagesimal multiplication table in the arabic alphabetical system*. *Scripta math.* 18, 92—93 (1952).

**Clagett, Marshall:** *Archimedes in the Middle Ages: The De mensura circuli*. *Osiris* 10, 587—618 (1952).

Auf Grund mühsamer, sehr verdienstvoller archivalischer Kleinarbeit stellt Verf. fest, daß die Archimedische Kreisquadratur den abendländischen Gelehrten schon seit dem 12. Jh. in lateinischen Übersetzungen vorlag, die jedoch nicht auf das griechische Original, sondern auf die lateinische Bearbeitung des Tābit ibn Qurra (826/901) zurückgehen. Er ediert eine ältere Fassung (Paris, BN, fds. lat. 11246), die er nach Terminologie und Ausdrucksweise dem Plato v. Tivoli (um 1150) zuschreibt, ferner zwei etwas jüngere, die auf Gerhard v. Cremona (1114/87) zurückgehen dürften (1: Dresd. DB 86, ed. Heiberg, ZMPH 35, 1890 mit Abschriften in Oxford, Paris u. Wien; 2: Paris, BN, fds. lat. 9335 mit Abschriften in Oxford). Dazu treten ebenfalls vom Verf. edierte Übersetzungen in Neapel, Cambridge und Florenz. Weiterhin erwähnt Verf. die aus dem Griechischen besorgte Übersetzung des Wilhelm v. Moerbeke (1269; Vat. Ottobon. 1850; ed. Heiberg, ZMPH 34, 1890) und ediert deren Ausgabe eines unbekannten Bearbeiters (1340; Paris, BN, fds. lat. 7381), der auch Teile der Spiralen-Abhandlung abschrieb. Dieses Stück wird, wie Ref. ergänzend feststellt, im franz. Kommentar des Nicole Oresme zur pseudo-aristotelischen Schrift *De caelo et mundo* (1377; Paris, BN, fds. fr. 1083) benutzt.

J. E. Hofmann.

**Zubov, V. P.:** *Zur Frage nach dem Charakter der altrussischen Mathematik*. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 3 (49), 82—96 (1952) [Russisch].

**Hervey, Helen:** *Hobbes and Descartes in the light of some unpublished letters of the correspondence between Sir Charles Cavendish and Dr. John Pell*. *Osiris* 10, 67—90 (1952).



Verf. bringt Auszüge aus gedruckten und ungedruckten Briefen der Jahre 1644/51, gewechselt zwischen Pell (1640/85, 1643 Amsterdam, 1646 Breda) und dem philosophisch und mathematisch interessierten englischen Edelmann Cavendish († 1654, anfangs in Paris, seit 1649 in Antwerpen). Aus ihnen geht hervor, daß der Streit zwischen Descartes und Hobbes vor allem um die Metaphysik und die von Descartes anerkannte Transsubstantiation ging. Ferner ergeben sich Berichtigungen bisher ungenau bekannter biographischer Einzelheiten, vor allem die Fixierung des Höflichkeitsgesprächs zwischen Descartes und Hobbes in Paris im Sommer 1648 (statt 1647). Interessant ist weiterhin der Bericht über Unterredungen Pells mit Descartes vom 8./9. II. 1646 über mathematische Fragen und eine Reihe von Bemerkungen über Fermat, aus denen hervorgeht, daß Pell durch Cavendish Abschriften Fermatscher Abhandlungen erhalten hatte.

*J. E. Hofmann.*

**Patterson, Louise Diehl: Pendulums of Wren and Hooke.** *Osiris* 10, 277—321 (1952).

Verf. zeigt in dieser sorgfältig belegten und durchgeführten Studie, daß die wichtigsten experimentellen Entdeckungen hinsichtlich der Bewegung des Faden- und Federpendels fast gleichzeitig von Hooke und Huygens unter teilweiser Mitbeteiligung von Wren gemacht worden sind. Dabei ist nicht immer genau feststellbar, ob und inwieweit gegenseitige Beeinflussung vorliegt; im wesentlichen sind die beiderseitigen Entdeckungen voneinander unabhängig. Die Ausführungen der Verf. laufen auf eine großartige Ehrenrettung Hookes hinaus, der seine Glaubwürdigkeit schon bei den Zeitgenossen durch Absonderlichkeiten, Eifersüchteleien, Reizbarkeit, Empfindlichkeit und ängstliche Zurückhaltung eingebüßt hatte. Dazu kam, daß er zwar findig im Aufspüren von Zusammenhängen, jedoch in der Darstellung nicht sehr gewandt und dem großen Rivalen Huygens theoretisch weit unterlegen war. Hauptsächlichste Neudatierungen für Hookes Entdeckungen: 1657/60 Isochronie des Pendels, 1666 Kegelpendel (im Zusammenhang mit Sätzen Wrens), Anwendung zur Klärung der gewöhnlichen Pendelbewegung, Pendel mit geneigter Schwingungsebene, 1667 parabolisches Pendel, 1678 Federpendel mit teilweiser Verwendung des Satzes von der Erhaltung der Energie, 1687 Anwendungsversuche auf die Abhängigkeit der Schwingungszeit des gewöhnlichen Pendels von der Schwingungsweite, die zu brauchbaren Näherungen führen. *J. E. Hofmann.*

**Taton, René: Monge, créateur des coordonnées axiales de la droite, dites de Plücker.** *Elemente Math.* 7, 1—5 (1952).

Verf. gibt einen mit genauen Literaturangaben versehenen Überblick über das Auftreten der Linienkoordinaten bei Plücker (Versuche 1846 u. 1864, Durchführung 1865) und Cayley (Ansätze seit 1859, Mitteilung 1867, Druck 1869). Dann gibt er nähere Einzelheiten über die Einführung der Linienkoordinaten bei Monge (1771, Druck 1785), die in etwas modifizierter Form in den sehr seltenen ersten beiden Auflagen der *Application de l'Analyse à la Géométrie* (1795, 1801) auftreten und geschickt verwendet werden. In den späteren Auflagen (seit 1807) ist dieser Abschnitt (wohl aus didaktischen Gründen) unterdrückt. Vgl. Verf., dies. *Zbl.* 42, 3.

*J. E. Hofmann.*

**Lorey, W.: Aus der mathematischen Vergangenheit Berlins.** (Vortrag auf der Berliner Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung am 19. 9. 1951.) *S.-Ber. Berliner math. Ges.* 1950—51, 15—23 (1952).

**Graves, L. M.: Gilbert Ames Bliss. 1876—1951.** *Bull. Amer. math. Soc.* 58, 251—264 (1952).

Wissenschaftliche Würdigung mit Schriftenverzeichnis.

**Perron, Oskar: Harald Bohr.** *J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein.* 55, 77—88 (1952).

Wissenschaftliche Würdigung.



**Bochner, Salomon:** Harald Bohr. April 22, 1887—January 22, 1951. Bull. Amer. math. Soc. 58, 72—75 (1952).

**Crespo Pereira, Ramón:** Georg Cantor. Gac. mat., Madrid 4, 67—73 (1952) [Spanisch].

**Perron, Oskar:** Constantin Carathéodory. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 55, 39—51 (1952).

**Chern, Shiing-shen and Claude Chevalley:** Élie Cartan and his mathematical work. Bull. Amer. math. Soc. 58, 217—250 (1952).

Mit Schriftenverzeichnis.

**Chisini, Oscar:** A memoria di Federico Enriques. Periodico Mat., IV. Ser. 30, 1—3 (1952).

**Heffter, L.: J. L. Fuchs, zum 100. Geburtstag am 5. Mai 1933.** (Rede in der Berliner Mathematischen Gesellschaft am 24. 5. 1933). S.-Ber. Berliner math. Ges. 1950—51, 5—15 (1952).

**Smirnov, V. I. und A. F. Bermant:** Gennadij Michajlovič Goluzin (Nekrolog). Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3 (49), 97—102 (1952) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

**Polubarinova-Kočina, P. Ja.:** Aus S. V. Kowalewskas Briefwechsel. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4 (50), 103—125 (1952) [Russisch].

**Bari, N. K. und L. A. Ljusternik:** Dmitrij Evgeněvič Meňšov. (Zum sechzigsten Geburtstage.) Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3 (49), 145—150 (1952) [Russisch].

Mit Schriftenverzeichnis.

**Dunnington, G. Waldo:** George A. Miller. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 55, 52—53 (1952).

**Zum 150sten Geburtstage Michail Vasilevič Ostrogradskijs.** Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 203—205 (1952) [Russisch].

**Taussky-Todd, Olga:** Arnold Scholz zum Gedächtnis. Math. Nachr. 7, 379—386 (1952).

Nachruf mit Schriftenverzeichnis.

**Wolfowitz, J.:** Abraham Wald, 1902—1950. Ann. math. Statistics 23, 1—13 (1952).

**Menger, Karl:** The formative years of Abraham Wald and his work in geometry. Ann. math. Statistics 23, 14—20 (1952).

**Wald, Abraham,** The publications of. Ann. math. Statistics 23, 29—33 (1952).

## Grundlagen. Philosophie. Logik.

● **Bridgman, W.:** The nature of some of our physical concepts. New York: Philosophical Library 1952. 64 p. \$ 2,75.

Die Beziehungen zwischen der „instrumentalen“ und der „Tafel- und-Kreide“-Komponente der physikalischen Begriffe werden diskutiert, hauptsächlich an Hand thermodynamischer Beispiele. *G. Süßmann.*

● **Nickel, Erwin:** Das „physikalische Modell“ und die „metaphysische Wirklichkeit“. (Glauben und Wissen Nr. 9.) München/Basel: Ernst Reinhardt Verlag 1952. 100 S. Kart. DM 4,20; Ln. DM 5,80.

Im Rahmen einer Apologie der objektivierenden theistischen Metaphysik wird vom Verf. die Existenz einer „Entelechie der Materie“ postuliert. *G. Süßmann.*

**Whitrow, G. J.:** The limits of the physical universe. Studium generale 5, 329—337 (1952).

Das Problem der Grenzen des physikalischen Universums wird in seiner Entwicklung vom ausgehenden Mittelalter bis zur Gegenwart dargestellt.

*G. Süßmann.*



**Bondi, H.:** Relativity and indeterminacy. *Nature* 169, 660 (1952).

**Fuchs, J.:** Das Wirkungsquantum und seine Stellung im Rahmen der Naturkonstanten. *Acta phys. Austr.* 5, 349—375 (1952).

Nach Meinung des Verf. „konnte gezeigt werden, daß das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  eine Zusammenfassung mehrerer elektrischer und magnetischer Naturkonstanten darstellt“.

*G. Süßmann.*

**Osborn, Roger:** Mathematics and the space-time problem. *Math. Mag.* 25, 147—153 (1952).

**Kneser, Hellmuth:** Die Mathematik des 20. Jahrhunderts und die Schule. *Math.-phys. Semesterber.* 2, 157—169 (1952).

**Menninger, Karl:** Mathematik und Kunst. *Math.-phys. Semesterber.* 2, 170—178 (1952).

Verf. gibt eine sehr populäre Übersicht über einige Beziehungen zwischen der Mathematik und der Kunst. Die Titel der Abschnitte lauten: „Urmathematik und Schulmathematik. Was ist Mathematik? Kunst und Gestalt. Der Maßgrund in der Kunst. Heilige Mathematik. Künstlerische und mathematische Form“. Die Auffassung, die Verf. von der Kunst hat, entspricht derjenigen der Kunsthistoriker, nicht der Künstler selber.

*A. Speiser.*

● **Weyl, Hermann:** Symmetry. Princeton: Princeton University Press 1952 168 p. \$ 3,75.

Die Quelle aller Mathematik und Kunst ist die Lehre von der Symmetrie, und wer in diesen Gebieten arbeitet, sucht bis zu ihr vorzudringen. Verf. gibt in diesem prachtvoll ausgestatteten Buch eine allumfassende Darstellung dessen, was bis jetzt entdeckt worden ist. „Symmetry, as wide or as narrow you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection“. Durch Beispiele aus der Kunst und aus den drei Naturreichen werden die Begriffe der Spiegelsymmetrie, der Translationen und Rotationen, der Ebenen- und Raumgruppen in der Ornamentik, der Kristallstruktur dem Leser vor die Augen geführt und damit auch einem weiteren Publikum zugänglich gemacht. Verf. scheut es nicht, dabei auch in die Formeln der Mathematik zu greifen und sogar eine Ableitung der endlichen Rotationsgruppen im Raum zu geben, die an Einfachheit nicht mehr übertroffen werden kann. Sogar die Galoissche Gleichungstheorie und die Kreisteilung werden an Beispielen erläutert. Die Abbildungen, vor allem diejenigen aus der Zoologie und aus der Kunst, sind meisterhaft ausgewählt und sie werden ihre Wirkung auf den der Mathematik wohlgesinnten Leser nicht verfehlen.

*A. Speiser.*

● **Speiser, Andreas:** Elemente der Philosophie und der Mathematik. (Wissenschaft und Kultur, Band 6) Basel: Verlag Birkhäuser 1952. 115 S. Ganzleinen Fr. 11,45.

Die Elemente der Philosophie sind für diese Studie zu definieren als die Bausteine der Hegelschen Logik, in dem umfassenden Sinne, in welchem diese Logik die ganze Hegelsche Ontologie impliziert. Das eigentliche und fast das einzige Thema ist eine Reproduktion dieser Logik in den Grenzen dessen, was nach dem Urteil des Verf. an ihr noch heute probenhaltig und beispielhaft ist. Der Aufbau ist isomorph zu dem Aufbau von Wittgensteins „Tractatus logico-philosophicus“: Stichworte und isolierte Sätze, die durch ein methodisches Bezifferungsprinzip in einem engeren oder erweiterten Sinne miteinander verkettet sind. Hieraus folgt, daß dem Erraten so viel überlassen bleibt, wie im Wittgensteinschen Falle. Dies ist beabsichtigt. Der Leser soll ununterbrochen zum Nachdenken angeregt werden. In diesem Falle durch die Studie eines Mathematikers, der sich mit einer sehr seltenen Gründlichkeit in das Hegelsche System hineingedacht hat. — Die Elemente der Mathematik treten für mein Gefühl an einer einzigen Stelle bedeutsam hervor, in einer Apologie des Differentials. Sie lautet so (p. 68): „Der Begriff des Differentials ist wohl der eigentliche Grundbegriff der kontinuierlichen Größen. Er gibt die Gediegenheit der Linie und ihr Durchlaufen. Auch heute noch ist er in der Mathematik unentbehrlich, man denke nur an den Differential- und Integralkalkül, an die Flächentheorie und ihre Erweiterungen, an die Mechanik, an die Transformationsgruppen, die Differentialgleichungen usw. Er ist einwandfrei, und sogar höhere Differentiale lassen sich invariant



definieren, wie schon Johann Bernoulli gezeigt und Euler in seiner Differentialrechnung (*Opera omnia*, Serie I, Band 10, Seite 163—186) näher ausgeführt hat. Leider sind diese schönen Untersuchungen seither nicht mehr aufgenommen worden. Wir glauben also, daß über den Differentialquotienten  $dy/dx$  das letzte Wort noch nicht gesprochen ist und daß man auch auf verschwindenden Größen eine strenge Mathematik aufbauen kann. Vermutlich sind wir gar nicht so weit von der Lösung, indem die Phasenräume und die Transformationsgruppen uns den Weg zeigen“. Hierzu möchte ich zwei Arbeiten von Ludwig Neder nennen, die als Vorstöße in dieser Richtung nicht übersehen werden sollten (vgl. dies. Zbl. 25, 397; 27, 389). — Die sehr knappen Bemerkungen zur Stellung der Mathematik bei Hegel (p. 49) werden in einem mir sehr erwünscht erscheinenden Sinne ergänzt durch eine Konfrontierung der Hegelschen und der modernen strukturellen Auffassung der Mathematik in einem Vortrag des Algebraikers Reinhold Baer, „Hegel und die Mathematik“ (Verhandlungen des zweiten Hegelkongresses vom 18. bis 21. Oktober 1931 in Berlin, hrsg. von B. Wigersma, Tübingen, I. C. B. Mohr 1932, 104—120). Um so mehr, als auch Baer um das Positive an Hegel sehr erkennbar bemüht ist, mit feinen, an Hegel anknüpfenden Bemerkungen über die zeitliche Bedingtheit dessen, was als mathematisch sinnvoll, zulässig und unanfechtbar zu gelten hat. — Der für jede Stellung zu Hegel entscheidende Hegelsche Widerspruchsbegriff wird zwar gestreift (p. 75); aber nur, um zu sagen, daß er nicht mit dem für die Mathematik verbindlichen Begriff des Widerspruchs identifiziert werden darf. Es scheint mir, daß der zu gewinnende Leser an dieser kritischen Stelle erster Ordnung wesentlich mehr hätte erwarten dürfen. — Das anfechtbarste Stück, auch in diesem Versuch einer Neubelebung, scheint mir die Hegelsche Logik im engeren Sinne zu sein. Was dem Leser hier zugemutet wird, geht wesentlich hinaus über das, was ihm zugemutet werden kann, wenn man zuläßt, daß die mathematische Logik, die Logik des gegenwärtigen Zeitalters, ihm nicht fremd ist. Aber von der Existenz dieser Logik ist überhaupt nicht Notiz genommen. Es scheint mir, daß eine Konfrontierung mit ihr ebenso natürlich gewesen sein würde, wie eine Konfrontierung der Hegelschen Auffassung der Mathematik mit der gegenwärtigen. Stattdessen wird die Reichweite der Logik, ganz im Hegelschen Sinne, ohne irgendeine kritische Bemerkung mit der Reichweite der Aristotelischen Syllogistik identifiziert. Es scheint mir, daß hierdurch der Anteil eines in Sachen der Logik nicht gänzlich unbefangenen Lesers überfordert wird. Und so durch das meiste von dem, was in dieser Studie zu Begriff, Urteil, Schluß im Hegelschen Sinne zustimmend gesagt ist. Besonders betroffen wird man sich fühlen dürfen durch die Charakteristik der modalen Aussagen. Was ist die Beziehung des Subjektes auf einen Begriff, die im kategorischen Falle noch als unbegründet und unmittelbar seiend gesetzt, im problematischen Falle als zufällig oder problematisch hingestellt sein soll? Und die apodiktischen Aussagen? In ihnen muß nach dem vorliegenden Text der Begriff mit dem Urteil völlig zusammenfallen. Es scheint mir, daß dies Bestimmungen sind, die jeden, der sich nicht alles will sagen lassen, aus dem Bereich der Hegelschen Logik für immer vertreiben können. — Es bleibt aber auch dann noch etwas zurück, was ich nicht übersehen haben möchte. Es ist der Stachel, der sich aus der Tatsache ergibt, daß ein Mathematiker mit dem Horizont des Verf. sich so hingebend und mit einer so erkennbaren inneren Wärme um Hegel hat bemühen können. Dies wird den aufmerksamen Leser in jedem Falle zu einer erneuten Selbstprüfung anregen.

H. Scholz.

Vaccarino, Giuseppe: *La sillogistica*. Archimede 4, 58—60 (1952).

● Becker, Oskar: *Untersuchungen über den Modalkalkül*. Meisenheim/Glan: Westkulturverlag Anton Hain 1952. 87 S. Brosch. DM 14,50.

Im Anschluß an seine „Einführung in die Logistik“ (Meisenheim 1951) behandelt Verf. die Aufgabe, die logische Struktur der Modalitäten, die als „vor und unabhängig von aller Mathematik gegeben“ aufgefaßt wird, zu analysieren. Dies geschieht in der Weise, daß gewisse Modalkalküle gedeutet werden. Der klassische Aussagenkalkül (Aussagenvariable  $p, q, \dots$ ; Russelsche Symbolik) wird erweitert durch (A) Ist  $A$  eine Aussage, dann ist  $NA$  eine Aussage ( $N$  = notwendig) ( $S_1$ )  $Np \cdot Np \supset N(p \cdot q)$  ist ein Satz. ( $S_2$ )  $Np \supset p$  ist ein Satz. ( $S_3$ ) Ist  $A^0 \supset B^0$  ein Satz mit Aussagen 0. Grades (d. h. ohne Modi), dann ist  $NA^0 \supset NB^0$  ein Satz. — Der Modus  $M$  = möglich wird definiert durch  $Mp = \sim N \sim p$ . Dadurch, daß (A) nicht auf Aussagen 0. Grades beschränkt ist, entsteht die Aufgabe, „Zusatzaxiome“ für die Modalaussagen höheren Grades einzuführen. Als solche kommen in Betracht: das Axiom von Smith ( $S'_2$ )  $M^i Np \supset p$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), Modifikation von ( $S_3$ ), nämlich ( $S'_3$ ) Ist  $A^i \supset B^i$  ein Satz mit Aussagen  $i$ . Grades, dann ist  $NA^i \supset NB^i$  ein Satz ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), ( $S'_3$ ) Ist  $A \supset B$  ein Satz, dann ist  $NA \supset NB$  ein Satz, und das Axiom von Becker ( $S_4$ )  $MNp \supset Np$ . — In Abschnitt I wird die „statistische“ Deutung, die auf Leibniz — nach J. M. Bochenski sogar bis auf die Antike — zurückführbar ist, dargestellt. Jeder Aussagenvariable  $p$  werden Prädikatenvariable  $P_1, P_2, \dots$  zugeordnet und den Modalaussagen Aussagen der Prädikatenlogik durch

$$Np: (x_1) P_1(x_1)$$

$$NNp: (x_2) (x_1) P_2(x_1, x_2)$$

$$Mp: (E x_1) P_1(x_1)$$

$$NMp: (x_2) (E x_1) P_2(x_1, x_2).$$



Die Variabilitätsbereiche der  $x_1, x_2, \dots$  seien elementefremd. In jedem Bereich sei ferner ein Individuum ausgezeichnet:  $t_1, t_2, \dots$ , und es gelte  $p = P_1(t_1)$ ,  $P_1(x_1) = P_2(x_1, t_2), \dots$ . Dann sind die Axiome ( $S_1$ ) ( $S_2$ ) ( $S_3$ ) erfüllt. — Neuartig ist die „normative“ Deutung in Abschnitt II, die sich auf das juristische Denken, auf eine „Logik des Wollens“ bezieht. Die Variablen  $p, q, \dots$  bedeuten jetzt Handlungen, die von einer Instanzenhierarchie  $J_1, J_2, \dots$  (Behörden) geboten ( $G$ ) bzw. erlaubt ( $E$ ) werden. Dann bedeutet z. B.

$GE p$ :  $J_2$  gebietet, daß  $J_1$  erlaubt, daß  $p$

$EG p$ :  $J_2$  erlaubt, daß  $J_1$  gebietet, daß  $p$ .

Unter der — allerdings etwas wirklichkeitsfremden — Annahme, daß jedes Gebot stets befolgt wird und jede Erlaubnis stets ausgenutzt wird, ist diese Deutung mit der statistischen äquivalent. Sie gestattet darüber hinaus Modifikationen (z. B. Umgehung des Dienstweges, Auszeichnung der untersten Instanz als der praktisch wichtigsten, ...), durch die auch die Zusatzaxiome  $S'_2$ ,  $S'_3$  und  $S_4$  gedeutet werden können. — In Abschnitt III werden Anwendungen der Modallogik besprochen, insbesondere ein Versuch, die Schwierigkeiten des Tertium non datur in der Arithmetik dadurch zu beheben, daß zwischen  $(Ex) P(x)$  und  $M(Ex) P(x)$ , entsprechend zwischen  $(x) P(x)$  und  $N(x) P(x)$  unterschieden wird. Da aber das t. n. d. in der Modallogik vorausgesetzt wird, scheinen die Ausführungen dem Ref. nicht überzeugend. — In Abschnitt IV werden die ontologischen und existenziellen Äußerungen von N. Hartmann bzw. M. Heidegger über Modalitäten erörtert. Anhangsweise werden noch mehrwertige Logikkalküle und der Versuch ihrer modalen Deutung besprochen.

P. Lorenzen.

Jablonskij, S. V.: Über die Superposition von Funktionen der Algebra der Logik. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 329—348 (1952) [Russisch].

Let  $\Phi_1(A_1, \dots, A_n), \dots, \Phi_m(A_1, \dots, A_n)$  be functions of the algebra of logic, i. e. functions whose arguments and values belong to a two-membered class  $\{T, F\}$ . Let  $C$  be the class of functions which can be generated from these by means of the operations of substituting different variables, or other functions of the set, for the variables  $A_1, \dots, A_n$ . The problem which is solved in this paper is that of finding necessary and sufficient conditions on  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  for this class  $C$  to consist of all functions of the algebra of logic. The author states that the problem was raised by P. S. Novikoff but he has apparently overlooked the fact that it was raised independently by Post in 1920 and solved by him in a paper presented to the Amer. math. Soc. on April 24th, 1920 and published in 1941 as No. 5 of the Ann. Math. Studies under the title „The two-valued iterative systems of mathematical logic“. The arguments used by Post and Jablonskij are essentially similar although considerable difference in the lay out of the proof is caused by the fact that Jablonskij is chiefly concerned with the proof of this one result whereas Post deduces it from results obtained in a systematic study of all the possible classes  $C$ .

J. C. Shepherdson.

Dienes, Paul: On  $H$ -matrices. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 32—36 = Indagationes math. 14, 32—36 (1952).

The author discusses matrix models of Heyting's Propositional Calculus. He shows that every solution of  $\bar{x} = 1$  is equal to 0 and that every model of Heyting's system contains values different from 1 which satisfy  $\bar{x} = 0$ . It is also shown that the following rules for negation, alternation, conjunction and implication, where  $x + y$ ,  $x \cdot y$  denote the values of  $x \vee y$ ,  $x \wedge y$  respectively, are impossible.

(1) For every value  $x \neq 0$ ,  $\bar{x} = 0$ , (3)  $x \cdot y = \min(x, y)$ ,

(2)  $x + y = \max(x, y)$ , (4)  $x \rightarrow y = 1$  when  $x \leq y$ .

A. Rose.

Schütte, Kurt: Beweistheoretische Untersuchung der verzweigten Analysis. Math. Ann. 124, 123—147 (1952).

Es handelt sich um eine Fortführung der Überlegungen, die Verf. zuvor (dies. Zbl. 42, 8) über die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie und die beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion angestellt hat. Die Untersuchungen werden hier auf ein Kodifikat der verzweigten Analysis übertragen, das aus dem früher benutzten zahlentheoretischen dadurch entsteht, daß in der Hauptsache Formel-



variable verschiedener Ränge und die entsprechenden aufbauenden Schlüsse für die Allzeichen hinzugefügt werden. Auch hier werden Schnittreduktionen angegeben, durch die schließlich jede Herleitung schnittfrei gemacht werden kann. Das Hauptergebnis lautet genauer: Jede Herleitung der Ordnung  $\alpha$  läßt sich durch eine schnittfreie Herleitung ersetzen, deren Ordnung a) kleiner bleibt als die nächste auf  $\alpha$  folgende kritische  $\varepsilon$ -Zahl, b) unverändert bleibt, falls  $\alpha$  eine kritische  $\varepsilon$ -Zahl ist. (Die Ordnung einer Herleitung wird dabei entsprechend wie früher definiert; eine kritische  $\varepsilon$ -Zahl ist eine Zahl  $\varepsilon_\alpha$ , für die  $\varepsilon_\alpha = \alpha$ .) Im Zusammenhang damit ergibt sich für die Ableitung des transfiniten Induktionsschlusses: Jede Herleitung der allgemeinen transfiniten Induktion bis  $\alpha$  hat als Ordnung mindestens a) die letzte kritische  $\varepsilon$ -Zahl, die kleiner als  $\alpha$  ist (falls diese existiert), b) die Zahl  $\alpha$ , falls  $\alpha$  eine kritische  $\varepsilon$ -Zahl ist. Ferner wird eine Kennzeichnung der Ordnungszahlen unterhalb der ersten kritischen  $\varepsilon$ -Zahl durch ein finites Darstellungssystem gegeben, sowie einige bei den Beweisen benutzte rekursive Funktionen in diesem Bereiche definiert. Weiter wird noch eine umkehrbar-eindeutige Abbildung der vorepsilon-tischen, bzw. der Ordnungszahlen bis zur ersten kritischen  $\varepsilon$ -Zahl auf die natürlichen Zahlen, bzw. auf gewisse Dualbrüche gegeben. Zum Schluß findet sich eine Skizze der Einführung der reellen Zahlen im Rahmen des Kodifikates.

W. Ackermann.

**Kreisel, G.: On the interpretation of non-finitist proofs. II. Interpretation of number theory. Applications.** J. symbolic Logic 17, 43—58 (1952).

Über die Zielsetzung der Arbeit vgl. die Besprechung von Teil I (dies. Zbl. 44, 3). In dem vorliegenden Teile werden die in Teil I angekündigten und teilweise verwendeten Hilfssätze bewiesen. Die entwickelten Gedanken werden auf den Beweis eines zahlentheoretischen Satzes von Littlewood angewandt. Ferner wird auf die Grenzen der in Teil I entwickelten Methode der „finiten“ Deutung von nichtfiniten Beweisen hingewiesen.

W. Ackermann.

**Hermes, Hans: Maschinen zur Entscheidung von mathematischen Problemen.** Math.-phys. Semesterber. 2, 179—189 (1952).

In this expository article the author explains briefly what is meant by saying that a „mathematical theory“ is decidable. He gives a sketch of the definition of a Turing machine and indicates how the existence of unsolvable theories may be demonstrated.

J. C. Shepherdson.

• **Borel, Émile: Les nombres inaccessibles. Avec une note de M. D. Dugué.** (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions.) Paris: Gauthier-Villars 1952. X, 141 pp.

This book is written in support of the view that „mathematicians, whilst retaining the right to develop abstract theories deduced from arbitrary non-contradictory sets of axioms, also have an interest in singling out from the entities which are the substance of their science those which are really accessible, that is to say those which have an individuality, a personality, which distinguishes them unequivocally“. — In the first chapter Borel points out that one can define integers which are „relatively inaccessible“, in the sense that human life is not sufficiently long to allow of their being written down in some given system of numeration. He then (in Chapter II) discusses real numbers, some of which are inaccessible in a stronger sense. For even if one discounts the finiteness of life it is clear that there are at most a denumerable number of ways of defining a unique real number. Hence at most a denumerable number of real numbers can be defined. The continuum is thus almost entirely composed of numbers which are „absolutely inaccessible“, in the sense that they can never be precisely defined. Borel takes the view that these numbers can only be studied by the methods of the calculus of probability. In Chapter III he shows that this treatment is facilitated by the fact that, from the geometric point of view, the continuum is homogeneous. He goes on, in Chapter IV, to point out that, in contrast, any denumerable set must be regarded as heterogeneous; if a point is chosen at random in such a set, then the probabilities  $P_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) of it coinciding with the  $n$ -th member of the set cannot all be taken equal (and hence all zero) but must have non-zero values forming a series converging to the sum 1. The material of the first four chapters is expanded in Chapters V, VI and VII. — Chapters VIII and IX are devoted to „Inaccessible sets“ and „Z-sets“, i. e. „sets which can be obtained and studied by application of Zermelo's axiom“. The author believes that those parts



of mathematics which depend on this axiom will always remain less important than the rest of mathematics, „for the mathematical entities which it pretends to study can never be linked in any way with any concrete reality; to say that one chooses a definite number from the infinity of inaccessible numbers amounts to specifying a meaningless operation, since this number is not, and never can be, distinguished from the others“. Using Zermelo's axiom to construct a denumerable set of disjoint superposable sets  $E_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) whose union is the set of numbers between 0 and 1, he proves that Zermelo's axiom is inconsistent with the „Euclidean axiom“ according to which two superposable figures are equal, i. e. are identical from all points of view, and that in particular there correspond to them equal probabilities (of a point chosen at random lying in them)“. The usual way out of this paradox for those who wish to retain Zermelo's axiom is to say that this merely constitutes a proof that these sets  $E_n$  are not measurable and that it is not possible to assign a probability to them. Borel takes up this topic again in the last chapter on „Probability and measure“, and suggests that it might be possible, without introducing contradictions, to assign a measure to every set provided one is prepared to dispense with the „Euclidean axiom“, and attribute measures  $e_n$  more or less arbitrarily to the sets  $E_n$  in such a way that the series of  $e_n$  converges to unity; this would give a „negligible measure to those sets  $E_n$  whose index  $n$  is an inaccessible number“. — There is a brief note by D. Dugué at the end of the book in which, inter alia, he emphasises that inaccessible elements are necessary auxiliaries for the treatment of accessible elements and cannot be rejected from mathematics. — The book is written in the lucid style one invariably associates with Borel's writing. Indeed his argument is stated so clearly and simply that little of the substance of his reflections would be lost by a reader unfamiliar with the techniques of mathematics. However, one must not expect to find here precise definitions and a highly developed theory of inaccessible numbers. The book is more in the nature of a connected series of essays in which a succession of related topics are examined from a certain point of view — a point of view which Borel himself describes as the result of „half a century of reflection on the principles of mathematical analysis and in particular on the definition of numbers“.

*J. C. Shepherdson.*

## Algebra und Zahlentheorie.

### Allgemeines. Kombinatorik:

Welter, C. P.: The advancing operation in a special Abelian group. *Indagationes math.* **14**, 304—314 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 304—314 (1952).

L'A. se propose de résoudre un problème de jeu étudié dans un cas particulier par R. Sprague (ce *Zbl.* **29**, 4): 5 jetons identiques étant posés sur 5 cases d'une suite de cases numérotées 0, 1, 2, 3, 4, ... deux joueurs déplacent tour à tour un jeton pour le mettre sur une case d'ordre inférieur; a gagné le joueur qui obtient la combinaison 0, 1, 2, 3, 4. Toute position est gagnante ou perdante: est gagnante celle qui est transformable en position perdante par tout déplacement de jeton compatible avec la règle, est perdante toute position qui peut être transformée en position gagnante par un déplacement convenable, compatible avec la règle, d'un jeton convenable. L'A. cherche à caractériser les positions gagnantes. Pour cela, il attribue aux cases les éléments d'un groupe abélien  $G$ , à une infinité de générateurs tous d'ordre 2, et qui est totalement ordonné par la loi  $1 < a < b < a b < c < a c < b c < a b c < d < \dots$ , la correspondance entre les cases et les éléments de  $G$  étant une isomorphie pour l'ordre. Désignant par  $E$  l'opération qui à tout élément de  $G$  fait correspondre le suivant et par  $F$  l'opération inverse, et posant  $R(x, y, z) = E x F(F x y) F x z$  et  $S(x, y; z, u, v) = R(x, y, z) R(x, y, u) R(x, y, v)$  l'A. prouve que les positions gagnantes sont caractérisées par  $S(x, y; z, u, v) = 1$ .

*A. Revuz.*

Riordan, John: A recurrence relation for three-line latin rectangles. *Amer. math. Monthly* **59**, 159—162 (1952).

Verf. leitet eine neue Rekursionsformel her für die Anzahl der dreizeiligen lateinischen Rechtecke, deren erste Zeile eine feste Ordnung aufweist. Diese Formel enthält zwar eine Hilfsfunktion, ist aber einfacher als eine frühere Rekursionsformel von Kerawala und erleichtert die Berechnung.

*R. Sprague.*

Riordan, John: The arithmetic of ménage numbers. *Duke math. J.* **19**, 27—30 (1952).



Le problème des ménages proposé par Lucas en 1891 demande le nombre de manières de placer  $n$  couples mariés autour d'une table circulaire, de sorte que, maris et femmes alternant, aucun mari ne soit à côté de sa propre femme. Le problème simple (problème réduit) est celui dans lequel les places des femmes sont fixées; un cas plus général est celui donnant le nombre des manières  $u_{n,r}$  du problème réduit, dans lesquelles  $r$  maris sont à côté de leurs propres femmes. L'A., au moyen d'une relation d'inversion d'un polynôme de Tchebycheff, établit la périodicité des nombres  $u_{n,r}$  relative à un module premier  $p$ ; les nombres  $u_{n,r}$  ont la période  $2p^2$  pour chaque  $r$  et les nombres  $u_{n+r,r}$  ont la période  $p^2$  pour chaque  $n$ . *S. Bays.*

**Maak, Wilhelm:** Ein Problem der Kombinatorik in seiner Formulierung von H. Weyl. Math.-phys. Semesterber. 2, 251—256 (1952).

Les considérations de l'A. se rapportent aux différentes formes du problème combinatoire suivant: Quand deux répartitions d'un ensemble  $M$  d'éléments  $h$ , en  $n$  ensembles partiels  $M_1, M_2, \dots, M_n$  et  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , ont-elles un système d'éléments représentants communs, c'est-à-dire un système d'éléments  $h_1, h_2, \dots, h_n$ , tels que chaque  $M_i$  et chaque  $N_j$  contient exactement un des  $h_k$ ? V. d. Waerden (1926) a donné le théorème: deux répartitions de l'ensemble  $M$  de  $m \cdot n$  éléments possèdent un système d'éléments représentants communs. Hall (1935) a donné le même théorème pour un ensemble  $M$  infini, en remplaçant les  $m \cdot n$  éléments par la condition que de:  $M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_r} \subset N_{j_1} \cup \dots \cup N_{j_s}$  suive  $r \leq s$ . L'A. a donné un peu plus tard indépendamment de Hall le même théorème. Mais ce même problème prend aussi la forme d'un théorème sur les „Graphen“ de D. König (1936) ou sur les déterminants de Frobenius (1917). Sa formulation la plus originale est sans doute celle de H. Weyl (1949), le problème connu des mariages: on sait de chaque couple possible entre  $n$  jeunes hommes et  $m$  jeunes filles s'ils s'aiment ou ne s'aiment pas. Quelle condition doit être remplie pour que chaque jeune homme puisse épouser une jeune fille qu'il aime? Weyl donne en fait de son théorème la preuve de l'A., un peu plus simple que celle de Hall. Mais la preuve la plus simple pour ce problème des mariages est celle de Halmos et Vaughan (1950). C'est par cette dernière preuve que l'A. termine son exposé. *S. Bays.*

**Witt, Ernst:** Ein kombinatorischer Satz der Elementargeometrie. Math. Nachr. 6, 261—262 (1952).

Der bekannte Satz von van der Waerden, daß sich bei beliebiger Einteilung eines genügend großen Abschnitts natürlicher Zahlen in höchstens  $k$  Klassen in mindestens einer Klasse eine arithmetische Progression vorgeschriebener Länge befinden muß, wird zu einer Aussage über endliche Punktmenge der komplexen Zahlenebene verallgemeinert und elegant bewiesen. Die arithmetischen Progressionen werden hierbei ersetzt durch die homothetischen Bilder  $\mathcal{G}'_l = \lambda \mathcal{G}_l + a$  (mit  $\lambda = 1, 2, \dots$  und beliebigem  $a$ ) einer beliebig, aber fest vorgegebenen Menge  $\mathcal{G}_l$  von endlich vielen verschiedenen komplexen Zahlen  $e_1, e_2, \dots, e_l$  ( $e_1 = 0$ ). Bildet man andererseits aus  $\mathcal{G}_l$  für irgendeine natürliche Zahl  $N$  die Punktmenge  $\mathcal{X}$  aller Linearkombinationen  $x = \sum x_h e_h$  mit  $x_h = 0, 1, 2, \dots$  und  $\sum x_h = N$ , so gilt für hinreichend großes  $N$ : Bei beliebiger Verteilung von  $\mathcal{X}$  in  $k$  Klassen enthält mindestens eine Klasse eines der homothetischen Bilder  $\mathcal{G}'_l$  von  $\mathcal{G}_l$  ganz; hierbei hängt  $N$  natürlich von  $k$  und  $l$  ab. *E. Sperner.*

**Sierpiński, W.:** Sur les opérations dans l'ensemble à 3 éléments. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 13—18 (1952).

Während es in einer dreielementigen Menge  $E$   $3^9 = 19683$  beliebige Operationen gibt, existieren dort nur  $3^{13} = 216$  Operationen, welche eine rechtsinverse, und ebenso viele, welche eine linksinverse Operation zulassen. Verf. demonstriert, daß es sogar nur 12 Operationen gibt, welche zugleich eine rechtsseitige und eine linksseitige Umkehrung gestatten. Von diesen 12 sind 6 kommutativ. Von den übrigen 6 sind je 3 isomorph, und eine ihrer beiden Umkehrungen ist stets kommutativ.



In einem Bereich von 4 Elementen gibt es hingegen bereits eine nicht-kommutative und beiderseits nicht-kommutativ umkehrbare Operation. *J. Schmidt.*

### Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

**Waadeland, Haakon:** Über eine Determinante. *Norske Vid. Selsk. Forhdl.* 24, Nr. 24, 108—109 (1952).

Eine von Jacobsthal berechnete Determinante (dies. Zbl. 42, 12) wird auf eine andere Weise berechnet. *G. Lochs.*

**Bellman, Richard:** A note on scalar functions of matrices. *Amer. math. Monthly* 59, 391 (1952).

**Niblett, J. D.:** A theorem of Nesbitt. *Amer. math. Monthly* 59, 171—174 (1952).

Bedeutet  $a_{ik}$  für  $i, k = 1, 2, \dots, n$  die Binomialzahl  $\binom{n+1}{2k-i}$ , wenn  $n+1 \geq 2k-i \geq 0$  ist, und sonst Null, so ist nach A. M. Nesbitt [*Educ. Times* 57, 449 (1904), Problem 15649]  $\det(a_{ik}) = 2^{n(n+1)/2}$ . Verf. gibt hierfür zwei Beweise, deren zweitem eine Anregung von T. W. Chaundy zugrunde liegt. *E. Schönhardt.*

**Tornheim, Leonard:** The Sylvester-Franke theorem. *Amer. math. Monthly* 59, 389—391 (1952).

Verf. gibt einen einfachen direkten Beweis des Sylvester-Frankeschen Satzes, wonach für eine  $s$ -te „Compound“  $A^{(s)}$  einer  $(n \times n)$ -Matrix  $A$  (1)  $|A^{(s)}| = |A|^{\binom{n-1}{s-1}}$  gilt. Er benützt dazu den Umstand, daß  $A$  durch elementare Umformungen (Vertauschung von zwei Parallelreihen, Multiplikation einer Reihe mit einer Konstanten, Addition einer mit einer Konstanten multiplizierten Reihe zu einer Parallelreihe) in eine Matrix  $D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  verwandelt werden kann, in der  $I_r$  die  $r$ -reihige Einheitsmatrix und  $0 \leq r \leq n$  ist. Da der Satz für Matrizen  $D$  trivial wird, so braucht man nur zu zeigen: Gilt (1) für irgendeine Matrix, so ist diese Eigenschaft gegenüber elementarer Umformung invariant. Zum Schluß weist Verf. noch darauf hin, daß in ähnlicher Weise auch andere Sätze bewiesen werden können, z. B.: Ist  $A$  äquivalent bzw. kongruent bzw. ähnlich zu  $B$ , so besteht dieselbe Beziehung zwischen  $A^{(s)}$  und  $B^{(s)}$ . *E. Schönhardt.*

**Rutherford, D. E.:** Some continuant determinants arising in physics and chemistry. II. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* III 63, 232—241 (1952).

Verf. berichtet über weitere Ergebnisse seiner Untersuchungen (dies. Zbl. 30, 5) über die Bestimmung von Kontinuanten und Zirkulanten, die zu einer  $n$ -reihigen quadratischen Matrix entsprechender Bauart gehören. Die Elemente der Matrix sind dabei Polynome in einer oder mehreren Veränderlichen, infolgedessen auch die zugehörigen Determinanten. Als interessantes Nebenergebnis kommt bei einer der untersuchten Determinanten heraus, daß sie auf eine explizite Darstellung der Fibonacciischen Zahlen führt. Von einfacheren Kontinuanten und Zirkulanten ausgehend gelingt es Verf., auch Polynomdarstellungen der Determinanten von Matrizen komplizierterer Bauart zu gewinnen. Inwiefern die Kenntnis solcher Determinanten bei der Behandlung von Aufgaben der Relaxationsrechnung nützlich ist, wird an einem Beispiel dargelegt. Von Bedeutung für die Anwendung auf Probleme der Atomtheorie ist, daß gewisse bei eindimensionalen Problemen auftretende Kontinuantenmatrizen sich auf zweidimensionale Probleme verallgemeinern lassen. Im letzten Abschnitt werden Fragen über die Bestimmung der Inversen einiger der in der Arbeit behandelten Matrizen erörtert. Solche Inversen können dazu dienen, Gleichungssysteme der Relaxationstheorie aufzulösen, auch lassen sich die Eigenwerte der Inversen unmittelbar angeben, wenn die der ursprünglichen Matrix bekannt sind. Die vom Verf. mitgeteilten Ergebnisse werden bei den entsprechenden praktischen Aufgaben von großem Nutzen sein.

*W. Quade.*



**Peremans, W., H. J. A. Duparc and C. G. Lekkerkerker:** A property of positive matrices. *Indagationes math.* **14**, 24—27 = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 24—27 (1952).

Es wird eine Eigenschaft positiver Matrizen mitgeteilt, die für die Anwendungen auf elektrische Netze von Bedeutung ist. Dabei wird unter einer positiven Matrix eine  $n$ -reihige, quadratische, symmetrische Matrix  $C = (c_{kl})$  mit komplexen Elementen  $c_{kl} = a_{kl} + i b_{kl}$  verstanden, bei welcher die quadratische Form

$\sum_{k,l=1}^n a_{kl} x_k x_l \geq 0$  ist, welches auch die reellen Zahlen  $x_k$  sein mögen. Für solche

Matrizen gilt der folgende Satz: Ist die Determinante einer positiven Matrix Null, dann gibt es  $n$  reelle, nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , so daß

(1)  $\sum_{l=1}^n c_{kl} s_l = 0, k = 1, 2, \dots, n$ . Es werden drei Beweise dieses Satzes mit-

geteilt. Jeder dieser Beweise benutzt die folgende bekannte Eigenschaft der Matrix  $D = T^* C T$ , wo  $T$  eine nicht singuläre, reelle Matrix bedeutet. Gibt es  $n$  reelle, nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , welche (1) erfüllen, dann gibt es auch  $n$  reelle, nicht gleichzeitig verschwindende Zahlen  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , welche

$\sum_{l=1}^n d_{kl} r_l = 0, k = 1, 2, \dots, n$ , genügen, und umgekehrt. Die drei gegebenen

Beweise unterscheiden sich dadurch, daß jedesmal eine andere Matrix  $T$  benutzt wird.

*W. Quade.*

**Schönhardt, Erich:** Über positiv definite Matrizen. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 157—158 (1952).

In letzter Zeit wurde „positiv definit“ für nicht symmetrische, reelle quadratische Matrizen bald durch die eine, bald durch die andere der folgenden Eigenschaften  $M, R, S$  definiert,  $M$ : alle Hauptminoren sind positiv.  $R$ : alle Eigenwerte haben positive Realteile.  $S$ : alle Eigenwerte des symmetrischen Teiles der Matrix sind positiv. Während bei symmetrischen Matrizen  $M, R$  und  $S$  gleichwertig sind, charakterisieren sie unter den nichtsymmetrischen Matrizen drei verschiedene Klassen. Wie hier gezeigt wird, folgt zwar aus  $S$  sowohl  $M$  als  $R$ , aber aus  $M$  weder  $R$  noch  $S$ , aus  $R$  weder  $M$  noch  $S$  und auch aus  $M$  und  $R$  nicht  $S$ . Schließlich wird von zwei von M. Parodi angegebenen Verfahren zur Bildung positiv definiter nichtsymmetrischer Matrizen gezeigt, daß sie zu Matrizen vom Typ  $S$  führen.

*G. Lochs.*

**Freudenthal, Hans:** Produkte symmetrischer und antisymmetrischer Matrizen. *Indagationes math.* **14**, 193—198 (1952) = *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **55**, 193—198 (1952).

Es werden diejenigen reellen quadratischen Matrizen  $A$  bestimmt, die sich in der Form  $A = HK$  zerlegen lassen ( $H, K$  reell, symmetrisch oder antisymmetrisch).

(1)  $H$  und  $K$  symmetrisch: Dies ist für jedes  $A$  möglich (das Entsprechende gilt im Komplexen). (2)  $H$  symmetrisch,  $K$  antisymmetrisch: In jedem Elementarteiler von  $A$  sind die nicht verschwindenden Wurzeln paarweise entgegengesetzt. (3)  $H$  und  $K$  antisymmetrisch: Die Elementarteiler von  $A$  lassen sich derart in Paaren anordnen, daß die Glieder eines Paares sich höchstens um einen linearen Faktor mit der Wurzel 0 unterscheiden. Gleichwertig ist: Es gibt  $T$  mit

$$T^{-1} A T = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ C & D & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweise mittels der Jordanschen Normalform.

*H. Wielandt.*

**Duncan, W. J.:** Note on a generalization of Rayleigh's principle. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 93—96 (1952).



Betrachtet wird die algebraische Eigenwertaufgabe  $A(\lambda) \xi = 0$  mit  $A(\lambda) = A_0 + A_1 \lambda + \dots + A_m \lambda^m$ ; dabei sind die  $A_\mu$  symmetrische, nicht notwendig reelle  $(n, n)$ -Matrizen. Es sei  $\xi_0$  eine Eigenlösung zu einem Eigenwert  $\lambda_0$ , der nur einfache Wurzeln von  $\xi'_0 A(\lambda) \xi_0 = 0$  ist, so daß die Gleichung  $m$ -ten Grades  $\xi' A(\lambda) \xi = 0$  in der Umgebung von  $\xi_0$  nach  $\lambda$  aufgelöst werden kann:  $\lambda = \lambda(\xi)$  mit  $\lambda(\xi_0) = \lambda_0$ . Dann ist  $\lambda(\xi)$  an der Stelle  $\xi_0$  stationär. Die Bedingung, daß  $\lambda_0$  nur einfache Wurzel ist, läßt sich abschwächen.

H. Wielandt.

**Leng, Sen-Ming:** The characteristic roots of a matrix. Duke math. J. 19, 139—154 (1952).

Für komplexe  $(n, n)$ -Matrizen  $A = (a_{ij})$  kennt man verschiedene Abschätzungen der Eigenwerte  $\alpha$  von  $A$ , des „Wertevorrats“ der Zahlen  $\beta = u A u'$  sowie der Zahlen  $\gamma = u A \bar{v}'$  ( $u, v$  willkürliche Zeilen mit  $u u' = v v' = 1$ ) durch explizite Funktionen der  $a_{ij}$ . Eine Reihe dieser Abschätzungen wird, teilweise in verallgemeinerter Form, vom Verf. auf die Extremfälle, d. h. auf die Gültigkeit des Gleichheitszeichens untersucht. Erwähnt sei

- $$\begin{aligned} (1) \quad & |\beta|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2, \quad |\gamma|^2 \leq \sum_{i,j} |a_{ij}|^2, \\ (2) \quad & |\gamma|^2 \leq \max_i \sum_v |r_{iv} a_{iv}| \cdot \max_i \sum_v |r'_{vi} a_{vi}|, \\ (3) \quad & |\beta| \leq \max_i \left( \sum_v |r_{iv} a_{iv}|^{p/2} \right)^{1/p} \cdot \max_i \left( \sum_v |r'_{vi} a_{vi}|^{p'/2} \right)^{1/p'}, \\ (4) \quad & |\alpha| \leq \max_i \left\{ \left( \sum_v |r_{iv} a_{iv}|^{p/2} \right)^{1/p} \left( \sum_v |r'_{vi} a_{vi}|^{p'/2} \right)^{1/p'} \right\}, \\ (5) \quad & |\alpha - a_{ii}| \leq \left( \sum_{v \neq i} |r_{iv} a_{iv}|^{p/2} \right)^{1/p} \left( \sum_{v \neq i} |r'_{vi} a_{vi}|^{p'/2} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

In (2)—(5) sind die Zahlen  $r_{ij}$  willkürlich wählbar,  $r_{ij} r'_{ij} = 1$ ; in (3)—(5) ist  $p > 1$  willkürlich,  $1/p + 1/p' = 1$ ; (5) gilt für mindestens ein  $i$ . Die einzelnen Ergebnisse betreffs der Extremalmatrizen entziehen sich wegen der komplizierten, teilweise unklaren Formulierung der Wiedergabe.

H. Wielandt.

**Brauer, Alfred:** Limits for the characteristic roots of a matrix. IV. Applications to stochastic matrices. Duke math. J. 19, 75—91 (1952).

Die vom Verf. früher [Duke math. J. 13, 387—395 (1946) sowie dies. Zbl. 29, 337; 31, 244] für beliebige  $(n, n)$ -Matrizen  $A = (a_{\kappa\lambda})$  gewonnenen Eigenwertabschätzungen werden nun auf stochastische Matrizen ( $a_{\kappa\lambda} \geq 0, a_{\kappa 1} + \dots + a_{\kappa n} = 1$ ) angewandt. Außer neuen Beweisen für Ergebnisse von Frobenius, Fréchet und Romanovsky erhält Verf. die folgenden Sätze. Sind  $a$  und  $b$  die beiden kleinsten Diagonalelemente von  $A$ , so gilt  $|z - a| |z - b| \leq (1 - a)(1 - b)$  für jeden Eigenwert  $z$  von  $A$ ; ein Gleichheitszeichen kann hierin höchstens dann stehen, wenn  $n = 2$  oder  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$  oder  $A$  zerlegbar ist. Durch geeignete Verschiebung des trivialen Eigenwerts 1 mittels des zugehörigen Eigenvektors  $(1, \dots, 1)$  wird bewiesen: Jeder Eigenwert  $z \neq 1$  von  $A$  erfüllt mindestens eine der  $n(n-1)/2$  Ungleichungen  $|z - b_{\kappa\lambda}| |z - b_{\lambda\lambda}| \leq Q_\kappa Q_\lambda$  mit  $b_{\kappa\kappa} = a_{\kappa\kappa} - m$ ,  $Q_\kappa = 1 - a_{\kappa\kappa} - (n-1)m$ . Das gleiche Verfahren liefert für verallgemeinerte stochastische Matrizen ( $a_{\kappa\lambda}$  komplex,  $a_{\kappa 1} + \dots + a_{\kappa n} = s$  unabhängig von  $\kappa$ ) den Satz: Ist für  $\lambda = 1, \dots, l$  und  $\kappa = \lambda + 1, \dots, n$  stets  $a_{\kappa\lambda} = c_\lambda$  unabhängig von  $\kappa$ , so besitzt  $A$  die  $l$  Eigenwerte  $a_{\lambda\lambda} - c_\lambda$ .

H. Wielandt.

**Ostrowski, A. M.:** Note on bounds for determinants with dominant principal diagonal. Proc. Amer. math. Soc. 3, 26—30 (1952).

Sei  $A = \det(a_{\mu\nu})$ ; sei ferner  $\alpha_{\mu\nu} = |a_{\mu\nu}|$  für  $\mu, \nu = 1, \dots, n$ ,  $\alpha_{\mu\mu} \neq 0$  für  $\mu = 1, \dots, n$  und  $\sum_{\nu=1}^n \alpha_{\mu\nu} - \alpha_{\mu\mu} = s_\mu = \sigma_\mu \alpha_{\mu\mu}$  gesetzt. Sind alle  $\sigma_\mu < 1$ , dann ist  $A \neq 0$  (Hadamard) und wie Verf. (dies. Zbl. 16, 3) zeigte,  $(1) |A| \geq \prod_{\mu=1}^n (\alpha_{\mu\mu} - s_\mu)$ . Diese nur einseitige Schranke



wurde vom Verf. (dies. Zbl. 17, 290) noch folgendermaßen verschärft: Ist  $\sigma_{m_1} \geq \sigma_{m_2} \geq \dots \geq \sigma_{m_n}$ , so gilt

$$(2) \prod_{i=1}^{[n/2]} (\alpha_{m_{2i-1} m_{2i-1}} \alpha_{m_{2i} m_{2i}} + s_{m_{2i-1}} s_{m_{2i}}) \geq |A| \geq \prod_{i=1}^{[n/2]} (\alpha_{m_{2i-1} m_{2i-1}} \alpha_{m_{2i} m_{2i}} - s_{m_{2i-1}} s_{m_{2i}}).$$

Mit  $r_\mu = \sum_{\nu=\mu+1}^n \alpha_{\mu\nu}$ ,  $l_\mu = \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \alpha_{\mu\nu}$  haben G. B. Price [Proc. Amer. math. Soc. 2, 497–502 (1951)] für (1) die Verbesserung

$$\prod_{\mu=1}^n (\alpha_{\mu\mu} + r_\mu) \geq |A| \geq \prod_{\mu=1}^n (\alpha_{\mu\mu} - r_\mu) \quad (\text{alle } \sigma_\mu < 1)$$

und R. Oeder [Amer. math. Monthly 58, 37 (1951), probl. E 599]

$$|A| \geq \alpha_{11} \prod_{\mu=2}^n (\alpha_{\mu\mu} - l_\mu) \quad (\text{alle } \sigma_\mu \leq 1)$$

angegeben. Diese beiden Schranken hat Verf. nunmehr analog zu (2) verbessert: Ist  $\sigma = \max_\mu \sigma_\mu \leq 1$ , dann gilt für jedes  $k = 1, \dots, n$

$$(3) \alpha_{kk} \prod_{\mu=1}^{k-1} (\alpha_{\mu\mu} + \sigma r_\mu) \prod_{\mu=k+1}^n (\alpha_{\mu\mu} + \sigma l_\mu) \geq |A| \geq \alpha_{kk} \prod_{\mu=1}^{k-1} (\alpha_{\mu\mu} - \sigma r_\mu) \prod_{\mu=k+1}^n (\alpha_{\mu\mu} - \sigma l_\mu).$$

Hierbei kann  $\sigma$  noch ersetzt werden durch  $t_\mu = \max_{\mu \neq \nu} \sigma_{\mu\nu}$ . Das Kernstück des Beweises ist der an sich bemerkenswerte Satz 1: Es sei  $(b_{\mu\nu})$  die Inverse zur Matrix von  $A$ ,  $b_{\mu\nu} = |b_{\mu\nu}|$  für  $\mu, \nu = 1, \dots, n$  und alle  $\sigma_\mu < 1$ . Dann gilt  $b_{\mu\nu} \leq \sigma_\mu b_{\nu\nu}$  für  $\mu \neq \nu$  und  $b_{\mu\mu} = (a_{\mu\mu} + \theta_\mu t_\mu \sigma_\mu)^{-1}$  mit  $|\theta_\mu| \leq 1$ . Aus ihm folgt Satz 2: Es sei  $A_m$  der Hauptminor von  $A$  bezüglich  $a_{mm}$ . Dann ist für  $t_m \leq 1$ ,  $t_m \sigma_m < 1$ :

$$(4) (\alpha_{mm} + t_m s_m) |A_m| \geq |A| \geq (\alpha_{mm} - t_m s_m) |A_m|,$$

oder etwas allgemeiner,  $A = A_m (a_{mm} + \theta_m t_m s_m)$  mit  $|\theta_m| \leq 1$ . Aus (4) endlich folgt (3) durch mehrmalige Anwendung; zunächst mit  $m = 1$ , dann in  $A_1$  mit  $m = 2$  usw. ( $k-1$ -mal und schließlich mit  $m = n, n-1, \dots, k+1$ ).

H. Bilharz.

**Ostrowski, A.: Bounds for the greatest latent root of a positive matrix.** J. London math. Soc. 27, 253–256 (1952).

$A = (a_{\mu\nu})$  sei eine  $(n, n)$ -Matrix mit beliebigen Elementen  $a_{\mu\nu} \neq 0$ ; ferner sei  $R_\mu = \sum_{\nu=1}^n |a_{\mu\nu}|$ ;  $R = \max_\mu R_\mu$ ,  $r = \min_\mu R_\mu$ ;  $\kappa = \min_{\mu, \nu} |a_{\mu\nu}|$  und  $\sigma =$

$[(r - \kappa)/(R - \kappa)]^{1/2}$ . Dann besteht der folgende Satz: Für die absolut größte Wurzel  $\omega$  der Gleichung  $\det(\lambda E - A) = 0$  gilt (1)  $|\omega| \leq R - (1 - \sigma)\kappa$ , und falls alle  $a_{\mu\nu} > 0$ , (2)  $\omega \geq r + (1/\sigma - 1)\kappa$ . Diese Ungleichungen sind schärfer als die entsprechenden, welche von W. Ledermann (dies. Zbl. 40, 5) angegeben worden sind. — Für den Beweis ist es hinreichend, sich auf positive  $a_{\mu\nu}$  zu beschränken; dann ist nach Perron und Frobenius  $\omega$  ebenfalls positiv, und es existiert zu  $A$  ein Fundamentalvektor  $(x_1, \dots, x_n)$  mit positiven Komponenten:  $\omega x_\mu =$

$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_\nu$  ( $\mu = 1, \dots, n$ ). Durch kogrediente Transformationen von  $A$  läßt

sich  $1 = x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$  erreichen. Für jedes  $\mu$  und für jedes  $\lambda$  wird sodann  $x_\mu \omega \geq a_{\mu 1} (1 - x_n) + R_\mu x_n$  bzw.  $x_\lambda \omega \leq R_\lambda - (1 - x_n) a_{\lambda n}$ . Wählt man darin  $\mu$  und  $\lambda$  so, daß  $R_\mu = R$ ,  $R_\lambda = r$ , dann ist wegen  $x_\mu \leq 1$  und  $x_\lambda \geq x_n$ :  $x_n \leq \sigma$ . Daraus folgen mit  $\mu = n$  und  $\lambda = 1$  die Schranken (1) und (2), und es läßt sich sogar beweisen, daß (3)  $\kappa/(R - r + \kappa) < \min_{\mu} x_\mu / \max_{\nu} x_\nu \leq \sigma$  gilt, falls  $r < R$ . — Wird

$\kappa_1 = \min_{\mu} a_{\mu\mu}$ ,  $\kappa_2 = \min_{\mu \neq \nu} a_{\mu\nu}$  gesetzt, dann können die Ungleichungen (1)–(3)

noch weiter verbessert werden, indem darin  $\sigma$  durch  $\sigma_1 = [(r - \kappa_1)/(R - \kappa_1)]^{1/2}$  und  $\kappa$  durch  $\kappa_2$  ersetzt werden dürfen.

H. Bilharz.

**Parodi, Maurice: Sur un théorème de M. Ostrowski.** C. r. Acad. Sci., Paris 234, 282–284 (1952).

Ostrowski (dies. Zbl. 44, 5) hat zu je zwei positiven Zahlen  $m, M$  einen Radius  $\delta(m, M)$  derart angegeben, daß die Vereinigung der  $n$  Kreisscheiben



$|\lambda - a_{\mu\mu}| \leq \delta(m, M)$  alle Eigenwerte jeder  $n$ -reihigen Matrix  $A$  enthält, deren Elemente  $a_{\mu\nu}$  den Ungleichungen  $|a_{\mu\nu}| \leq m$  für  $\mu > \nu$ ,  $|a_{\mu\nu}| \leq M$  für  $\mu < \nu$  genügen. Verf. fügt hinzu, daß eine Kreisscheibe, die zu allen übrigen punktfremd ist, genau einen Eigenwert von  $A$  enthält. Der Beweis erfolgt durch die von ähnlichen Sätzen her geläufige Methode der stetigen Überführung von  $A$  in eine Dreiecksmatrix.

*H. Wielandt.*

● Parodi, Maurice M.: Sur quelques propriétés des valeurs caractéristiques des matrices carrées. (Mém. Sci. math. 118). Paris: Gauthier-Villars 1952. 63 p. 800 F.

Das Büchlein gehört in das Gebiet der „metrischen Determinantentheorie“, in der Ungleichungen für Determinanten und ihre Fundamentalwurzeln in Abhängigkeit von den Beträgen der einzelnen Elementen hergeleitet werden. Allerdings gibt Verf. nur eine relativ beschränkte Auswahl aus den Sätzen, die in der letzten Zeit auf diesem Gebiet gefunden wurden, und stellt es vor allem auf die Anwendungen dieser Sätze ab. Es werden Anwendungen auf die Algebra, Theorie der elektrischen Schaltungen, Stabilität dynamischer Systeme usw. besprochen. Die Diskussion wird bis zu numerischen Beispielen durchgeführt. Mit der Verteilung der Akzente mag nicht jeder Mathematiker einverstanden sein. Inhalt: Ch. I. Critères de régularité des matrices carrées. (Théorème de M. Hadamard, critère de M. Müller.) Ch. II. Localisation des valeurs caractéristiques. (Méthode générale, théorème de M. Brauer, extension des résultats précédents.) Ch. III. Quelques applications d'un théorème de M. Ostrowski. (Théorèmes de M. Ostrowski, applications.)

*A. Ostrowski.*

Cherubino, Salvatore: Risoluzione senza determinanti dei sistemi lineari di equazioni. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 54—59 (1952).

Andersson, Josef und Nils Löfman: Ableitung und Diskriminante beim Polynom. Elementa 35, 37—39 (1952) [Schwedisch].

Mohr, Ernst: Berichtigung zu meiner Arbeit: „Der sogenannte Fundamentalsatz der Algebra als Satz der reellen Analysis“. Math. Nachr. 6, 385—386 (1952)

This note contains corrections on the paper named in the title (this Zbl. 44, 8).

*E. Frank.*

Weisel, Heinrich: Die Auflösung algebraischer Gleichungen in formaler Übereinstimmung. Math.-phys. Semesterber. 2, 199—206 (1952).

Zur formelmäßigen Auflösung algebraischer Gleichungen (Gln.) 2., 3. und 4. Grades wird ein gleichartiger Weg angegeben. In Anlehnung an das Eulersche Vorgehen bei Gln. 4. Grades werden für die reduzierten Gln. (Fehlen der zweithöchsten Potenz) die Ansätze gemacht

$$(1) \quad x = \sqrt[4]{u} \quad \text{bzw.} \quad x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v} \quad \text{bzw.} \quad x = \sqrt[4]{u} + \sqrt[4]{v} + \sqrt[4]{w}.$$

Erheben in die 2., 3. bzw. 4. Potenz und Vergleich mit den reduzierten Gln. liefert eine lineare bzw. quadratische und kubische Resolvente, mit deren Wurzeln man in (1) eingeht. Für die allgemeinen (nicht reduzierten) Gln. sind die linken Seiten von (1) abzuändern in  $x - \lambda$ . — Für Gln. 5. und höheren Grades versagt das Vorgehen, wie es sein muß, indem sich die Rechnung an bestimmter Stelle blockiert.

*R. Zurmühl.*

Neville, E. H.: On restricted cubics. J. London math. Soc. 27, 359—362 (1952).

A classification into four mutually exclusive forms is given for a cubic function  $f(x)$  with real coefficients which satisfies the conditions  $|f(-1)| = |f(1)| = 1$ ,  $|f(x)| \leq 1$  if  $-1 \leq x \leq 1$ .

*E. Frank.*

Rosati, Luigi Antonio: Costruzione di polinomi irriducibili di eguale grado di cui i moduli delle differenze delle radici corrispondenti soddisfano a limitazioni prescritte. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 68—69 (1952).

O'Donnell, Ruth E.: A note on the location of the zeros of polynomials. Proc. Amer. math. Soc. 3, 116—119 (1952).



Es wird die folgende Umkehrung eines Satzes von S. Takahashi [Tôhoku math. J. **31**, 274—282 (1929)] bewiesen. Sind  $r_k = -a_k/a_{k+1}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) und enthält der Sektor  $\theta - \pi/N \leq \arg z \leq \theta + \pi/N$  ( $N \geq n$ ) die Punkte  $r_k$ , so enthält der Sektor  $\theta - \Phi \leq \arg z \leq \theta + \Phi$  ( $\Phi = \pi + \pi/N - \pi/n$ ) jede Nullstelle des Polynoms  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . Dieser Satz gilt auch dann, wenn einige Koeffizienten von  $f(z)$  verschwinden. Im Falle  $a_k a_{k+s} \neq 0$ ,  $a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_{k+s-1} = 0$  sind die Zahlen  $r_k, r_{k+1}, \dots, r_{k+s}$  durch  $(-1)^s \cdot a_k/a_{k+s}$  zu ersetzen.  
Gy. Sz. Nagy.

**Berman, D. L.:** Zur Frage der Abschätzung der Ableitungen eines algebraischen Polynoms. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 197—200 (1952) [Russisch].

Verf. folgert zunächst aus einer früheren Note (dies. Zbl. **39**, 338): Ist  $P(x)$  ein Polynom vom Grade  $r \leq n-1$  und ist für die  $n$  Punkte  $x_t = \cos t\pi/(n-1)$  ( $t = 0, 1, \dots, n-1$ ) der Betrag  $|P(x_t)| \leq 1$ , dann ist für  $-1 \leq x \leq +1$   $|P'(x)| \leq \text{konst} \cdot (n-1)^2$ . Dieser Satz läßt sich auf Polynome von  $k$  Veränderlichen übertragen: Ist  $P(x_1, \dots, x_k)$  bez.  $x_\kappa$  vom Grade  $n_\kappa$  und ist an den Punkten  $(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_k}^{(k)})$  mit  $x_i^{(i)} = \cos i\pi/n_i$  ( $j_\kappa = 0, 1, \dots, n_\kappa$ ;  $\kappa = 1, 2, \dots, k$ )  $|P(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_k}^{(k)})| \leq 1$ , dann ist in dem gesamten  $k$ -dimensionalen Würfel  $|x_\kappa| \leq 1$  ( $\kappa = 1, \dots, k$ ) die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial^k P(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} \right| \leq \text{konst} \prod_{\kappa=1}^k n_\kappa^2$$

erfüllt. Hilfsmittel für den Beweis ist die Abschätzung der Norm einer gewissen im Raum der stetigen Funktionen definierten linearen Operationen, die, auf Polynome angewandt, mehrfache partielle Differentiation bedeutet.  
W. Hahn.

**Wallace, Andrew H.:** Invariant matrices and the Gordan-Capelli series. Proc. London math. Soc., III. Ser. **2**, 98—127 (1952).

In einer Einleitung werden die Begriffe „invariante Matrix“ (Schur, Diss. Berlin 1901) und „Schema von Young“ kurz besprochen, wobei Ergebnisse von Sylvester, Deruyts, Capelli, Turnbull und Rutherford Erwähnung finden. Es wird weiter gezeigt, daß man sich auf homogene, nicht-singuläre, invariante Matrizen beschränken kann. Zu ihnen gehören irreduzible Systeme von Tensorkomponenten („système transformable“, „transformable set“); umgekehrt liefern die Transformationsgleichungen für Tensorkomponenten invariante Matrizen. Sind die Tensoren Normalformen im Sinne von Clebsch, so erhält man irreduzible invariante Matrizen. Es ist der Hauptzweck dieser Arbeit zu zeigen, daß die durch die Entwicklung einer Form  $F$  in eine Gordan-Capellische Reihe gegebene Aufspaltung von  $F$  in Normalformen übereinkommt mit der Aufspaltung der zu  $F$  gehörigen invarianten Matrix in eine direkte Summe von irreduziblen invarianten Matrizen. Am Schlusse werden noch fünf Theoreme von Deruyts besprochen und wird auf den Zusammenhang mit dem ersten Fundamentalsatz bei projektiven Invarianten hingewiesen.  
R. W. Weitzenböck.

**Goddard, L. S.:** Quadratic forms positive definite on a linear manifold. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 70—71 (1952).

Von S. N. Afriat (dies. Zbl. **42**, 14) werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine reelle quadratische Form  $F(x) = \sum a_{ik} x_i x_k$  in  $n$  Veränderlichen auf einer linearen Mannigfaltigkeit  $k$ -ter Stufe  $M_k$  positiv definit sei, d. h. daß für jeden Punkt  $\xi$  von  $M_k$   $F(\xi) > 0$  gelte. Verf. gibt hierfür einen einfachen Beweis unter Verwendung der Matrizenrechnung und Gebrauch machend von einigen einfachen Sätzen über die Grassmannschen Koordinaten  $p_{i_1 i_2 \dots i_k}$  der Mannigfaltigkeit  $M_k$ .  
R. W. Weitzenböck.

**Ibrahim, E. M.:** The plethysm of S-functions. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **3**, 50—55 (1952).

Bei der Berechnung des durch das Zeichen  $\otimes$  angedeuteten und „Plethysme“



genannten Produktes  $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$  zweier  $S$ -Funktionen [D. E. Littlewood, Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **239**, 305—365 (1944)] ist es oft von Nutzen, etwas über den durch  $\{\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \dots, \lambda_r + \mu_r\}$  definierten „Hauptterm“ aussagen zu können. Hierzu werden vier Sätze abgeleitet. R. W. Weitzenböck.

**Duncan, D. G.:** Note on a formula by Todd. J. London math. Soc. **27**, 235—236 (1952).

J. A. Todd hat eine Formel angegeben, um das Produkt  $\{\mu\} \otimes S_n$  als eine Summe von  $S$ -Funktionen auszudrücken (dies. Zbl. **34**, 160). Die einzelnen Glieder dieser Summe besitzen gewisse Koeffizienten  $\theta_\sigma$ , die je einen der Werte 0, +1, -1 annehmen können. Hier gibt Verf. eine einfache Regel an, um den Wert von  $\theta_\sigma$  in jedem Falle zu entscheiden; diese Regel benutzt Begriffe und Eigenschaften über die Darstellungen der symmetrischen Gruppe, die von G. de B. Robinson eingeführt worden sind (dies. Zbl. **36**, 155). E. Togliatti.

**Salzer, H. E.:** An elementary note on powers of quaternions. Amer. math. Monthly **59**, 298—300 (1952).

Sei  $z = x_0 + i \varrho$  eine ganze komplexe Zahl,  $X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$  ein Quaternion mit ganzen rationalen Koeffizienten und  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \varrho^2$ . Ist dann  $z^n = a + i b$  bei natürlichem  $n$ , so ist  $X^n = a + \lambda (x_1 i + x_2 j + x_3 k)$  mit  $\lambda = b/\varrho$ . Für diesen Satz teilt Verf. einen Beweis von W. Cannon, einen eigenen und einen von O. Taussky mit und gibt einen Hinweis für die Berechnung von  $X^n$  über die vorhandenen Tafeln von  $z^n$  hinaus. B. Schoeneberg.

**Bini, Umberto:** Un teorema di Cauchy. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **7**, 59—63 (1952).

Es handelt sich um die Teilbarkeit von  $(a+b)^n - a^n - b^n$  durch  $n a b (a+b) (a^2 + a b + b^2)$  bzw. durch  $n a b (a+b) (a^2 + a b + b^2)^2$  für  $n \equiv -1$  bzw. 1 (mod 6).

## Gruppentheorie:

**Thierrin, Gabriel:** Sur les éléments inversifs et les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 33—34 (1952).

$D$  étant un demi-groupe, l'A. appelle élément inversif de  $x$ , un élément  $x_i$  vérifiant  $x x_i x = x$ . Les éléments idempotents  $x_i x$  (et  $x x_i$ ) sont dits unitaires à droite (et à gauche) de  $x$ .  $D$  est inversif si tout  $x \in D$  admet au moins un élément inversif. L'A. démontre les propositions suivantes, dans lesquelles la notion d'élément inversif généralise la notion d'inverse: si  $D$  est inversif, tout  $x \in D$  possède un élément réciproque  $x'$  (c. à d. tel que  $x$  et  $x'$  soient inversifs l'un de l'autre); l'ensemble des éléments unitaires à droite d'un élément  $x \in D$  est un sous demi-groupe inversif  $D'$  de  $D$ , dont tous les éléments sont permis à droite dans  $D'$ . L'A. donne encore trois autres propositions valables lorsque  $x$  est permutable avec ses éléments inversifs. Les démonstrations sont immédiates. L. Lesieur.

**Thierrin, Gabriel:** Sur une classe de transformations dans les demi-groupes inversifs. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1015—1017 (1952).

$D$  étant un demi-groupe inversif (voir la définition ci-dessus), l'A. fixe  $y \in D$ , ainsi qu'un élément inversif  $y_i$  de  $y$ , et considère les applications  $T_a$  et  $T_g$  de  $D$  dans  $D$ , définies par:  $T_a(x) = y_i x y$  et  $T_g(x) = y x y_i$ . Il démontre les résultats suivants: 1°  $T_a(D)$  constitue un demi-groupe ayant l'élément  $y_i y$  comme élément neutre à droite. 2° Si l'élément  $y y_i$  est permutable avec chaque élément de  $D$ , le demi-groupe  $T_a(D)$  est un demi-groupe inversif homomorphe à  $D$ . 3° Si, en outre,  $y_i y$  est permutable avec chaque élément de  $D$ , on a  $y_i y = y y_i$  et  $T_a(D) = T_g(D) = D y y_i$ . L. Lesieur.

**Thierrin, Gabriel:** Sur les demi-groupes inversés. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1336—1338 (1952).

Dans cette note, l'A. généralise la notion de demi-groupe inversif pour présenter



celle de demi-groupe inversé. Un demi-groupe  $D$  est inversé si, pour tout  $x \in D$ , il existe  $x'$  tel que  $xx'$  et  $x'x$  soient des éléments idempotents. L'élément  $x'$  est dit inversant de  $x$ . Dans une note antérieure (ce Zbl. 42, 253) l'A. avait démontré qu'un semi-groupe inversif est un groupe; il établit ici qu'un semi-groupe inversé est aussi un groupe. De même, il généralise un résultat de la note ci-dessus, en démontrant que l'ensemble  $Dy y_i$  est un sous-demi-groupe inversé à droite du demi-groupe inversé  $D$ , dans l'hypothèse où  $y y_i$  est permutable avec chaque élément de  $D$ ,  $y$  étant fixé dans  $D$  et  $y_i$  étant un élément inversant à droite de  $y$ . *L. Lesieur.*

**Thierrin, Gabriel:** Sur une classe de demi-groupes inversifs. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 177—179 (1952).

L'A. donne ici un exemple de demi-groupe inversif (voir la définition ci-dessus), constitué par un anti-semigroupe  $A$ , ou demi-groupe tel que les relations  $xy = zt$ ,  $x \neq z$ , entraînent  $y = t$ . Il étudie la structure de  $A$ , qui n'est autre qu'un groupoïde dont les éléments sont tous permis à droite, ou tous permis à gauche. *L. Lesieur.*

**Thierrin, Gabriel:** Sur les homogroupes. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1519—1521 (1952).

La notion d'homogroupe, présentée ici, est une généralisation de la notion de groupe. Un homogroupe  $H$  est un demi-groupe possédant un élément idempotent  $e$  supposé permutable avec chaque élément de  $H$ , et tel que, pour tout  $x \in H$ , il existe  $x'$  vérifiant  $xx' = e$ . On démontre l'unicité de  $e$ , qui est dit élément unitif de  $H$ . L'ensemble  $He = eH$  constitue un groupe  $G$  homomorphe à  $H$ , et permis dans  $H$ ; on l'appelle le noyau de  $H$ . Comme exemple d'homogroupe, l'A. donne un demi-groupe cyclique fini; il signale qu'un anneau  $K$  tel que  $K^* = K - \{0\}$  soit un homogroupe pour la multiplication, est un corps; il donne en outre, sans démonstration, quelques propriétés caractéristiques d'un homogroupe. *L. Lesieur.*

**Thierrin, Gabriel:** Sur les homodomaines et les homocorps. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1595—1597 (1952).

L'A. généralise maintenant la notion de corps par celle d'homocorps, ou ensemble  $K$  dans lequel sont définies deux opérations ayant les propriétés suivantes: 1°  $K$  est un homogroupe abélien pour l'addition (voir ci-dessus pour la définition d'un homogroupe). 2°  $K$  est un demi-groupe pour la multiplication. 3° La multiplication est distributive par rapport à l'addition. 4° L'élément unitif 0 de l'addition est multiplicativement permis dans  $K$ . 5°  $K^* = K - \{0\}$  est un homogroupe multiplicatif. Les quatre premières propriétés définissent un homodomaine, qu'il serait peut être plus logique de qualifier homo-anneau. L'ensemble des éléments  $x \neq 0$  d'un homodomaine est un anneau; l'ensemble des éléments  $x \neq 0$  d'un homocorps  $K$  est un corps; si  $K^* = K - \{0\}$  est un groupe multiplicatif, l'homocorps  $K$  est un corps. L'A. donne pour terminer un exemple d'homocorps fini non commutatif. *L. Lesieur.*

**Teissier, Marianne:** Sur la théorie des idéaux dans les demi-groupes. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 386—388 (1952).

Es sei  $D$  irgendeine multiplikative Halbgruppe. Zuerst betrachtet Verf. die minimalen Linksideale in  $D$  und zeigt, daß die idempotenten von ihnen eine Klasseneinteilung zulassen, wenn man zwei solche Ideale  $G_1$  und  $G_2$  im Falle  $G_1 G_2 \neq 0$  zu derselben Klasse rechnet. Das Radikal  $R$  von  $D$  wird als die Vereinigung aller nilpotenten Linksideale eingeführt und von  $R$  werden einige — wohlbekannten Sätzen aus der Theorie der nichtkommutativen Ringe ähnliche — Sätze bewiesen. Im letzten Teil der Arbeit wird das Erfülltsein der Minimalbedingung für die Linksideale von  $D$  angenommen. Eine große Rolle spielt in diesem Teil der Untersuchungen die Faktorhalbgruppe  $D/J$ , wo  $J$  die Vereinigung aller minimalen Linksideale von  $D$  bedeutet. *L. Fuchs.*

**Thurston, H. A.:** A note on continued products. J. London math. Soc. 27, 239—241 (1952).

Für die  $(j, k)$ -assoziativen Operationen  $*$  (vgl. Verf., dies. Zbl. 35, 11) werden hinreichende Bedingungen dafür gegeben, daß

$$* x_{a_1-1}^0 * x_{a_2-1}^{a_1} \cdots * x_{(r+1)-1}^{a_r} = * x_{b_1-1}^0 * x_{b_2-1}^{b_1} \cdots * x_{(r+1)-1}^{b_r}$$

(es ist  $x_b^a = x_a x_{a+1} \cdots x_b$  gesetzt). Diese Bedingungen können notwendig sein.

P. Lorenzen.

Thurston, H. A.: **Equivalences and mappings.** Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 175—182 (1952).

L'A. considère d'abord un ensemble  $A$  et un demi-groupe  $\Sigma$  d'applications de  $A$  dans  $A$ . Il définit une  $\Sigma$ -équivalence sur  $A$  comme étant une équivalence  $q$  telle que

$$x \equiv y(q) \Rightarrow \sigma x \equiv \sigma y(q) \text{ pour tout } \sigma \in \Sigma.$$

A toute  $\Sigma$ -équivalence  $q$  sur  $A$ , il fait correspondre une congruence  $q^\dagger$  définie sur  $\Sigma$  par

$$\sigma \equiv \tau(q^\dagger) \Leftrightarrow \sigma x \equiv \tau x(q) \text{ pour tout } x \in A.$$

A toute congruence  $p$  sur  $\Sigma$ , il fait correspondre une  $\Sigma$ -équivalence  $p^\dagger$  définie sur  $A$  comme étant la plus fine  $\Sigma$ -équivalence telle que

$$\sigma \equiv \tau(p) \Rightarrow \sigma x \equiv \tau x(p^\dagger) \text{ pour tout } x \in A.$$

Dans ces conditions, l'application  $q \rightarrow q^\dagger$  constitue une application biunivoque de l'ensemble des  $\Sigma$ -équivalences sur  $A$  fermées (telles que  $q^{\dagger\dagger} = q$ ) sur l'ensemble des congruences sur  $\Sigma$  fermées (telles que  $p^{\dagger\dagger} = p$ ) et l'application  $p \rightarrow p^\dagger$  est l'application réciproque. — L'A. précise ensuite la structure de  $p^\dagger$  et étudie le cas particulier où  $\Sigma$  est un groupe (les  $\Sigma$ -équivalences fermées sont alors permutables) et celui où  $A$  est un treillis,  $\Sigma$  étant engendré par les translations de ce treillis. Finalement, l'A. étudie en détails le cas où  $A$  est une algèbre quelconque et où  $\Sigma$  est engendré par les translations de cette algèbre. Les  $\Sigma$ -équivalences sont alors des congruences. Le théorème signalé précédemment généralise ainsi un résultat de A. Albert (Trans. Amer. math. Soc. 54, 507—520 (1943)) en établissant l'existence d'une correspondance biunivoque entre les  $\Sigma$ -équivalences (congruences) fermées définies sur une algèbre et les congruences fermées définies sur le demi-groupe engendré par les translations de cette algèbre.

R. Croisot.

Norton, D. A.: **Hamiltonian loops.** Proc. Amer. math. Soc. 3, 56—65 (1952).

Eine Loop (= Quasigruppe mit neutralem Element) heißt hamiltonsch, wenn jede Unterloop normal ist. Um Strukturaussagen ähnlich denen über hamiltonsche Gruppen zu gewinnen, werden einschränkende Annahmen gemacht (potenzassoziativ = jedes Element erzeugt eine Gruppe; di-assoziativ = je zwei Elemente erzeugen eine Gruppe). Eine potenzassoziative hamiltonsche Loop, in der jedes Element endliche Ordnung besitzt, ist direktes Produkt von  $p$ -Loops (jedes Element hat eine Potenz der Primzahl  $p$  als Ordnung). Eine kommutative di-assoziative hamiltonsche Loop ist Gruppe. In einer nichtkommutativen di-assoziativen hamiltonschen Loop hat jedes Element endliche Ordnung. Eine di-assoziative hamiltonsche Loop  $L$  ist entweder eine abelsche Gruppe oder aber direktes Produkt einer abelschen Gruppe, deren Elemente ungerade Ordnung haben, mit einer Loop  $H$  von gewissen Eigenschaften; falls Elemente  $a, b, c \in L$  mit  $(ab)c = a(bc)$  stets eine Gruppe erzeugen, ist  $H$  das direkte Produkt einer abelschen Gruppe vom Exponenten 2 mit einer Quaternionengruppe oder einer Cayley-Loop [= Loop mit drei Erzeugenden  $a_1, a_2, a_3$ , zwischen denen die Relationen bestehen:  $a_i^4 = 1, a_i^2 = a_j^2, a_i a_j = a_j^3 a_i, (a_i a_j) a_k = a_i^3 (a_j a_k)$  bei verschiedenen  $i, j, k$ ]. Von den letzten beiden Aussagen werden Umkehrungen hergeleitet.

G. Pickert.

Bruck, R. H.: **Pseudo-automorphisms and Moufang loops.** Proc. Amer. math. Soc. 3, 66—72 (1952).

Eine eindeutige Abbildung  $U$  einer Loop (= Quasigruppe mit neutralem Element 1)  $G$  in sich heißt Pseudo-Automorphismus, wenn es ein  $u \in G$  mit  $(xy)^U u = x^U (y^U u)$  für alle  $x, y \in G$  gibt. Die Pseudo-Automorphismen von  $G$



bilden eine Gruppe. Im folgenden sei  $G$  eine Moufang-Loop, d. h. es gilt  $(x y) (z x) = x ((y z) x)$  für alle  $x, y, z \in G$ . Jedes Produkt von Rechts- und Linksmultiplikationen von  $G$ , welches 1 festläßt, ist dann ein Pseudo-Automorphismus von  $G$ . Ist  $G$  sogar kommutativ, so ist jeder Pseudo-Automorphismus ein Automorphismus. Die Menge  $N$  der  $x$  mit  $x(yz) = (xy)z$  für alle  $y, z \in G$  ist normale Unterloop von  $G$ , und jeder Pseudo-Automorphismus von  $G$  ruft einen Automorphismus von  $N$  hervor. Mit Hilfe der Pseudo-Automorphismen werden für die folgenden Sätze (über eine Moufang-Loop  $G$ ) gegenüber früheren Darstellungen vereinfachte Beweise angegeben: Gilt  $x(yz) = (xy)z$  für alle  $x, y, z \in G$  mit  $x, y \in A (\subseteq G)$  oder  $x, y \in B (\subseteq G)$  oder  $x, y \in C (\subseteq G)$  oder  $x \in A, y \in B, z \in C$ , so ist  $A \cup B \cup C$  in einer assoziativen Unterloop enthalten; gilt  $x(yz) = (xy)z$  für alle  $x, y, z \in G$  mit  $x, y$  aus einer assoziativen Unterloop  $A$  oder  $x, y \in B (\subseteq G)$ , so ist  $A \cup B$  in einer assoziativen Unterloop enthalten; ist die Faktorloop  $G/N$  kommutativ, so ist jede maximale assoziative Untermenge eine maximale assoziative Unterloop. *G. Pickert.*

**Smiley, M. F.:** Notes on left division systems with left unit. Amer. J. Math. **74**, 679—682 (1952).

Ein Linksdivisionssystem mit Linkseinheit (kurz: System) ist eine Menge  $G$  mit einer Verknüpfung  $(a, b) \rightarrow ab$ , in welcher ein Element  $e$  mit  $ex = x$  für alle  $x \in G$  und zu  $a, b \in G$  genau ein  $x$  mit  $xa = b$  vorhanden ist.  $H \subseteq_s G$  bedeute: Aus  $a, b \in H$  folgt  $ab \in H$  und  $x \in H$  mit  $xa = b$ .  $K \subseteq_n G$  bedeute:  $K$  ist Kern (= Menge der Urbilder der Linkseinheit) eines Homomorphismus von  $G$  auf ein System. Unter den Voraussetzungen  $L \subseteq_n H \subseteq_s G$ ,  $K \subseteq_n G$  gilt nun: (1)  $H \cap K \subseteq_n H$ ; (2)  $KL \subseteq_n KH$ ; (3)  $(KL \cap H) \subseteq_n H$ ; (4)  $(KL \cap H) h \rightarrow (KL)h$  mit  $h \in H$  ist Isomorphismus von  $H/(KL \cap H)$  auf  $KH/KL$ ; (5) aus  $H \subseteq_n G$  folgt  $KH = HK \subseteq_n G$ ; (6) im Falle  $K \cap H \subseteq L$  ist  $Lh \rightarrow (KL)h$  mit  $h \in H$  eine Isomorphismus von  $H/L$  auf  $KH/KL$ . Ist  $G$  eine Loop, so folgt aus  $K \subseteq_n G$  nicht, daß  $K$  normale Unterloop ist. Es wird jedoch eine einheitliche Methode angegeben, welche (1)—(6) nicht nur für Systeme sondern auch für Loops, und zwar hier mit  $\subseteq_s, \subseteq_n$  in der Bedeutung von „Unterloop von“ bzw. „normale Unterloop von“ beweist. *G. Pickert.*

**Weaver, Milo W.:** Cosets in a semi-group. Math. Mag. **25**, 125—136 (1952).

Der Ring der Restklassen mod. einer ganzen Zahl wird untersucht. Die von den nilpotenten Elementen und den andern Nullteilern erzeugten zyklischen Halbgruppen werden aufgeschrieben und die eindeutige Zerlegung der Restklassen in Primrestklassen wird explizit (d. h. nicht durch den Homomorphismus des Ringes mit dem Ringe der ganzen Zahlen) nachgewiesen. Der erste und der letzte Abschnitt erhalten Verallgemeinerungen auf beliebige Halbgruppen. Eine endliche Halbgruppe  $S$  sei als elementefremde Vereinigung einer Unterhalbgruppe  $S'$  und von Linksnebenklassen von  $S'$  dargestellt. Gibt es  $s \in S$ , sodaß  $sS' = S'$ , dann ist  $S'$  eine Rechtsgruppe. Ist  $S'$  eine normale Untergruppe von  $S$  und  $S/S'$  eine Gruppe, so ist  $S'$  selbst eine Gruppe. Die verlangte Darstellung ist mit Hilfe einer Untergruppe  $S'$  von  $S$  dann und nur dann möglich, wenn jedes Element von  $S$  mindestens eine Rechtseinheit in  $S'$  besitzt. *F. W. Levi.*

**Green, J. A. and D. Rees:** On semi-groups in which  $x^r = x$ . Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 35—40 (1952).

Verff. beweisen, daß die Behauptung  $A_r$ : „Die freie Halbgruppe mit (1) endlich vielen Erzeugenden und (2) der Bedingung  $x^r = x$  für alle Elemente  $x$  ist endlich“ äquivalent ist mit der entsprechenden Burnsidischen Vermutung  $B_r$  für freie Gruppen. Für  $r = 2$  werden die Anzahlen explizit angegeben. *P. Lorenzen.*

**Scott, W. R.:** Groups and cardinal numbers. Amer. J. Math. **74**, 187—197 (1952).

Let  $G$  be an infinite group. For each element  $x$  in  $G$  denote by  $E(x)$  the totality of elements  $g$  in  $G$  such that  $x$  is not in the cyclic subgroup generated by  $g$ . For a

set  $X$ , denote by  $o(X)$  the cardinal number of elements of  $X$ . Set  $K$  equal to the totality of elements  $k$  in  $G$  for which  $o(E(k)) < o(G)$ . If  $G$  is of type  $p^\infty$ ,  $K = G$ . The author studies the problem of determining  $K$  when  $G$  is given. In this connection the intersection  $D$  of all subgroups  $G_\alpha$  of  $G$  such that  $o(G_\alpha) = o(G)$  is introduced. Examples of the authors results for the general case are:  $K \leq D$ ,  $K$  is a subgroup of the center of  $G$ , and  $K$  is either cyclic of prime power order or of type  $p^\infty$ .  $K$  is of type  $p^\infty$  if and only if the center of  $G$  contains a subgroup  $C$  of type  $p^\infty$  such that  $G/C$  is finite; when such a subgroup  $C$  exists,  $C = K = D$ . Thus, if  $\aleph_0 < o(G)$ ,  $K$  is cyclic of prime power order. If  $G$  contains at least one element of infinite order,  $K = 1$ . Now assume that  $G$  is abelian. In this case the author gives a complete solution of the problem by establishing the following three results: 1)  $K$  is of type  $p^\infty$  if and only if  $G = H \otimes K$ , where  $H$  is of type  $p^\infty$  and  $F$  is finite, 2) if  $\aleph_0 < o(G)$ , then  $K = D = 1$ , and 3) if  $\aleph_0 = o(G)$ , but  $G$  does not have the form  $G = H \otimes F$  as in 1), then  $K = D = 1$ . Some auxiliary results are obtained concerning the layers of a group.

*D. G. Higman.*

**Dieudonné, Jean:** Sur les  $p$ -groupes abéliens infinis. *Portugaliae Math.* 11, 1—5 (1952).

Let  $p$  be a prime, and let  $x$  be an element of the [additive] abelian group  $G$ . If there is an upper bound  $h$  for the set of integers  $m$  such that  $x$  is in  $p^m G$ , then  $h$  is called the height of  $x$  in  $G$ . Otherwise  $x$  is said to have infinite height in  $G$ .  $G$  is called decomposable if it is the direct sum of cyclic groups. The author proves the following generalization of a theorem of Kulikoff [*Mat. Sbornik*, n. Ser. 16, 129 (1945)]: let  $H$  be a subgroup of the abelian  $p$ -group  $G$ , such that  $G/H$  is decomposable. Then  $G$  is decomposable if and only if  $H$  is the join of an ascending sequence of subgroups  $H_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) such that for each  $k$  the heights in  $G$  of the elements of  $H_k$  are bounded. An example is given of a nondecomposable group  $G$ , which contains no elements of infinite height, but which contains a decomposable subgroup  $H$  such that  $G/H$  is decomposable.

*D. G. Higman.*

**Kertész, A. and T. Szele:** On abelian groups every multiple of which is a direct summand. *Acta Sci. math.* 14, 157—166 (1952).

The authors call a group  $G$  a direct sum of its subgroups  $U_\nu$  if there exist mutually orthogonal, idempotent endomorphisms  $\varepsilon_\nu$  such that  $\varepsilon_\nu G = U_\nu$ , and such that for  $g$  in  $G$ ,  $\varepsilon_\nu g = 0$  for all  $\nu$  only if  $g = 0$ . The discrete direct sum is characterized by the additional property that for each  $g$  in  $G$ ,  $\varepsilon_\nu g \neq 0$  for only finitely many  $\nu$ , whereas the complete direct sum is characterized by the condition that for each choice of a system of representative elements  $g_\nu$  in  $U_\nu$  there exists a  $g$  in  $G$  such that  $\varepsilon_\nu g = g_\nu$  for all  $\nu$ . The direct sums of the  $U_\nu$  are just the groups „between“ the discrete and the complete direct sums. In the case of finitely many  $U_\nu$ , there is only one direct sum in the above sense, which then coincides with the classical direct sum. This generalization of the concept of direct sum was introduced by T. Szele and J. Szendrei (this *Zbl.* 44, 254). The main result of the present paper may be stated as follows. An abelian group  $G$  has the property that the subgroup  $nG$  is a direct summand for every natural number  $n$  if and only if  $G$  is the direct sum  $G = A \oplus B$  where  $pA = A$  for every prime  $p$ ,  $B$  is a direct sum of the primary components of its torsion subgroup  $T$  if  $T \neq 0$ , the order of each element of  $T$  is square free, and  $p[B/T] = B/T$  for every prime  $p$ .

*D. G. Higman.*

**Hirsch, K. A.:** On infinite soluble groups. IV. *J. London math. Soc.* 27, 81—85 (1952).

[For parts I—III, cf. this *Zbl.* 18, 145, 19, 156, *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. 49, 184—194 (1946).] A (finitely) soluble group with maximal condition for subgroups is called an  $S$ -group. Conditions are given which ensure that the periodic elements of an  $S$ -group  $G$  form a (necessarily characteristic) subgroup  $F$ ; under these conditions  $G/F$  has a principal series with only free abelian factors; and the analogue of the Jordan-Hölder theorem holds in such groups. It is further shown that every  $S$ -group has composition series in which all finite factors (of prime order) precede all infinite (cyclic) factors. The intersection of all subgroups of finite index in an  $S$ -group is the unit group.

*B. H. Neumann.*



Ayoub, Christine Williams: A theory of normal chains. Canadian J. Math. 4, 162—188 (1952).

Die Verf. entwickelt eine abstrakte Theorie von Normalketten in Gruppen. Die allgemeine Situation ist die folgende: Gegeben sind 1. eine Gruppe  $G$ , 2. ein Operatorsystem  $M$  für  $G$ , 3. ein vollständiger Verband (lattice)  $\varphi$  von  $M$ -zulässigen Untergruppen von  $G$ .  $G$  heißt dann eine  $M$ - $\varphi$ -Gruppe, und die weitere Terminologie (wie etwa „Normalteiler“) impliziert immer  $M$ -zulässig und zu  $\varphi$  gehörig. Es werden nun eine Reihe zusätzlicher Eigenschaften axiomatisch behandelt (wie etwa „ $\varphi$ -auflösbar“, „ $\varphi$ -nilpotent“ usw.) und jeweils Sätze über Ketten von Normalteilern bewiesen. Diese Ketten sind analog zu Kompositions- oder Hauptreihen, Loewyschen Reihen (siehe etwa R. Brauer, dies. Zbl. 25, 113), auf- oder absteigenden Zentralreihen und schließlich zu nilpotenten Reihen, wie sie Ref. für den Fall auflösbarer Gruppen mit Maximal-Bedingung eingeführt hat (dies. Zbl. 33, 149). Typische Beispiele der von der Verf. erzielten Ergebnisse sind etwa die folgenden: Wenn  $G$  eine endliche Loewysche Reihe besitzt, dann haben die oberen und unteren Zentralreihen auch endliche Länge. Wenn umgekehrt  $G$   $\varphi$ -nilpotent von endlicher Klasse ist (d. h. eine endliche Zentralreihe von 1 bis  $G$  besitzt), dann sind alle Loewyschen Reihen auch Zentralreihen. Weitere Resultate im einzelnen darzustellen, verbietet der Platz. Die Arbeit ist Teil einer Doktor-Dissertation (Yale 1947) unter R. Baer.

K. A. Hirsch.

Kazačkov, B. V.: Über einen lokalen Satz in der Gruppentheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 525—528 (1952) [Russisch].

Man sagt, daß eine Gruppe  $G$  eine Eigenschaft  $E$  lokal besitzt, wenn alle endlich erzeugten Untergruppen von  $G$  die Eigenschaft  $E$  besitzen. Es kommt nun vor, daß eine Eigenschaft in  $G$  selbst („global“) gilt, falls sie nur in  $G$  lokal gilt. In diesem Falle sagt man, daß für die Eigenschaft  $E$  ein lokaler Satz gilt. Solche lokalen Sätze sind von hohem Interesse in der Theorie der unendlichen auflösbaren und nilpotenten Gruppen [siehe etwa Kuroš-Černikov, Uspechi mat. Nauk, n. Ser. 2, Nr. 3 (19), 18—59 (1947)]. Der lokale Satz, den Verf. beweist, bezieht sich auf eine Eigenschaft, die am besten durch die Namen Sylow-Hall-Čunichin gekennzeichnet wird (siehe etwa Čunichin, dies. Zbl. 39, 17). Sei  $\Pi$  irgendeine nicht leere endliche oder unendliche Menge von Primzahlen. Definition. Eine Gruppe hat die Eigenschaft endlicher  $\Pi$ -Konjugiertheit, wenn sie entweder überhaupt keine endliche Klasse von konjugierten  $\Pi$ -Sylow-Untergruppen besitzt, oder aber aus der Existenz einer solchen Klasse die Konjugiertheit aller  $\Pi$ -Sylow-Untergruppen folgt. Theorem. Jede Gruppe, in der die Eigenschaft endlicher  $\Pi$ -Konjugiertheit lokal gilt, besitzt selbst diese Eigenschaft. Beispiele sind u. a. alle lokal-auflösbaren Gruppen oder die von Verf. betrachteten lokalen  $\Pi$ -S-Gruppen (dies. Zbl. 43, 22).

K. A. Hirsch.

Zavalo, S. T.: Freie Operatorgruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 949—951 (1952) [Russisch].

Es werden freie Gruppen mit einer Halbgruppe  $\Sigma$  von Operatoren betrachtet. Ist  $G$  eine freie Gruppe und gibt es in  $G$  eine Menge  $M$  von Elementen derart, daß die Gesamtheit der  $x\alpha$  ( $x \in M$ ,  $\alpha \in \Sigma$ ) ein System freier Erzeugender von  $G$  bildet, so wird  $G$  eine  $\Sigma$ -freie Gruppe genannt. Jede Gruppe mit dem Operatorenbereich  $\Sigma$  ist operatorisomorph einer Faktorgruppe einer  $\Sigma$ -freien Gruppe. Ist der Operatorenbereich sogar selbst eine Gruppe, so werden gewisse zulässige Untergruppen  $A_{g,A}$  betrachtet; diese werden erzeugt durch die Elemente  $g^{-1}g\alpha$ , wobei  $g$  ein festes Element aus  $G$  bedeutet und  $\alpha$  alle Elemente einer Untergruppe  $A$  von  $\Sigma$  durchläuft. Jede zulässige Untergruppe der  $\Sigma$ -freien Gruppe  $G$  ist in diesem Fall das operator-freie Produkt einer  $\Sigma$ -freien Gruppe und einer Anzahl von Gruppen des Typs  $A_{g,A}$ . — Ist  $\Sigma$  eine freie Halbgruppe, so wird folgende Definition eingeführt: Eine zulässige Untergruppe  $U$  der  $\Sigma$ -freien Gruppe  $G$  heißt vollständig zu-

lässig, wenn sie neben jedem Element  $g \cdot x$  ( $g \in G$ ,  $x \in \Sigma$ ) auch  $g$  selbst enthält. Dann gilt: Ist die zulässige Untergruppe  $U$  einer  $\Sigma$ -freien Gruppe vollständig zulässig und erzeugt jede Menge vollständig zulässiger Untergruppen von  $U$  wieder eine vollständig zulässige Untergruppe, dann ist  $U$  eine  $\Sigma$ -freie Gruppe. — Zwei weitere Sätze handeln vom Rang  $\Sigma$ -freier Gruppen. — Keine Beweise.

*R. Kochendörffer.*

**Meier-Wunderli, H.:** Note on a basis of P. Hall for the higher commutators in free groups. Commentarii math. Helvet. **26**, 1—5 (1952).

In der freien Gruppe mit  $n$  Erzeugenden sei  $H_1, H_2, \dots$  die absteigende Zentralreihe. Nach Ref. ist  $H_w/H_{w+1}$  eine freie abelsche Gruppe von  $d_w = \frac{1}{w} \sum_{t|w} \mu(t) n^{w/t}$  Erzeugenden. Dies folgt durch Möbiusumkehrung aus der Formel  $n^w = \sum_{t|w} t d_t$ .

Diese Formel, die Ref. durch Rechnung im freien Lieschen Ring bewiesen hatte, wird hier rein gruppentheoretisch bewiesen. Ebenso wird auch ein Satz von P. Hall über eine explizite Kommutatorenbasis hergeleitet.

*E. Witt.*

**Baer, Reinhold:** Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen. Math. Ann. **124**, 161—177 (1952).

It has been proved repeatedly that if the centre of a group  $G$  has finite index in  $G$ , then the derived group of  $G$  is finite [I. Schur, J. reine angew. Math. **132**, 85—137 (1907), where the theorem is not explicitly stated; R. Baer, Trans. Amer. math. Soc. **58**, 348—389 (1945), where it is an immediate consequence of more general results; B. H. Neumann, this Zbl. **43**, 24]. This fact is now generalized in two essentially different directions: First by replacing the finite group of inner automorphisms by some other finite group of automorphisms, and defining the analogues of the commutator group and the centre; secondly by replacing commutativity by  $n$ -commutativity  $(xy)^n = x^n y^n$  and again defining what corresponds to the commutator group and centre. Some typical theorems: Consider the order of a group  $A$  of automorphisms of a group  $G$ , the order of the group generated by all  $g^{-1} a^g$  for  $a \in A$ ,  $g \in G$ , and the index in  $G$  of the group of fixed elements under  $A$ ; if two of these three numbers are finite then so is the third. If  $U$  is a subgroup of  $G$  and  $N$  a normal subgroup of  $G$ , and if the set of commutators  $[u, n]$  with  $u \in U$ ,  $n \in N$  is finite, then this set generates a finite group. If  $U, V$  are subgroups of  $G$  and  $n$  is an integer, the subgroup generated by all  $(uv)^n v^{-n} u^{-n}$  is denoted by  $[U, V; n]$ .  $[G, G, n]$  was studied by O. Grün, this Zbl. **37**, 11). If  $M$  is a normal subgroup of finite index  $m$  in  $G$ , then  $[G, G, n]/[G, M, n]$  is finite and its order divides a power of  $m n (n - 1)$ . If  $G \cong F/R$  where  $F$  is a free group, then the group  $[F, F, n]/[F, R, n]$  depends only on  $G$ , not on its representation as a factor group of  $F$ . For many related theorems the reader must be referred to the paper itself. — [On p. 163, line 27,  $u$  und  $y$  have to be interchanged; on p. 176, formula (2.0), the right-hand side should be 1. The proof of Folgerung 4, p. 174, is not quite complete, but it can be completed.]

*B. H. Neumann.*

**Grün, Otto:** Über eine gewisse Klasse von endlichen Gruppen. Math. Nachr. **8**, 167—169 (1952).

L'A. chiama  $p$ -speciale („ $p$ -speziell“) un gruppo finito  $\mathfrak{G}$ , il cui ordine sia divisibile per un numero primo  $p$ , quando ogni elemento  $S$  di  $\mathfrak{G}$ , il cui ordine (periodo) sia divisibile per  $p$  ha addirittura per ordine una potenza di  $p$  (es.: gruppo diedrale, icosaedrale ecc.). Basandosi essenzialmente sul fatto che se un elemento  $P$  di  $\mathfrak{G}$  ha l'ordine  $p^k$  ( $k > 0$ ) e se  $S \in \mathfrak{G}$  è permutabile con  $P$ , l'ordine di  $S$  è una potenza di  $p$ , l'A. dimostra tra l'altro che: (n. 5) „se  $\mathfrak{P}$  è un sottogruppo di Sylow di  $\mathfrak{G}$  relativo a  $p$ , e se  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P})$  è il suo centro, il normalizzante  $\mathfrak{N}(\mathfrak{Z}(\mathfrak{P}))$  del centro coincide con il normalizzante  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$  del sottogruppo stesso ( $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P})$  non è contenuto come sottogruppo normale in sottogruppi di Sylow relativi a  $p$  diversi da  $\mathfrak{P}$ “, e che: (n. 7) „se  $\mathfrak{P}$  ha l'ordine  $p^i$  e se  $\mathfrak{Q}$ , di ordine  $q^k$ , è un sottogruppo di Sylow del normalizzante di  $\mathfrak{P}$  relativo al numero primo  $q \neq p$ , allora  $p^i \equiv 1 \pmod{q^k}$ ; quindi  $p^i \equiv 1 \pmod{q}$ : ordine del gruppo fattoriale  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}):\mathfrak{P}$ “. — L'A. chiama poi  $\mathfrak{P}$ -intersezioni di  $\mathfrak{G}$  le intersezioni di sottogruppi di Sylow di  $\mathfrak{G}$  relativi a  $p$ ;  $\mathfrak{P}$ -intersezione massima una  $\mathfrak{P}$ -intersezione che non è sottogruppo proprio di una  $\mathfrak{P}$ -intersezione; minima, quando è più ampia del sottogruppo identico e non contiene come sottogruppo proprio una  $\mathfrak{P}$ -intersezione. Lasciando nella presente nota impregiudicata la questione dell'esistenza di gruppi  $p$ -speciali con  $\mathfrak{P}$ -intersezioni più ampie dell'identità, l'A. stabilisce che, se una siffatta  $\mathfrak{P}$ -intersezione  $\mathfrak{D}$  esiste (teorema 8) a) „essa contiene il centro di uno perlomeno dei sottogruppi di Sylow relativi a  $p$  che la contengono; b) se è massima, contiene i centri di tutti i sottogruppi di Sylow relativi a  $p$  di  $\mathfrak{G}$ , nei quali è contenuta; c) tutte le  $\mathfrak{P}$ -intersezioni minime sono coniugate tra di loro in  $\mathfrak{G}$ ; se  $\mathfrak{D}$  è una di esse, essa è sottogruppo normale del normalizzante  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P})$  di uno perlomeno dei sottogruppi di Sylow di  $\mathfrak{G}$  relativi a  $p$ ; se inoltre essa è l'intersezione di tutti i sottogruppi di Sylow relativi a  $p$  che contengono il centro  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{P})$  di uno di essi, essa pure lo contiene.

*L. Lombardo-Radice.*



**Itô, Noboru:** Remarks on O. Grün's paper „Beiträge zur Gruppentheorie. III.“ Math. Nachr. 6, 319—325 (1952).

Die Arbeit erledigt eine vom Ref. in seiner Arbeit (dies. Zbl. 30, 8) offen gelassene Frage.  $P$  sei eine  $p$ -Sylowgruppe der endlichen Gruppe  $G$ ,  $V(P)$  die schwache Abschließung in  $P$  von  $Z(P)$  (bez.  $G$ ). Dann heiße  $G$   $p$ -regulär, wenn aus  $P^X \supset Z(P)$ ,  $X \in G$  folgt:  $P^X \supset V(P)$ . Weiter heiße  $G$   $p$ -hyperregulär, wenn gilt: Ist  $D$  ein beliebiger in  $P$  enthaltener Durchschnitt von  $p$ -S. Gr. von  $G$ , so liegt in  $P$  auch eine  $p$ -S. Gr. von  $N(D)$  ( $=$  Normalisator von  $D$  in  $G$ ). Ref. hatte gezeigt, daß es  $p$ -reguläre und  $p$ -hyperreguläre Gruppen gibt, aber ausdrücklich die Frage offen gelassen, ob nicht jede endliche Gruppe  $p$ -regulär, bzw. jede  $p$ -reguläre Gruppe  $p$ -hyperregulär sei. Beide Fragen werden von Verf. verneinend beantwortet und damit die obigen Definitionen erst voll gerechtfertigt. Verf. zeigt etwas mehr: 1. Nicht jede endliche Gruppe ist  $p$ -regulär. 2. Nicht jede  $p$ -reguläre Gruppe ist  $p$ -hyperregulär. 3. Es gibt auflösbare, nicht  $p$ -reguläre Gruppen. 4. In jeder auflösbaren Gruppe ist  $V(P)$  (s. o.) abelsch. 5. Es gibt Gruppen, in denen  $V(P)$  abelsch ist, die aber nicht  $p$ -regulär sind. — Die Beweise erfolgen durch Nachweisung entsprechender Gruppen. O. Grün.

**Itô, Noboru:** Note on  $A$ -groups. Nagoya math. J. 4, 79—81 (1952).

$A$ -Gruppen sind endliche auflösbare Gruppen, deren sämtliche Sylowgruppen abelsch sind. Es wird bewiesen, daß jede irreduzible Darstellung einer  $A$ -Gruppe auf monomiale Gestalt transformiert werden kann. Unter dem Radikal einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  verstehe man den maximalen nilpotenten Normalteiler von  $\mathfrak{G}$ , und mit  $\mathfrak{X}(\mathfrak{G})$  werde die Gesamtheit aller Elemente von  $\mathfrak{G}$  bezeichnet, für die der Wert jedes einfachen Charakters von Null verschieden ist. Es wird gezeigt, daß im Fall einer  $A$ -Gruppe  $\mathfrak{G}$  die Elemente von  $\mathfrak{X}(\mathfrak{G})$  genau das Radikal von  $\mathfrak{G}$  erzeugen.

R. Kochendörffer.

**Gruenberg, K. W.:** A note on a theorem of Burnside. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 202 (1952).

Verf. beweist: Hat eine endliche Gruppe  $G$  eine nilpotente Untergruppe  $K$  mit Index  $p^r$  ( $p$  Primzahl), so ist  $G$  auflösbar. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Burnside [A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937, Satz 170 (dies. Zbl. 17, 153)] und eines Satzes von Ref. (dies. Zbl. 43, 259). Weitere Verallgemeinerungen s. noch: N. Ito (dies. Zbl. 44, 15) und H. Wielandt (dies. Zbl. 43, 258). J. Szép.

**Čunichin, S. A.:** Über die Abschwächung der Bedingungen in Sätzen vom Sylowschen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 663—665 (1952) [Russisch].

Weitere Verallgemeinerungen früherer Sätze des Verf. (dies. Zbl. 33, 98, 36, 154, 37, 303, 39, 17, 18) durch Heranziehung der Sätze von Schur-Zassenhaus (siehe Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I, S. 126, Leipzig 1937). K. A. Hirsch.

**Todd, J. A.:** On the holomorph of the elementary Abelian group of order 8. J. London math. Soc. 27, 145—152 (1952).

Es sei  $A$  die elementare Abelsche Gruppe der Ordnung 8 und  $G$  das Holomorph von  $A$  der Ordnung  $8 \cdot 168 = 1344$ . Verf. bestimmt ein volles System nicht-konjugierter maximaler Untergruppen von  $G$ . Dieses besteht aus fünf Gruppen, nämlich aus zwei Gruppen  $H_1, H_2$  der Ordnung 192 und drei Gruppen  $H_3, H_4, H_5$  der Ordnung 168. Von diesen sind nur  $H_4$  und  $H_5$  zueinander isomorph; diese beiden Gruppen sind nämlich beide in natürlicher Weise zur Automorphismengruppe von  $A$  isomorph (und daher einfach). Es wird ein äußerer Automorphismus von  $G$  angegeben, welcher  $H_4$  und  $H_5$  untereinander vertauscht; damit ist eine Vermutung von Littlewood widerlegt, welcher annahm, daß  $G$  keine äußeren Automorphismen besitze. Ferner werden die Charaktere der zu  $H_1, \dots, H_5$  gehörigen transitiven Permutations-

darstellungen von  $G$  bestimmt. Dabei ist es bemerkenswert, daß die nicht-isomorphen Untergruppen  $H_1$  und  $H_2$  denselben Permutationscharakter liefern. Außerdem werden die sämtlichen Charaktere von  $H_1$  und  $H_2$  bestimmt, ausgehend von der Charaktertabelle von  $G$ , welche letztere dem Littlewoodschen Buche entnommen wird (Theory of group characters and matrix representations, 2nd ed., Oxford 1950, dies. Zbl. 38, 165).

*P. Roquette.*

**Gamba, Augusto:** Sui caratteri delle rappresentazioni del gruppo simmetrico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 167—169 (1952).

Ein von Murnaghan kürzlich angegebenes fast mechanisches Verfahren zur Berechnung der einfachen Charaktere der symmetrischen Permutationsgruppen (dies. Zbl. 42, 24) wird noch beträchtlich vereinfacht.

*H. Boerner.*

**Todd, J. A.:** On a conjecture of D. E. Littlewood. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 203 (1952).

Die Vermutung, daß die (i. allg. reduzible) Darstellung einer Gruppe, die man durch die Permutationen erhält, welche ihre Elemente unter den Nebenklassen einer maximalen Untergruppe bewirken, stets jede irreduzible Darstellung höchstens einmal enthält, wird durch ein Gegenbeispiel widerlegt.

*H. Boerner.*

**Suprunenko, D.:** Auflösbare Gruppen von Matrizen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 183—186 (1952) [Russisch].

Die vorliegende Note stellt eine Ergänzung einer früheren Arbeit des Verf. dar und stützt sich in wesentlichen Punkten auf diese [Učenyje Zapiski belorusk. gos. Univ. Lenin, Ser. fis.-mat. 12 (1951)]. Es werden die folgenden beiden Sätze bewiesen: 1. Eine maximale irreduzible auflösbare Untergruppe der linearen Gruppe  $GL(n)$  über einem unendlichen Körper besitzt einen einzigen maximalen abelschen Normalteiler. 2. In der linearen Gruppe  $GL(n)$  über einem algebraisch abgeschlossenen Körper gibt es nur endlich viele Klassen konjugierter maximaler auflösbarer Untergruppen.

*R. Kochendörffer.*

**Murnaghan, F. D.:** The element of volume of the rotation group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 69—73 (1952).

Eine Drehung  $D_n$  des  $n$ -dimensionalen Raumes kann durch verschiedene Parameter festgelegt werden. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 39, 257) wählte Verf. dafür Analoga zu den Eulerschen Winkeln und stellte das Volumelement  $dV_n$  der Gruppe aller  $D_n$  durch sie dar. Hier gibt er ein Parametersystem an, das in zwei Gruppen zerfällt: die class-parameters, das sind die Drehwinkel, und die in-class parameters, durch die die Drehung unter allen mit gleichen Drehwinkeln charakterisiert wird. Dementsprechend zerfällt  $dV_n$  in zwei Faktoren, den class-factor, der schon bekannt ist und den in-class factor, der hier erstmalig aufgestellt wird. Keine Beweise.

*G. Locks.*

**Michiura, Tadashi:** Sur les groupes ordonnés. II, III. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1422—1423, 1521—1522 (1952).

Let  $G$  be an abelian additively written partially ordered group, and assume that  $G$  is „strongly archimedean“, i. e. to every  $x > 0$  and every  $y$  in  $G$  there exists a positive integer  $n$  such that  $y \leq nx$ . Then there is a (not necessarily unique) maximal proper convex subgroup  $H$  in  $G$ ; it consists of 0 and (if it is not trivial) elements incomparable with 0. The factor group  $G/H$  in the canonically induced (partial) order is ordinally simple. An ordinally simple group  $G$  is „quasi-isomorphic“ to a subgroup of the additive group  $R$  of real numbers. This means that there is an algebraic isomorphism of  $G$  into  $R$  mapping every  $x > 0$  of  $G$  onto a positive real number. These results were announced in the first note of this series (this Zbl. 38, 159). — If  $G$  is strongly archimedean and if  $nx \geq 0$  implies  $x \geq 0$  in  $G$ , then  $G$  is order isomorphic to the lexicographic product of two groups  $Q$  and  $V$ . Here  $Q$  is a subgroup of the unrestricted direct product of groups  $R$  (of real numbers). the



order being defined by calling an element positive if and only if all its components are positive; and  $V$  is the intersection of all maximal proper convex subgroups of  $G$  and is trivially ordered, i. e. different elements are incomparable.

*B. H. Neumann.*

**Chehata, C. G.:** An algebraically simple ordered group. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 183—197 (1952).

Soit  $F$  un corps totalement ordonné,  $x \rightarrow f(x)$  les applications de  $F$  sur lui-même qui possèdent les propriétés suivantes 1)  $f(x)$  est croissante, 2) il existe  $\lambda(f), \mu(f) \in F$  tels que  $f(x) = x$  pour  $x < \lambda$  ou  $x > \mu$ , 3) l'intervalle  $(\lambda, \mu)$  est divisible en un nombre fini d'intervalles dans lesquels  $f(x)$  est linéaire. L'ensemble de ces applications forme un groupe totalement ordonné  $G(F)$ , l'opération de groupe étant définie par  $h = fg \Leftrightarrow h(x) = f(g(x))$ , et l'ordre par la convention suivante:  $f > g$ , s'il existe  $a \in F$  tel que  $f(x) = g(x)$  pour  $x \leq a$  et  $f(a + \varepsilon) > g(a + \varepsilon)$  pour des  $\varepsilon \in F$ , positifs et suffisamment petits. L'A. montre alors que  $G(F)$  est ordinalement simple (c'est-à-dire ne contient aucun sous-groupe invariant propre qui avec deux éléments contienne tous ceux qui sont compris entre eux) et est algébriquement simple.

*A. Revuz.*

**Matsushima, Yozô:** Some remarks on the exceptional simple Lie group  $\mathfrak{F}_4$ . Nagoya math. J. 4, 83—88 (1952).

Si le  $\mathfrak{F}_4$  de Cartan est représenté par le groupe continu des automorphismes de l'algèbre exceptionnel de Jordan  $\mathfrak{J}$ , et si  $E_i \in \mathfrak{J}$  est la matrice dont tous les éléments sont 0 à l'élément  $\xi_i$  de la diagonale près qui soit 1, on sait que le groupe d'invariance d'un  $E_i$  est localement isomorphe au groupe  $\mathfrak{B}_4$  et que le groupe d'invariance de tous les  $E_i$  est localement isomorphe à  $\mathfrak{D}_4$ . (Voir C. Chevalley et R. D. Schafer, ce Zbl. 37, 20, Ref., Oktaven, Ausnahmegruppen ..., Utrecht 1951.) L'A. démontre que les groupes dits sont simplement connexes du point de vue global. La cause en est que dans le principe de dualité global les signes sont indéterminés. L'un de ces résultats a été annoncé par A. Borel (ce Zbl. 41, 522).

*H. Freudenthal.*

**Dynkin, E. B.:** Topologische Invarianten der Untergruppen der Gruppe der unitären Matrizen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4 (50), 142—143 (1952) [Russisch].

**Pettis, B. J.:** A note on everywhere dense subgroups. Proc. Amer. math. Soc. 3, 322—326 (1952).

H. C. Wang a montré (ce Zbl. 37, 13) que, dans un groupe  $X$  métrique séparable localement compact et non discret, il existe un sous-groupe  $Y \neq X$  partout dense et non dénombrable. L'A. précise ce résultat, en employant des méthodes analogues. Il donne d'abord des énoncés généraux qui ne peuvent être résumés ici, mais dont voici quelques conséquences: si  $X$  est un groupe topologique de Hausdorff non discret de 2<sup>ème</sup> catégorie, tout sous-groupe partout dense  $Y \neq X$  est contenu dans un sous-groupe partout dense non dénombrable  $Y' \neq X$ ; si de plus  $X$  est abélien, et si, pour tout entier  $r > 0$  tel que  $x^r \neq e$ , l'image par  $x \rightarrow x^r$  de tout ensemble ouvert non vide est un ensemble dense dans au moins une partie ouverte, alors tout sous-groupe  $Y \neq X$  est contenu dans un sous-groupe  $Y' \neq X$  de deuxième catégorie.

*J. Dixmier.*

**Montgomery, Deane and Leo Zippin:** Four-dimensional groups. Ann. of Math., II. Ser. 55, 140—166 (1952).

Diese Arbeit ist der Lösung eines neuen Spezialfalles des berühmten fünften Hilbertschen Problems gewidmet; Verff. beweisen nämlich folgenden wichtigen Satz: Jede vierdimensionale, separable metrische, lokal kompakte, nicht kompakte, zusammenhängende und lokal zusammenhängende topologische Gruppe  $G$  ist eine Liesche Gruppe. — Es werden keine analytischen oder differenzierbaren Koordinaten in  $G$  eingeführt, sondern nur bewiesen, daß  $G$  einen Normalteiler besitzt, der ebenso wie die zugehörige Faktorgruppe Liesche Gruppe ist; der Satz folgt dann aus bekannten Ergebnissen von K. Iwasawa (dies. Zbl. 34, 18) und A. M. Gleason (dies. Zbl. 33, 151). Der Beweis stützt sich zum größten Teil auf ein früheres Ergebnis der Verff. (dies. Zbl. 44, 259), wonach eine zweidimensionale zusammenhängende nicht kompakte Untergruppe von  $G$

immer vorhanden ist. Mit Hilfe einer solchen Untergruppe und einiger Ergebnisse von D. Montgomery (dies. Zbl. 38, 362) über lokal homogene Räume wird zunächst bewiesen, daß  $G$  lokal euklidisch ist und keine beliebig kleinen Untergruppen besitzt. Daraus folgt u. a., daß jede zweidimensionale Untergruppe von  $G$ , eine Liesche Gruppe ist. Wäre nun der Hauptsatz falsch, so könnte man auf Grund der erwähnten Ergebnisse von Iwasawa und Gleason annehmen, daß  $G$  überhaupt keinen Normalteiler und kein Zentrum besitzt. Für die, als vorhanden bewiesene, zweidimensionale Liesche Untergruppe von  $G$  sind dann zwei Fälle möglich: kommutativ oder nicht kommutativ zu sein. Der erste Fall wird unmittelbar als unmöglich bewiesen. Im zweiten muß die Untergruppe zur Gruppe  $H$  aller homothetischen Abbildungen der Geraden isomorph sein. Verff. unterscheiden hier zwei weitere Fälle und zeigen deren Unmöglichkeit, wodurch der Hauptsatz bewiesen ist. — Als Nebenergebnis folgt noch, daß  $G$  irgendeinen Normalteiler positiver Dimension besitzt. Abgesehen von dem Falle, wo  $G$  einen kompakten dreidimensionalen Normalteiler besitzt, der keine zweidimensionale Untergruppe hat, enthält  $G$  immer auch eine dreidimensionale abgeschlossene, nicht kompakte Untergruppe.

*T. Ganea.*

**Higman, Graham: Unrestricted free products and varieties of topological groups.** J. London math. Soc. 27, 73—81 (1952).

Let groups  $G_\sigma$  be given, where  $\sigma$  ranges over an infinite index set  $\Sigma$ . If  $\Phi$  is a finite subset of  $\Sigma$ , denote by  $F_\Phi$  the free product of the  $G_\sigma$  with  $\sigma \in \Phi$ . If  $\Psi$  is a subset of  $\Phi$ , then  $F_\Phi$  is the free product of  $F_\Psi$  and  $F_{\Phi-\Psi}$ ; there is a homomorphism of  $F_\Phi$  onto  $F_\Psi$ , which is the identity on  $F_\Psi$  and trivial on  $F_{\Phi-\Psi}$ . Now let  $\Phi$  range over all finite subsets of  $\Sigma$ . The groups  $F_\Phi$  form then with these homomorphism an inverse system, whose inverse limit is called the „unrestricted free product“ of the groups  $G_\sigma$ . It is shown that there is a close parallel between it and the unrestricted direct product, as also between the restricted (i. e. ordinary) free product and the restricted direct product. The unrestricted free product  $F$  of a denumerable set of infinite cyclic groups  $(x_1), (x_2), \dots$  is then studied in greater detail.  $F$  contains the restricted free product  $F^{(w)}$  of its cyclic factors. It is shown that a free group which is a homomorphic image of  $F$  has finite rank, though this rank can be arbitrarily large. In  $F$  a natural topology is defined by its definition as an inverse limit; this topology coincides with the subgroup topology of Marshall Hall [Ann. of Math., II. Ser. 52, 127—139 (1950)]. Every endomorphism of  $F$  is shown to be continuous; hence the closure of a characteristic or fully invariant subgroup is itself characteristic or fully invariant respectively. The converse is not true, in fact the derived group of  $F$  is not closed. It is shown that every complete topological group  $G$  with a countable set of normal subgroups forming a base of neighbourhoods of the unit element has the property that every continuous mapping of  $x_1, x_2, \dots$  and the unit element into  $G$ , mapping the unit element onto the unit element, can be extended to a continuous homomorphism of  $F$  into  $G$ .  $G$  may then be said to belong to the „variety“ (suitably defined) of topological groups determined by  $F$ .  $F$  itself is a „free“ group of this variety. If completeness of  $G$  is not assumed,  $G$  belongs to the variety of topological groups determined by  $F^{(w)}$  (considered as a subspace of  $F$ ). The topology of  $G$  is necessarily a subgroup topology. Finally a new example is given of a group which is not free and whose only non-trivial freely irreducible subgroups are cyclic. This group, a subgroup of  $F$ , is essentially different from that of A. Kurosch (this Zbl. 18, 11). A method is given for constructing other such examples.

*B. H. Neumann.*

## Verbände. Ringe. Körper:

**Miller, D. G.: Postulates for Boolean algebra.** Amer. math. Monthly 59, 93—96 (1952).

L'A. donne deux systèmes de postulats indépendants pour une algèbre de Boole: 1°) Une algèbre de Boole est un ensemble ayant au moins deux éléments, muni de deux opérations binaires,  $\cdot$  et  $+$ , satisfaisant de plus aux axiomes suivants:

- (1) il existe 1 tel que  $a \cdot 1 = a$ . (3)  $[a \cdot (b \cdot b)] \cdot c = (c \cdot b) \cdot a$   
 (2)  $a + (b + b) = a$ . (4)  $a \cdot [(b + c) + d] = a \cdot (d + c) + a \cdot b$ .

2°) On peut remplacer les axiomes (1), (3), (4) par les axiomes suivants:

- (1') il existe 1 tel que  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ .  
 (3'—4')  $[(a \cdot (b \cdot b)) \cdot c] \cdot [(d + e) + f] = [(c \cdot b) \cdot a] \cdot [f + e] + [(c \cdot b) \cdot a] \cdot d$ .

*R. Croisot.*

**Klein-Barmen, Fritz: Schwach distributive Pseudoverbände.** Math. Ann. 124, 309—315 (1952).



L'A. rappelle la définition et quelques propriétés élémentaires d'un demi-groupe („Assoziativ“) et il définit un pseudo-treillis („Pseudoverband“), système muni de deux opérations associatives, commutatives, que l'on peut noter  $\cup$  et  $\cap$ , qui vérifient l'axiome  $x \cup y = x \Leftrightarrow x \cap y = y$ . Il introduit la notion de pseudo-treillis faiblement distributif („schwach distributiv“): en posant  $x = \bigcap_1^{\infty} x$ ,  $x \cdot x = \bigcap_2^{\infty} x$ ,  $x \cup \bigcap_n^{\infty} x = \bigcap_{n+1}^{\infty} x$ , un tel pseudo-treillis doit vérifier les axiomes

$$(\check{V}.1) \quad \bigcap_n^{\infty} x \cup \left( \bigcap_m^{\infty} x \cap \bigcap_p^{\infty} x \right) = \bigcap_{n+m}^{\infty} x \cap \bigcap_{n+p}^{\infty} x.$$

$$(\check{V}.2) \quad \bigcap_n^{\infty} x \cap \bigcap_{m+p}^{\infty} x = \left( \bigcap_n^{\infty} x \cap \bigcap_m^{\infty} x \right) \cup \left( \bigcap_n^{\infty} x \cap \bigcap_p^{\infty} x \right).$$

ainsi que les axiomes duaux,  $(\hat{V}.1)$  et  $(\hat{V}.2)$ , qu'on obtient en permutant  $\cup$  et  $\cap$ . — Tout treillis est un pseudo-treillis faiblement distributif. Le résultat essentiel est le suivant: un pseudo-treillis est un treillis si et seulement si chacun de ses éléments est d'ordre fini („potenzgebunden“) par rapport à  $\cup$  et si les axiomes  $(\check{V}.1)$  et  $(\check{V}.2)$  sont vérifiés. — L'A. montre qu'un pseudo-treillis fini ou infini peut vérifier  $(\check{V}.1)$  et  $(\hat{V}.2)$  sans vérifier ni  $(\hat{V}.1)$  ni  $(\check{V}.2)$ . Il remarque que les axiomes  $(\check{V}.1)$  et  $(\hat{V}.2)$  sont conséquence de l'axiome de  $\cup$ -distributivité

$$(VI.1) \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$$

mais que la réciproque est inexacte et que cet axiome n'implique pas non plus  $(\hat{V}.1)$  ni  $(\check{V}.2)$ , que ce soit dans le cas fini ou dans le cas infini. Finalement, il démontre que l'axiome  $(VI.1)$  entraîne  $\bigcap_n^{\infty} \bigcap_m^{\infty} \bigcap_p^{\infty} x = \bigcap_{m^n}^{\infty} \bigcap_{np}^{\infty} x$ . *R. Croisot.*

**Löwig, H. F. J.:** Bemerkung zu den Primquotienten eines distributiven Verbandes. *J. reine angew. Math.* **190**, 49—50 (1952).

In einem distributiven Verbande  $R$  heißt ein Paar  $a/b$  von Verbandselementen ein „Primquotient“, wenn  $b \subset a$ , ist und wenn es kein echt zwischen  $b$  und  $a$  gelegenes Verbandselement gibt. Die Gesamtheit  $P$  aller Elemente  $x$  aus  $R$  mit  $(b \cup x) \cap a = b$  bildet dann nach Birkhoff ein Primideal in  $R$ , d. h. ein solches Ideal  $P$ , bei dem die nicht in  $P$  gelegenen Verbandselemente ein duales Ideal bilden (dies. Zbl. **17**, 194). Verf. zeigt hier, daß zwei Primquotienten  $a/b$  und  $a'/b'$  genau dann dasselbe Primideal bestimmen, wenn sie „ähnlich“ sind im Sinne von Ore (dies. Zbl. **12**, 5). Die Ähnlichkeit der beiden Primquotienten kann nämlich wegen der Distributivität durch die Gleichungen  $(b \cup a') \cap a = a$  und  $(b \cup b') \cap a = b$  ausgedrückt werden, und diese besagen gerade, daß die durch  $a/b$  und  $a'/b'$  bestimmten Primideale  $P$  und  $P'$  gleich sind. *P. Roquette.*

**Aubert, Karl Egil:** Sur les fondements d'une théorie des demi-treillis additifs. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 30—32 (1952).

Ein Halbverband  $L$ , dessen assoziative, kommutative und idempotente Verknüpfung mit  $\cup$  bezeichnet wird, heißt ein additiver Halbverband (AHV), wenn er noch eine weitere, Subtraktion genannte Verknüpfung — besitzt, die mit  $\cup$  beiderseitig distributiv verbunden ist; außerdem wird für — die Existenz eines rechtsseitigen neutralen Elements 0 verlangt mit  $0 \subseteq a - a$  für alle solche  $a$ , welche nicht in sämtlichen Elementen von  $L$  enthalten sind. In einem AHV wird eine im allgemeinen weder kommutative noch assoziative „Addition“ + durch  $a + b = a - (-b)$  definiert. Verf. legt die Tragweite dieser und einiger weiterer Begriffsbildungen dar, indem er fünf Beispiele von AHV und sieben Sätze über AHV angibt; letztere stellen elementare Folgerungen aus den Axiomen eines AHV sowie aus gewissen zusätzlichen Annahmen dar. Die drei Beispiele, durch die Verf. hauptsächlich zur Aufstellung seines Axiomensystems angeregt wurde, sind die folgenden: 1. Die Boolesche Algebra aller Teilmengen einer Gruppe; 2. der Verband der Normalteiler

einer Gruppe; 3. der Halbverband aller nichtleeren Teilmengen einer Gruppe. Dabei wird die Gruppenverknüpfung additiv geschrieben und unter der Differenz  $A - B$  zweier Teilmengen die Menge aller Differenzen  $a - b$  mit  $a \in A$  und  $b \in B$  verstanden.  $A \cup B$  ist in den Beispielen gleich der Vereinigungsmenge, bzw. in 2. gleich der Vereinigungsgruppe von  $A$  und  $B$ .

*P. Roquette.*

Aubert, Karl Egil: *Éléments résiduels dans les demi-treillis additifs*. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 280—282 (1952).

Dies ist die Fortsetzung der vorstehend besprochenen Note des Verf. über additive Halbverbände. Dort wurde ein Element  $g$  eines additiven Halbverbandes  $L$  ein „ $\mathcal{G}$ -Element“ genannt, wenn  $0 \subseteq g$  und  $g - g \subseteq g$  ist. Hier werden nun „Restelemente“ modulo einem  $\mathcal{G}$ -Element  $g$  erklärt, das sind solche Elemente  $a$  aus  $L$ , für welche kein Element  $b \supseteq 0$  existiert mit  $g + b \subseteq g + a$ . Zwei Restelemente  $a$  und  $b$  heißen „kongruent“ modulo  $g$ , wenn  $g + a = g + b$  ist. (Die hier angeschriebene Kongruenz wird Rechtskongruenz genannt; symmetrisch dazu läßt sich auch eine Linkskongruenz modulo  $g$  erklären.) Aus diesen Definitionen werden einige Sätze gefolgert. — Verf. wurde zu diesen Definitionen durch die drei im obengenannten Referat angeführten Beispiele geführt; in diesen sind die  $\mathcal{G}$ -Elemente  $g$  gerade die Untergruppen, und die Restelemente modulo  $g$  gleich den (nichtleeren) Teilmengen der Restklassen modulo  $g$  im gruppentheoretischen Sinne.

*P. Roquette.*

Ellis, David: *On the metric characterization of metric lattices*. J. Indian math. Soc., n. Ser. **15**, 152—154 (1952).

Es wird bewiesen: Jeder (im Sinne von Fréchet) kompakte metrische Verband hat ein oberstes und ein unterstes Element und ist deshalb auch vollständig im Sinne der Verbandstheorie. In Verbindung mit Resultaten von V. Glivenko (dies. Zbl. **15**, 234) und von M. F. Smiley und W. R. Transue [Bull. Amer. math. Soc. **49**, 280—287 (1943)] folgt daraus: Ein Kompaktum ist dann und nur dann mit einem metrischen Verbannde kongruent, wenn es bezüglich eines seiner Elemente „fast geordnet“ ist.

*F. W. Levi.*

Hashimoto, Junji: *On a lattice with a valuation*. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 1—2 (1952).

The author settles G. Birkhoff's Problem 71 in Lattice Theory (rev. ed., 1948) by proving the following theorem: A lattice  $L$  is distributive if and only if for every  $x < y$  in  $L$  there exists a distributive valuation which is defined for all elements of  $L$  and is not constant on the closed interval  $[x, y]$ . [Recall that a distributive valuation is a real-valued function  $v(x)$  satisfying:  $2\{v(x \cup y \cup z) - v(x \cap y \cap z)\} = v(x \cup y) + v(y \cup z) + v(z \cup x) - v(x \cap y) - v(y \cap z) - v(z \cap x).$ ]

*L. Fuchs.*

Green, J. A.: *A duality in abstract algebra*. J. London math. Soc. **27**, 64—73 (1952).

Nach S. MacLane (dies. Zbl. **31**, 247) kann man die Begriffe des direkten und freien Produktes von Gruppen als zueinander dual auffassen. Im Sinne dieser Dualität wird nun hier zum Begriff des direkten Produktes algebraischer Strukturen (direct union of algebras im Sinne von G. Birkhoff, Lattice Theory, New York 1948) der Begriff der freien Vereinigung eingeführt: Ist jedem  $\omega$  einer nichtleeren Menge  $\Omega$  eine natürliche Zahl  $n_\omega$  zugeordnet, so entsteht aus einer nichtleeren Menge  $A$  eine  $\Omega$ -Struktur, wenn jedem  $\omega \in \Omega$  eine in  $A$  erklärte Funktion von  $n_\omega$  Argumenten mit Werten  $\in A$  zugeordnet wird; ist dann  $\mathfrak{B}$  eine Mannigfaltigkeit von  $\Omega$ -Strukturen, d. h. eine gegenüber der Bildung von Unterstrukturen, Restklassenstrukturen und direkten Produkten abgeschlossene Menge von  $\Omega$ -Strukturen, so heißt  $F \in \mathfrak{B}$  freie  $\mathfrak{B}$ -Vereinigung der  $A_\lambda$  ( $A_\lambda \in \mathfrak{B}$ ,  $\lambda \in A$ ), wenn es zu jedem  $\lambda \in A$  eine Unterstruktur  $F_\lambda$  von  $F$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:  $\bigcup_{\lambda \in A} F_\lambda$  erzeugt  $F$ ;  $F_\lambda$  ist isomorph zu  $A_\lambda$ ; wird jedem  $\lambda \in A$  ein Homomorphismus  $\theta_\lambda$  von  $F_\lambda$  in  $B \in \mathfrak{B}$  zugeordnet, so gibt es einen Homomorphismus von  $F$  in  $B$ , welcher alle  $\theta_\lambda$  fortsetzt. Falls vorhanden, ist die freie  $\mathfrak{B}$ -Vereinigung bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Ist  $I \subseteq \Omega$  und  $N$  eine  $I$ -Struktur, so wird  $F \in \mathfrak{B}$  als freie  $N$ -erzeugte



Struktur  $\in \mathfrak{B}$  (free  $\mathfrak{B}$  on  $N$  generators) bezeichnet, wenn  $F$  eine zu  $N$  isomorphe,  $F$  erzeugende  $I$ -Unterstruktur  $N_1$  enthält und jeder  $I$ -Homomorphismus von  $N_1$  in eine Struktur  $A \in \mathfrak{B}$  stets zu einem  $\Omega$ -Homomorphismus von  $F$  in  $A$  fortgesetzt werden kann.  $F$  ist, falls vorhanden, bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Als Gegenstück zu diesem Begriff wird  $U \in \mathfrak{B}$  als universelle  $N$ -analisierte Struktur  $\in \mathfrak{B}$  (universal  $\mathfrak{B}$  with  $N$ -analysis) bezeichnet, wenn  $U$  eine  $I$ -Kongruenz  $\mathfrak{n}$  besitzt, so daß  $U/\mathfrak{n}$  isomorph zu  $N$  ist, die Gleichheit die einzige in  $\mathfrak{n}$  enthaltene  $\Omega$ -Kongruenz von  $U$  ist und jeder  $I$ -Homomorphismus einer Struktur  $B \in \mathfrak{B}$  in  $U/\mathfrak{n}$  als Hintereinanderausführung eines  $\Omega$ -Homomorphismus von  $B$  in  $U$  und des natürlichen Homomorphismus von  $U$  auf  $U/\mathfrak{n}$  (bei dem also jedem Element seine Restklasse mod.  $\mathfrak{n}$  zugeordnet wird) aufgefaßt werden kann. Die Eindeutigkeit (bis auf Isomorphie) von  $U$  wird unter den folgenden Einschränkungen bewiesen: Für  $\omega \in \Sigma = \Omega - I$  ist  $n_\omega = 1$ , so daß man o. B. d. A.  $\Sigma$  als Halbgruppe mit neutralem Element und  $f(g(x)) = h(x)$  für die den Elementen  $\sigma, \tau, \sigma\tau$  zugeordneten Funktionen  $f, g, h$  einer Struktur  $\in \mathfrak{B}$  annehmen darf, und für jede Struktur  $\in \mathfrak{B}$  sind die den  $\omega \in \Sigma$  zugeordneten Funktionen sämtlich  $I$ -Endomorphismen. Ist  $\mathfrak{G}$  eine beliebige Mannigfaltigkeit von  $I$ -Strukturen,  $\Sigma$  eine beliebige zu  $I$  fremde Halbgruppe mit neutralem Element und  $\mathfrak{B}$  die Mannigfaltigkeit aller  $(\Sigma \cup I)$ -Strukturen, welche als  $I$ -Strukturen in  $\mathfrak{G}$  liegen und bez. denen  $\Sigma$  die eben genannten besonderen Eigenschaften besitzt, so erhält man bei beliebiger  $I$ -Struktur  $N \in \mathfrak{G}$ , in der  $\omega$  die Funktion  $g_\omega$  zugeordnet sei, eine universelle  $N$ -analisierte Struktur  $U \in \mathfrak{B}$  folgendermaßen: Man nimmt für  $U$  die Menge der Abbildungen  $u$  von  $\Sigma$  in  $N$  (wobei  $\sigma^u$  das Bild von  $\sigma$  bei  $u$  bezeichnet) und erklärt die  $\omega$  zugeordnete

Funktion  $f_\omega$  im Falle  $\omega \in I$  durch  $\sigma^{\overset{f_\omega}{u}(u_1, \dots, u_{n_\omega})} = g_\omega(\sigma^{u_1}, \dots, \sigma^{u_{n_\omega}})$  (für alle  $\sigma \in \Sigma$ ) und im Falle  $\omega \in \Sigma$  durch  $\sigma^{\overset{f_\omega}{u}(\omega)} = (\sigma \omega)^u$  (für alle  $\sigma \in \Sigma$ ). Dual hierzu wird eine Konstruktion für eine freie  $N$ -erzeugte Struktur  $\in \mathfrak{B}$  angegeben. Ohne Einschränkung hinsichtlich  $\Sigma$  und  $\mathfrak{B}$  wird in Dualisierung eines Satzes von P. Hall über freie  $N$ -erzeugte Strukturen ein Satz über die Herstellung einer universellen  $N$ -analysierten Struktur  $\in \mathfrak{B}_1$  aus einer universellen  $N$ -analysierten Struktur  $\in \mathfrak{B}$  bewiesen, wobei  $\mathfrak{B}_1$  eine gegenüber der Bildung freier  $\mathfrak{B}$ -Vereinigungen abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $\mathfrak{B}$  ist.

G. Pickert.

Goldie, A. W.: On direct decompositions. I, II. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 1—22, 23—34 (1952).

I.  $A$  sei eine algebraische Struktur, d. h. eine nichtleere Menge mit einer nichtleeren Menge  $\Omega$  von auf  $A$  erklärten Funktionen endlich vieler Argumente mit Funktionswerten in  $A$ . O. B. d. A. kann  $\Omega$  als abgeschlossen gegenüber funktionaler Zusammensetzung vorausgesetzt werden, so daß z. B. mit  $f$  und  $g$  auch die durch  $h(x, y, z) = f(x, g(y, z))$  erklärte Funktion  $h$  in  $\Omega$  liegt.  $A$  besitze ein Nullelement  $0$ , d. h.  $f(0, \dots, 0) = 0$  für alle  $f \in \Omega$ . Eine Unterstruktur von  $A$  ist eine gegenüber den  $f \in \Omega$  abgeschlossene,  $0$  enthaltende Teilmenge von  $A$ . Ein Endomorphismus  $\varrho$  von  $A$  ist eine Abbildung  $\varrho$  von  $A$  in sich mit  $0\varrho = 0$  und  $f(x_1\varrho, \dots, x_n\varrho) = f(x_1, \dots, x_n)\varrho$  für alle  $f \in \Omega$ . Eine Kongruenz  $\mathfrak{R}$  von  $A$  ist eine in  $A$  erklärte Äquivalenzrelation, für die aus  $x_i \mathfrak{R} y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stets  $f(x_1, \dots, x_n) \mathfrak{R} f(y_1, \dots, y_n)$  für alle  $f \in \Omega$  folgt; die  $0$  enthaltende  $\mathfrak{R}$ -Klasse  $[0]$  heißt der Kern von  $\mathfrak{R}$ , und der auf  $\{0\}$  abbildende Endomorphismus wird mit  $0$  bezeichnet.  $\cup$  und  $\cap$  bezeichnen Vereinigung und Durchschnitt im Verband der Kongruenzen von  $A$ , der vollständig ist und das Nullelement  $\mathfrak{D}$  (Gleichheitsrelation) sowie das Einselement  $\mathfrak{A}$  (erklärt durch:  $x \mathfrak{A} y$  für alle  $x, y \in A$ ) besitzt. — Isomorph zum Kardinalprodukt wird das (innere) direkte Produkt erklärt:  $A = B_1 \times \dots \times B_n$  bez.  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ , wenn  $A$  vom Endomorphismus  $\varrho_i$  auf die Unterstruktur  $B_i$  abgebildet wird,  $\varrho_i \varrho_k = 0$  für  $i \neq k$  sowie  $\varrho_i^2 = \varrho_i$  gilt und zu  $b_1, \dots, b_n \in A$  mit  $b_i \varrho_i = b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) stets genau ein  $a \in A$  mit  $a \varrho_i = b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) vorhanden ist.  $f \in \Omega$  heißt ein (eigentlicher) Träger dieser direkten Zerlegung, wenn  $a = f(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})$  für jede Permutation  $i_1, \dots, i_n$  gilt. Gibt es einen solchen Träger, so ist die direkte Zerlegung durch ihre Faktoren  $B_i$  bereits eindeutig bestimmt, was im allgemeinen nicht stimmt. Die Träger von direkten Zerlegungen sind genau die  $f \in \Omega$  mit  $x = f(x, 0, \dots, 0) = f(0, x, 0, \dots, 0) = \dots = f(0, \dots, 0, x)$ . Enthält  $\Omega$  ein solches  $f$ , so besitzt jede direkte Zerlegung einen Träger. — Eine Kongruenz  $\mathfrak{S}$  wird als das direkte Produkt  $\mathfrak{R}_1 \otimes \dots \otimes \mathfrak{R}_n$  der Kongruenzen  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n$  bezeichnet, wenn

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}_i \text{ und } \mathfrak{D} = \bigcup_{i \in M} \mathfrak{R}_i \cap \bigcup_{i \in M'} \mathfrak{R}_i$$

für jede Zerlegung von  $\{1, \dots, n\}$  in zueinander fremde Mengen  $M, M'$  gilt, und als ihr algebraisches direktes Produkt  $\mathfrak{R}_1 \times \dots \times \mathfrak{R}_n$ , wenn außerdem die  $\mathfrak{R}_i$  miteinander kommutieren, d. h. bei  $x \mathfrak{R}_i u \mathfrak{R}_k y$  stets ein  $v$  mit  $x \mathfrak{R}_i v \mathfrak{R}_k y$  vorhanden ist. Zwischen den direkten Zerlegungen  $A = B_1 \times \dots \times B_n$  bez.  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  und den  $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}_1 \times \dots \times \mathfrak{R}_n$  besteht eine eindeutige Zuordnung:  $0 \mathfrak{R}_i x \varrho_i \left( \bigcup_{k \neq i} \mathfrak{R}_k \right) x$ ;  $x \mathfrak{R}_i y$  genau dann, wenn  $x \varrho_k = y \varrho_k$  für alle  $k \neq i$ . — Ein Endomorphismus  $\varrho$  und eine Kongruenz  $\mathfrak{R}$  bestimmen eine Kongruenz  $\mathfrak{R}_\varrho$  mit:  $x \mathfrak{R}_\varrho y$  genau dann, wenn  $x \varrho \mathfrak{R} y \varrho$ .  $\mathfrak{R}^0$  sei der Durchschnitt aller  $\mathfrak{S}$  mit  $\mathfrak{S}_\varrho \supseteq \mathfrak{R}$ . Dann

heißt  $\varrho$  volldirekt, wenn  $(\mathfrak{R}^e \cup \mathfrak{S})_{\varrho} = \mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}_{\varrho}$ ,  $(\mathfrak{R}_{\varrho} \cup \mathfrak{S})^e = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}^e$  für alle Kongruenzen  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$  gilt, und normal, wenn außerdem stets  $[\mathfrak{R}^e] = [\mathfrak{R}]_{\varrho}$  gilt. Ein normaler Endomorphismus bildet also normale Unterstrukturen (d. h. Kerne von Kongruenzen) wieder auf normale Unterstrukturen ab. Im Falle einer Gruppe  $A$  ist diese Eigenschaft kennzeichnend für Normalität; es ist jedoch nicht jeder derartige Endomorphismus im Fittingschen Sinne normal, d. h. mit allen inneren Automorphismen vertauschbar. Der Durchschnitt der  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{R}^e$ ,  $\mathfrak{R}^{e^2}$ , ... wird mit  $\mathfrak{R}^{[e]}$  und die Vereinigung der  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{R}_{\varrho}$ ,  $\mathfrak{R}_{\varrho^2}$ , ... mit  $\mathfrak{R}_{[\varrho]}$  bezeichnet.  $\varrho$  heißt gebunden, wenn  $(\mathfrak{R}^{[e]})^e = \mathfrak{R}^{[e]}$ ,  $(\mathfrak{R}^{[e]})_{[\varrho]} = \mathfrak{R}$ ,  $(\mathfrak{R}_{[\varrho]})^{[e]} = \mathfrak{D}$  gilt. Bei volldirektem gebundenen  $\varrho$  gilt  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{[e]} \otimes \mathfrak{D}_{[\varrho]}$ . Ist der Verband der Kongruenzen modular, so folgt umgekehrt aus dieser Zerlegung die Gebundenheit des volldirekten  $\varrho$ . Es ergibt sich nun der Fittingsche Hilfssatz in der folgenden Form: Ist  $\varrho$  ein normaler gebundener Endomorphismus und kommutieren  $\mathfrak{R}^{[e]}$ ,  $\mathfrak{D}_{[\varrho]}$ , so gibt es eine direkte Zerlegung  $A = B \times C$  so, daß  $B$  von  $\varrho$  eineindeutig auf sich und  $C$  von einer gewissen Potenz  $\varrho^m$  auf  $\{0\}$  abgebildet wird. — Kommutiert bei einer Zerlegung  $A = B_1 \times \cdots \times B_n$  bez.  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$  jede Kongruenz  $\mathfrak{R}^{e_i}$  mit  $\mathfrak{D}_{\varrho_i}$ , so ist ihr die Zerlegung  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{e_1} \times \cdots \times \mathfrak{R}^{e_n}$  zugeordnet, und  $\mathfrak{R}^{e_i}$  ist der Durchschnitt aller  $\mathfrak{R}$  mit  $[\mathfrak{R}] \supseteq B_i$ . Die  $\varrho_i$  sind dann also bereits durch die  $B_i$  bestimmt. Setzt man für alle in direkten Zerlegungen vorkommenden  $\varrho$  das Kommutieren von  $\mathfrak{R}^e$  mit  $\mathfrak{D}_{\varrho}$  voraus, so besteht demnach eine eineindeutige Zuordnung zwischen den  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 \times \cdots \times \mathfrak{R}_n$ , den  $A = B_1 \times \cdots \times B_n$  und den dabei vorkommenden  $n$ -tupeln  $(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ . Bei dieser bleiben die Operationen der Verfeinerung und Zusammenziehung erhalten.

II. Die im I. Teil entwickelte Theorie wird hier auf den Fall angewandt, daß alle Kongruenzen von  $A$  kommutieren und daher der Verband der Kongruenzen modular ist. Für diese Bedingung wird am Schluß der Arbeit noch eine mögliche Abschwächung angegeben. Der Endomorphismus  $\varrho$  heißt unter  $\mathfrak{R}$  gebunden, wenn  $(\mathfrak{R}^{[e]})^e = \mathfrak{R}^{[e]}$ ,  $(\mathfrak{R}^{[e]})_{[\varrho]} \supseteq \mathfrak{R}$ ,  $(\mathfrak{D}_{[\varrho]} \cap \mathfrak{R})^{[e]} = \mathfrak{D}$  ist. Für zwei Zerlegungen von  $A$ , welche zu den Endomorphismenpaaren  $(\alpha, \beta)$ ,  $(\gamma, \delta)$  gehören, und eine Kongruenz  $\mathfrak{R}$  wird  $\mathfrak{R}^{\xi}$  als Vereinigung der  $\mathfrak{R}^{\xi}$  und  $\mathfrak{R}_{\pi}$  als Durchschnitt der  $\mathfrak{R}_{\xi}$  erklärt, wobei  $\xi$  die Produkte  $\alpha\gamma\beta$ ,  $\beta\gamma\alpha$ ,  $\alpha\delta\beta$ ,  $\beta\delta\alpha$ ,  $\gamma\alpha\delta$ ,  $\delta\alpha\gamma$ ,  $\gamma\beta\delta$ ,  $\delta\beta\gamma$  durchläuft und  $\pi$  als Abkürzung für das Quadrupel  $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$  steht. Der Durchschnitt der  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{R}^{\pi}$ ,  $\mathfrak{R}^{\pi\pi}$ , ... wird als  $\mathfrak{R}^{[\pi]}$  und die Vereinigung der  $\mathfrak{R}_{\pi} \cap \mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{D}_{\pi\pi} \cap \mathfrak{R}$ , ... als  $\mathfrak{D}_{[\pi]}^{\mathfrak{R}}$  bezeichnet.  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{[\pi]} \times \mathfrak{D}_{[\pi]}^{\mathfrak{R}}$  gilt genau dann, wenn  $\alpha\gamma\beta\gamma\alpha$  und  $\beta\gamma\alpha\gamma\beta$  unter  $\mathfrak{R}$  gebunden sind; in diesem Fall ist  $\mathfrak{R}^{[\pi]} = (\mathfrak{R}^{[\pi]})^{\varphi} \times (\mathfrak{R}^{[\pi]})^{\psi}$  für  $\varphi, \psi \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  und  $\varphi \neq \psi$ . — Die aus  $A = B_1 \times B_2 = C_1 \times C_2$  durch  $B_i = B_{i1} \times B_{i2}$ ,  $C_k = C_{k1} \times C_{k2}$  ( $i, k = 1, 2$ ) hervorgehenden Verfeinerungen heißen kanonisch, wenn  $B_{11} \times B_{22} = B_{22} \times C_{11} = C_{11} \times C_{22} = C_{22} \times B_{11}$ ,  $B_{12} \times B_{21} = B_{21} \times C_{21} = C_{21} \times C_{12} = C_{12} \times B_{12}$  gilt.  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{\alpha} \times \mathfrak{R}^{\beta} = \mathfrak{R}^{\gamma} \times \mathfrak{R}^{\delta}$  besitzen kanonische Verfeinerungen, falls  $\mathfrak{R}^{\pi} = \mathfrak{R}^{\pi\alpha} \times \mathfrak{R}^{\pi\beta} = \mathfrak{R}^{\pi\gamma} \times \mathfrak{R}^{\pi\delta}$  solche besitzen. — Als direkte Zentrumskongruenz von  $A$  wird der Durchschnitt  $\mathfrak{Z}$  aller  $\mathfrak{R}$  bezeichnet, welche die Bedingungen erfüllen:  $\mathfrak{R} \supset \mathfrak{R}^e$  für alle bei direkten Zerlegungen von  $A$  vorkommenden Endomorphismen  $\varrho$ ;  $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{R}^{\pi}$  für alle  $\pi = (\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ . Es wird jetzt die  $O$ - und die  $U$ -Kettenbedingung für die Kongruenzen  $\subseteq \mathfrak{Z}$  vorausgesetzt. Zwei Zerlegungen  $B = B_1 \times B_2 = C_1 \times C_2$  eines Faktors  $B$  von  $A$  haben dann stets kanonische Verfeinerungen, und es gilt weiter der allgemeine Verfeinerungssatz: Die Zerlegungen  $A = B_1 \times \cdots \times B_m = C_1 \times \cdots \times C_n$  lassen sich durch  $B_i = B_{i1} \times \cdots \times B_{in}$ ,  $C_k = C_{k1} \times \cdots \times C_{mk}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $k = 1, \dots, n$ ) so verfeinern, daß  $D_{ik}$  mit  $A = B_{ik} \times D_{ik} = C_{ik} \times D_{ik}$  vorhanden sind. G. Pickert.

Goldie, A. W.: The scope of the Jordan-Hölder theorem in abstract algebra. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 349—368 (1952).

Es werden nur solche Unteralgebren einer (abstrakten) Algebra  $A$  betrachtet, welche eine festgewählte Unter algebra  $A_0$  enthalten und nur solche Kongruenzrelationen (= verträgliche, symmetrische, transitive Relationen)  $\mathfrak{R}$  mit  $D(\mathfrak{R}) \supseteq A_0$  (zu den Bezeichnungen und Begriffen s. dies. Zbl. 38, 170—171). Unter einer oberen Kongruenzrelation  $\mathfrak{R}$  wird eine solche verstanden, für die aus  $D(\mathfrak{R}) = D(\mathfrak{S})$  und  $\{\mathfrak{R}\} = \{\mathfrak{S}\}$  stets  $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{S}$  folgt. Eine obere Kongruenzrelation heißt maximal, wenn es nur eine obere Kongruenzrelation  $\mathfrak{S}$  mit  $D(\mathfrak{S}) = D(\mathfrak{R})$  und  $\mathfrak{S} \supset \mathfrak{R}$  gibt, nämlich die mit  $\{\mathfrak{S}\} = D(\mathfrak{S})$ . Die Folge  $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_{n+1}$  von maximalen oberen Kongruenzrelationen  $\mathfrak{R}_i$  mit  $\{\mathfrak{R}_1\} = D(\mathfrak{R}_1) = A_1$ ,  $\mathfrak{R}_{n+1} = A_0$ ,  $D(\mathfrak{R}_{i+1}) = \{\mathfrak{R}_i\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) heißt Maximalreihe für die Unter algebra  $A_1$ . Die Maximalreihen



$\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_{n+1}$  und  $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_{m+1}$  werden äquivalent genannt, wenn  $n = m$  und  $\{\mathfrak{R}_i\}/\mathfrak{R}_{i+1}$  isomorph zu  $\{\mathfrak{S}_i\}/\mathfrak{S}_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) ist. Unter der Voraussetzung der  $O$ - und  $U$ -Kettenbedingung für die Unteralgebren von  $A$  gilt nun die Aussage des Jordan-Hölderschen Satzes, daß nämlich Maximalreihen einer Unteralgebra von  $A$  stets äquivalent sind, genau dann, wenn für jede Unteralgebra von  $A$  die Glieder jeder Maximalreihe mit denen jeder anderen schwach vertauschbar sind. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, daß je zwei Maximalreihen jeder Unteralgebra Zassenhaus-Verfeinerungen besitzen. *G. Pickert.*

**Bourne, Samuel:** On the homomorphism theorem for semirings. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 118—119 (1952).

In Verbesserung eines Satzes aus einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 42, 32) wird bewiesen: Ist der Semiring  $S$  homomorph auf den Semiring  $S'$  abgebildet, so ist die dadurch hervorgerufene Abbildung der Restklassen nach dem Kern  $I$  dieses Homomorphismus ein Homomorphismus des Restklassenringes von  $S$  nach  $I$  auf  $S'$ , dessen Kern nur aus dem Nullelement besteht. *G. Pickert.*

**Kalicki, J.:** On comparison of finite algebras. Proc. Amer. math. Soc. 3, 36—40 (1952).

Es wird ein Verfahren angegeben, um für die Mengen  $L', L''$  der in zwei Algebren (im Sinne von G. Birkhoff, dies. Zbl. 13, 1—2) endlicher Elementezahl geltenden Gesetze (= allgemeingültige Gleichungen) festzustellen, welche der Beziehungen  $L' = L'', L' \neq L'', L' \subseteq L'', L'' \subseteq L'$  bestehen. *G. Pickert.*

**Herz, Jean-Claude:** Sur les idéaux semi-premiers ou parfaits. Étude des propriétés latticielles des idéaux semi-premiers. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1515—1517 (1952).

Ein Ideal  $\mathfrak{F}$  in einem kommutativen Ring  $\mathfrak{A}$  heißt bekanntlich halbprim (oder nach dem Wortgebrauch der Theorie der Differentialideale: perfekt), wenn es mit seinem Radikal zusammenfällt, d. h. aus  $a^p \in \mathfrak{F}$  mit irgendeiner natürlichen Zahl  $p$   $a \in \mathfrak{F}$  folgt. Verf. beweist, daß  $\mathfrak{F}$  schon dann halbprim ist, wenn dasselbe für  $p = 2$  gilt. Ein vom Ref. herrührendes Resultat (dies. Zbl. 40, 301), nach welchem  $\mathfrak{F}$  genau dann halbprim ist, wenn  $\mathfrak{F}$  mit dem Produkt von zwei Idealen auch deren Durchschnitt enthält, wird hier ganz elementar bewiesen. Der zweite Teil der Arbeit ist der Strukturfrage der Menge aller halbprimen Ideale von  $\mathfrak{A}$  gewidmet. Zahlreiche Beziehungen werden für halbprime Ideale bewiesen. Es sei noch das Resultat erwähnt, daß die halbprimen Ideale bezüglich des Enthaltenseins einen distributiven Verband bilden. *L. Fuchs.*

**Amitsur, A. S.:** An embedding of PI-rings. Proc. Amer. math. Soc. 3, 3—9 (1952).

Verf. betrachtet Ringe, die einer Polynomidentität genügen (PI-Ringe) und zeigt, daß jeder PI-Ring, der keine nilpotenten Ideale besitzt, isomorph einer direkten Summe von einfachen zentralen Algebren ist. Jeder PI-Ring ohne nilpotente Ideale kann als Unterring eines Matrizenrings über einem kommutativen Körper dargestellt werden. *G. Reichel.*

**Falk, Gottfried:** Konstanzelemente in Ringen mit Differentiation. Math. Ann. 124, 182—186 (1952).

Soit  $F$  l'algèbre des polynômes non commutatifs à  $n$  indéterminées sur le corps des nombres réels  $K$  (c'est-à-dire l'algèbre tensorielle d'un espace de dimension  $n$  sur  $K$ ; les résultats de l'A. sont valables lorsque  $K$  est un corps quelconque de caractéristique 0). L'A. considère la sous-algèbre  $C$  de  $F$  engendré par les commutateurs successifs des indéterminées  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), c'est-à-dire les commutateurs d'ordre 2 ( $x_i, x_j$ ) =  $x_i x_j - x_j x_i$  et les commutateurs d'ordre  $d$  définis par récurrence par  $\lambda_{d+1} = (x_i, \lambda_d)$  où  $\lambda_d$  est un commutateur d'ordre  $d$  et  $1 \leq i \leq n$ . Il considère d'autre part les  $n$  dérivations  $D_i$  de  $F$  telles que  $D_i x_k = \delta_{ik}$ , et montre

que la sous-algèbre des constantes de  $F$ , c'est-à-dire la sous-algèbre des éléments annulés par toutes les dérivations  $D_i$ , est identique à la sous-algèbre  $C$ .

J. Dieudonné.

**Nakayama, Tadas:** Derivation and cohomology in simple and other rings. I. Duke math. J. 19, 51—63 (1952).

Es wird die von G. Hochschild [Amer. J. Math. 64, 677—694 (1942), Ann. of Math., II. Ser. 46, 58—67 (1945); 47, 568—579 (1946); dies. Zbl. 29, 342] für Algebren  $A$  über Körpern  $C$  entwickelte (für das Folgende als bekannt vorausgesetzte) Kohomologietheorie auf Ringe  $A$  über schwach normalen Unterringen  $C$  verallgemeinert.  $C$  heißt schwach normaler (weak normal) Unterring von  $A$ , wenn für das bezüglich  $C$  gebildete Tensorprodukt  $A \times A$  gilt:  $A \times A = u_1 A \oplus \dots \oplus u_n A$  mit  $A$ - (etwa rechts-) unabhängigen  $u_i$ , für die Automorphismen  $\theta_i$  von  $A$  existieren, so daß  $a u_i = u_i a^{\theta_i}$ ,  $a \in A$ , ist. Grundlegend wird dabei der folgende, vom Verfasser in einer demnächst erscheinenden Arbeit bewiesene Satz verwendet: Sind  $A$  und  $C$  einfach,  $C$  schwach normaler Unterring von  $A$  und gilt für  $A$  und  $C$  die Minimalbedingung, so ist  $A$  als  $A_L C_R$ -Modul (additive Gruppe von  $A$ , in der die Links-multiplikationen mit  $A$  und die Rechtsmultiplikationen mit  $C$  als Operatoren definiert sind) vollreduzibel und direkte Summe von kleinsten  $A_L C_R$ -Moduln, die untereinander  $A_L$ -semilinear,  $C_R$ -linear isomorph sind. — Das Ergebnis ist eine Reihe von Sätzen über verschwindende Kohomologiegruppen wie etwa der folgende: Sind  $A, B, C$  einfache Ringe mit Minimalbedingung,  $A \supset B \supset C$ ,  $C$  schwach normal in  $A$ , so kann jede Derivation bezüglich  $C$  von  $A$  in  $B$ , die  $C$  nach 0 abbildet, zu einer inneren Derivation von  $A$  verlängert werden (Fortsetzbarkeit von Derivationen zu inneren Derivationen = Verschwinden von 1-Kohomologiegruppen).

W. Gaschütz.

**Sanov, I. N.:** Aufstellung des Zusammenhanges zwischen periodischen Gruppen mit Primzahlperiode und Lieschen Ringen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 23—58 (1952) [Russisch].

Die Arbeit beginnt mit einer zweckentsprechenden Zusammenstellung (auf 10 Seiten) von Resultaten von Hausdorff [Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 58, 19 (1906)], Magnus (dies. Zbl. 11, 152; 16, 294 u. 25, 242), Witt (dies. Zbl. 16, 244) und Dynkin (dies. Zbl. 29, 245 u. 41, 161). Dabei handelt es sich im wesentlichen um folgendes: Darstellung eines freien Lieschen Rings in einem assoziativen Ring, mit der Lieschen Multiplikation  $a \circ b = ab - ba$ ; die Wittsche Rangformel; die Hausdorffsche Exponentialformel; die Magnussschen Sätze: Sind  $x_1, \dots, x_n$  die freien Erzeugenden eines freien Lieschen Ringes, so sind  $g_v = e^{x_v}$  die freien Erzeugenden einer freien Gruppe  $\mathcal{G}$ . Sei  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_2 \supset \dots$  die absteigende Zentralreihe von  $\mathcal{G}$ ; sei  $g^{(m)} = e^{l_m + l_{m+1} + \dots}$  ( $m \geq 1$ ) ein von 1 verschiedenes Element von  $\mathcal{G}$ , wobei  $l_i$  ein homogenes Polynom vom Grade  $i$  in den  $x_v$  mit rationalen Koeffizienten ist. Dann hat  $l_m$  ganzzahlige Koeffizienten und  $g^{(m)} \in \mathcal{G}_m$ , aber  $g^{(m)} \notin \mathcal{G}_{m+1}$ . Sei  $L_m$  der Modul aller Lieschen Polynome vom Grade  $m$  in den  $x_v$  mit ganzen Koeffizienten. Für jedes  $g^{(m)} \in \mathcal{G}_m$ , das in der obigen Form darstellbar ist, ist dann  $l_m \in L_m$ . Die Zuordnung  $g^{(i)} \mapsto l_i$  stellt einen Homomorphismus dar, dessen Kern  $\mathcal{G}_{i+1}$  ist, so daß  $\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1} = L_i$ . Der Rang von  $L_i$  ist durch das Wittsche  $\psi_i(n)$  gegeben. Die Summe  $\mathcal{Q} = L_1 + L_2 + \dots$  ist ein Liescher Ring. Sodann sei  $F$  eine unfreie Gruppe mit den Erzeugenden  $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ ; es ist  $F \cdot \mathcal{G}/\mathcal{R}$ , wenn  $\mathcal{R}$  der Normalteiler bestehend aus allen Worten  $w(g_1, \dots, g_n)$  ist, für die  $w(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n) = 1$ . Es gilt  $F_i/F_{i+1} \cong \mathcal{G}_i/\mathcal{G}_{i+1}$  ( $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{R}$ )  $\cong L_i - A_i$ , wo  $A_i$  der Untermodul aller Lieschen Polynome mit ganzen Koeffizienten ist, die als Anfangsglieder  $i$ -ten Grades im Exponenten bei der Exponentialdarstellung der Elemente von  $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{R}$  auftreten. Setzt man dann  $A = A_1 + A_2 + \dots$  (direkt), so ist  $A$  ein Ideal in  $\mathcal{Q}$  und der „Gruppe  $F$  zugeordnete“ Liesche Ring  $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}/A$  definiert  $F$  eindeutig, unabhängig von der Darstellung von  $F$  als Faktorengruppe der freien Gruppe. Definiert man ferner  $\mathcal{Q}^m = L_m + L_{m+1} + \dots$ , und  $\mathcal{Q}_1^m$  durch den Isomorphismus  $\mathcal{Q}/\mathcal{Q}^m \cong \mathcal{Q}_1/\mathcal{Q}_1^m$ , so gilt auch  $F_i/F_{i+1} \cong \mathcal{Q}_1^i/\mathcal{Q}_1^{i+1}$ . Ist endlich  $F_\infty$  der Durchschnitt aller  $F_i$ , so haben  $\mathcal{Q}_1$  und  $F/F_\infty$  gleiche Mächtigkeit (bzw. Ordnung). Die additive Gruppe des Lieschen Rings  $\mathcal{Q}_1$  erscheint als direkte Summe  $(L_1 - A_1) + (L_2 - A_2) + \dots$ . Ist  $F$  endlich, so sind nur endlich viele dieser Summanden von 0 verschieden, so daß von einem gewissen  $m_0$  an  $A_\mu = L_\mu$  ( $\mu \geq m_0$ ) und daher  $\mathcal{Q}^{m_0} = 0$ , was bedeutet, daß hier  $\mathcal{Q}_1$  nilpotent ist. Für endliche nilpotente Gruppen  $F$  ist  $F_\infty = 1$



und somit  $\mathfrak{L}_1$  und  $F$  von gleicher Ordnung. Wenn  $\mathfrak{L}_1$  unendlich ist, so kann man gleiches für  $F$  vermuten. — Verf. konzentriert sich nun auf periodische Gruppen  $F$ ; die Periode ist die kleinste natürliche Zahl  $q$  derart, daß  $f^q = 1$  für alle  $f \in F$ . Jede Gruppe  $F$  ist homomorphes Bild der maximalen periodischen Gruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}(q)$  wobei  $\mathfrak{G}(q)$  der von den  $q$ -ten Potenzen aller Elemente von  $\mathfrak{G}$  erzeugte Normalteiler ist; d. h.  $F \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ , wo  $\mathfrak{G}(q) \subseteq \mathfrak{N}$ . Im Mittelpunkt des Interesses steht dann die „abgeschwächte Burnside'sche Vermutung“: Jede maximale nilpotente periodische Gruppe mit Primzahlpotenzperiode  $q : p^a$  und endlich vielen Erzeugenden ist endlich. Hieraus folgt noch nicht die ursprüngliche Burnside'sche Vermutung. Das Folgende bringt einen Beitrag zur Struktur von  $\mathfrak{L}$  im Falle  $a = 1$ . — § 2. Verf. zeigt zunächst, daß, wenn  $q$  die Periode von  $F$  ist,  $q L_i \subseteq A_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Da somit  $q L_i$  als Untermodul von  $A_i$  erscheint, so folgt  $F_i/F_{i+1} \cong L_i - A_i \cong (L_i - q L_i) - (A_i - q L_i)$ , so daß man hier  $L_i$  und  $A_i$  über dem Ring der Restklassen (mod  $q$ ) darstellen kann, der im Falle  $q = p$  der Restklassenkörper  $GF(p)$  wird. Sodann wird bewiesen, daß in diesem Falle sogar

$$(*) \quad p L_i = A_i \quad (i = 1, \dots, p-1).$$

Zu diesem Zweck werden in der Hausdorffschen Formel für  $z(e^z = e^x e^y)$  die Glieder nach homogenen Polynomen geordnet, wobei sich auf Grund einer zahlentheoretischen Eigenschaft (Staudt-Clausen'scher Satz) der Bernoullischen Zahlen herausstellt, daß die Nenner der Koeffizienten der ersten  $p-1$  Terme (vom Grade 1 bis  $p-1$ ) nicht durch  $p$  teilbar sind, während die der nächsten  $p-1$  Terme die Primzahl  $p$  in erster Potenz enthalten. Ist ferner  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_3}$ , wo  $z_1$  und  $z_2$  in ihrer Entwicklung nach homogenen Polynomen in  $x_1, \dots, x_n$  eben diese  $p$ -Eigenschaft haben, so gilt gleiches für  $z_3$ . Wiederholte Anwendung dieses Resultats gibt für den Exponenten der Darstellung  $e^z$  des allgemeinen Elementes der von den  $g_j = e^{x_j}$  erzeugten Gruppe  $\mathfrak{G}$  eben diese  $p$ -Eigenschaft. Insbesondere folgt, daß man für jedes Element  $e^z$ , das  $p$ -te Potenz eines beliebigen Elementes in  $\mathfrak{G}$  ist, den Exponenten in der Form  $z = P_1 + \dots + P_{2p-2}$  darstellen kann, wobei in  $P_1, \dots, P_{p-1}$  alle Koeffizienten  $\equiv 0 \pmod{p}$  sind, während  $P_p, \dots, P_{2p-2}$  rationale Koeffizienten mit durch  $p$  nicht teilbaren Nennern haben. Eine solche Darstellung ergibt sich dann auch für alle Elemente von  $\mathfrak{G}(p)$ . Zugleich zeigt sich, daß die Termsysteme,  $(P_p, \dots, P_{2p-2})$  einen Modul mit  $GF(p)$  als Operatorbereich bilden. — Ferner wird festgestellt, daß für  $i \geq p$  die Gleichheit (\*) nicht mehr zutrifft, daß vielmehr zunächst  $A_p$  außer  $p L_p$  noch Elemente der Form  $[x y^{p-1}] = (\dots ((x \circ y) \circ y) \dots) \circ y$  enthält, wobei  $x, y$  irgend zwei der Erzeugenden  $x_i$  sind. Hieraus folgt ein von Zassenhaus (dies. Zbl. 21, 200) auf andere Weise bewiesenes Resultat betr. das Enthaltensein der entsprechenden Kommutatoren der zugeordneten Gruppenelemente in  $\mathfrak{G}_p$ . Der hier gegebene Beweis fußt auf der Bemerkung, daß die Untergruppe  $\mathfrak{G}(p)$  „völlig charakteristisch“ ist, d. h. in sich oder einen ihrer Teile übergeht bei jedem Homomorphismus von  $\mathfrak{G}$  auf eine ihrer homomorphen Untergruppen (Endomorphismus). Unter Benützung der oben hergeleiteten Darstellung der Elemente in  $\mathfrak{G}(p)$  bildet Verf. das Gruppenelement  $f_1(x, y) = (e^x e^y)^p e^{-px} e^{-py} \in \mathfrak{G}(p)$ , dessen Exponent frei von linearen Termen ist; sodann unter Verwendung des Endomorphismus  $x \rightarrow g x, y \rightarrow g y$ , wo  $g$  eine primitive  $p$ -te Kongruenzwurzel ist,  $f_2(x, y) = f_1(g x, g y) f_1(x, y)^{-g^2}$ , wodurch außer den linearen auch die quadratischen Terme im Exponenten entfernt werden, u. s. f. bis

$$f_{p-1}(x, y) = f_{p-2}(g x, g y) f_{p-2}(x, y)^{-g^{p-1}} = e^{P_p \dots P_{2p-2}} \in \mathfrak{G}(p),$$

wo  $P_p = P_p(x, y)$  ein homogenes Polynom  $p$ -ten Grades in  $x, y$  mit rationalen Koeffizienten mit zu  $p$  teilerfremden Nennern ist. Hier wird nun der Term abgesondert, der  $x$  in erster,  $y$  in  $(p-1)$ -ter Potenz enthält, also abgesehen von einem Zahlfaktor:  $[x y^{p-1}]$ . Durch eine neue Iteration mit einem Endomorphismus  $x \rightarrow x, y \rightarrow g y$  kann man sich schrittweise von den andern Termen des Grades  $p$  in  $P_p$  befreien und so einsehen, daß  $[x y^{p-1}]$  in  $A_p$  enthalten ist, aber nicht in  $p L_p$ . Für die höheren  $A_i$  wird Entsprechendes gezeigt durch ein Verfahren, das verallgemeinerte Hausdorffsche nichtkommutative Differentionsoperatoren in Anwendung bringt, aber (schon wegen der komplizierten Bezeichnungen) nicht im einzelnen genau beschrieben werden kann. Die Definition des gebrauchten Operators sei durch das Beispiel

$$D \begin{matrix} 2x_1 \rightarrow P \\ x_2 \rightarrow Q \end{matrix} x_1^2 x_2 = P^2 Q x_1^2 x_2 + P^2 x_2 Q x_1 + P x_1 Q x_2 P + P x_1 x_2 Q P + x_1 P Q x_2 P + x_1 P x_2 Q P$$

erläutert. Sodann wird das von allen Elementen der Gestalt  $D \begin{matrix} x \rightarrow P \\ k_0 y \rightarrow P_0 \end{matrix} [x y^{p-1}]$ , ( $0 = 1, \dots, r$ ;

$k_1 + \dots + k_r = p-1$ ,  $P, P_1, \dots, P_r$  beliebige Elemente in  $\mathfrak{L}$ ) erzeugte Ideal  $J$  in  $\mathfrak{L}$  eingeführt. Von diesem wird dann gezeigt, daß für irgendeine jener Differentiationen  $D$  gilt  $DJ \subseteq J$  und  $J \subseteq A$ . Verf. vermutet  $A = J$ , hat aber bisher nur bewiesen, daß  $A_p + \dots + A_{2p-2} \subseteq J$ , was er als sein Hauptresultat ansieht und womit er über die letzte Abhandlung von Magnus (dies. Zbl. 37, 304) hinausgekommen ist, die er erst nach Fertigstellung der eigenen Arbeit gesehen hat. — § 3 diskutiert als Beispiele die Gruppen  $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}(5)$  und  $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}(3)$ . Im ersten Fall werden die Indizes der absteigenden Zentralreihe im Falle von zwei Erzeugenden berechnet. So ergibt sich die Ordnung von  $F/F_9$  zu  $5^{21}$ . Im zweiten Fall ergibt sich für  $k$  Erzeugende die Ordnung von  $F$

zu  $3^{\frac{1}{2}(k^2 + 5k)}$ . — Die Arbeit schließt mit einem Hinweis auf das in bezug auf die abgeschwächte Burnsidische Vermutung Erreichte; diese läuft darauf hinaus, daß  $\mathfrak{L}/A$  nilpotent ist, so daß sie, abgesehen von der obigen Vermutung ( $A = J$ ), zu zeigen verlangt, daß  $\mathfrak{L}/J$  nilpotent ist.

H. Schwerdtfeger.

**Jacobson, Nathan:** Une généralisation du théorème d'Engel. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 579—581 (1952).

Let  $U$  be an associative ring with a domain  $\Phi$  of operators which commute with each other. The author calls a sub-set  $A$  of  $U$  weakly closed (faiblement fermé) if for each pair  $a, b \in A$  there exists an element  $\gamma(a, b) \in \Phi$  such that  $ab + \gamma(a, b)ba \in A$ . He then proves: If  $U$  is a  $\Phi$ -ring satisfying the minimal condition for right  $\Phi$ -ideals, if  $A$  is a weakly closed sub-set of  $U$ , and if all the elements of  $A$  are nilpotent then the  $\Phi$ -associative sub-ring generated by  $A$  is nilpotent. — This contains Engel's theorem on Lie algebras of linear transformations and its analogue, due to Albert. for Jordan algebras.

J. C. Shepherdson.

**Jacobson, N.:** A note on Lie algebras of characteristic  $p$ . Amer. J. Math. **74**, 357—359 (1952).

$L$  sei ein beliebiger Liescher Ring von endlicher Dimension über einem Körper der Charakteristik  $p$  und  $A$  die assoziative Hülle von  $L$ . Für die folgenden Tatsachen werden kurze Beweise gegeben: 1.  $L$  hat eine treue endlich-dimensionale Darstellung (Satz von Iwasawa), 2. es gibt eine nicht vollreduzible Darstellung von  $L$  (von Chevalley vermutet), 3.  $A$  kann in einen Schiefkörper eingebettet werden.

E. Witt.

**Lazard, Michel:** Sur les algèbres enveloppantes universelles de certaines algèbres de Lie. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 788—791 (1952).

Nach Birkhoff und Ref. hat jeder Liesche Ring (über einem Körper  $A$ ) eine treue assoziative Darstellung (dies. Zbl. **16**, 244). Kuročkin (dies. Zbl. **42**, 32) stellte den analogen Satz auf für einen Lieschen Ring über einem kommutativen Hauptidealring  $A$ . Verf. erscheint dieser Beweis nicht strenge zu sein, und so gibt er hier einen Beweis, der sogar einen beliebigen kommutativen Koeffizientenring  $A$  zugrunde legt. Bemerkung des Ref.: Es genügt wegen der Homogenität von  $xy - yx - [x, y]$  für  $A$  den Ring der ganzen Zahlen zu nehmen. In dieser Form hat Ref. den Satz bereits 1939 bewiesen und 1950 im Instituto Jorge Juan (Madrid) vorgetragen, sogar mit intuitionistischem Beweis.

E. Witt.

**Lister, William G.:** A structure theory of Lie triple systems. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 217—242 (1952).

Die Definition Liescher Tripelsysteme entnehme man dem Referat über die Arbeit von N. Jacobson in dies. Zbl. **44**, 25, ebenso ihre Bedeutung für die Erforschung Jordanscher Ringe. — Während man bisher die klassischen Sätze von Wedderburn über assoziative Algebren fast gleichlautend auf Liesche (und Jordansche) Algebren übertragen konnte, bemüht sich Verf. um die weitere Übertragung auf Liesche Tripelsysteme, die er als selbständige mathematische Gebilde betrachtet. So führt er in zweckmäßiger Weise die Begriffe Untersystem, Ideal, Zentralisator, Radikal, Halbeinfachheit, Auflösbarkeit ein, und beweist dann wieder das Fortbestehen der klassischen Sätze einschließlich der Levischen Zerlegung. Auch eine Darstellungstheorie wird entwickelt. Die Arbeit schließt mit einer Skizze, wie man über einem algebraisch abgeschlossenem Koeffizientenkörper der Char. 0 sämtliche einfachen Lieschen Tripelsysteme ermitteln kann.

E. Witt.

**Brandt, H.:** Über das Rechnen mit bilinearen Substitutionen. J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **55**, 53—67 (1952).

Die Koeffizienten einer bilinearen Substitution  $x_i = w_{ijk} y_j z_k$  bilden eine kubische Matrix  $W$ , die sich schwer im Satzbild darstellen läßt. Verf. bezeichnet das Resultat von drei Substitutionen  $R, S, T$  auf die Variablenreihen  $x, y, z$  so, daß er  $R^{-1}$  vor  $W$  setzt,  $S$  rechts oben von  $W$  und mit diesem durch einen schrägen Strich verbunden, ebenso  $T$  rechts unten von  $W$ . Diese Darstellung ist für den Leser übersichtlich, und sie gestattet vor allem, das Assoziativgesetz



der Algebren überraschend einfach darzustellen. Die Frobeniusschen Formeln, welche die antistrophe und parastrophe Matrix mit der ursprünglichen verbinden, werden einfach hergeleitet, auch die damit zusammenhängende Komposition ergibt sich leicht. Ferner läßt sich der Wert der Diskriminante einer Algebra einfach berechnen, und die Multiplikationszahlen  $w_{ijk}$  ergeben sich durch eine elegante Formel aus den Matrizen der Darstellung der Algebra. Zum Schluß geht Verf. auf den quaternären Fall näher ein. Man kann aus der Matrix  $M$  durch zyklische Vertauschung der Indizes zwei weitere „transponierte“ Matrizen herstellen, ferner geben die Auflösungen der Gleichungen nach  $y$  und  $z$  in diesem Fall zwei weitere Matrizen, die koordiniert genannt werden. Iteriert man diese beiden Erzeugungsprinzipien, so erhält man 12 Matrizen, und es ist eine der schönsten Entdeckungen Brandts, daß man sie den 12 Winkeln in den Seitenflächen eines Tetraeders so zuordnen kann, daß koordinierte an derselben Ecke, transponierte an derselben Fläche anliegen.

A. Speiser.

**Osima, Masaru:** A note on symmetric algebras. Proc. Japan Acad. 28, 1—4 (1952).

Nouvelle démonstration d'un théorème de C. Nesbitt et W. M. Scott [Ann. of Math., II. Ser. 44, 534—553 (1943)] selon lequel pour qu'une algèbre  $A$  sur un corps algébriquement fermé soit symétrique il faut et il suffit que son algèbre de base (basic algebra) soit aussi symétrique. Comme corollaire l'A. prouve que toute algèbre absolument „uni-serial“ est symétrique. — Une algèbre est dite „uni-serial“ quand tous ses idéaux à droite et à gauche sont des idéaux principaux. Elle est absolument „uni-serial“ quand toute extension scalaire est „uni-serial“.

G. Ancochea.

**Goldhaber, J. K.:** The homomorphic mapping of certain matrix algebras onto rings of diagonal matrices. Canadian J. Math. 4, 31—42 (1952).

Verf. leistet einen Beitrag zu der Frage, unter welchen Bedingungen die Eigenwerte  $\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{kj}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) einer Menge von Matrizen  $A_1, \dots, A_k$  die Eigenschaft haben, daß bei geeigneter Anordnung der  $\lambda_{\mu r}$  jedes Matrixpolynom  $f(A_1, \dots, A_k)$  die Eigenwerte  $f(\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{kj})$  hat. McCoy (dies. Zbl. 15, 55) gab die notwendige und hinreichende Bedingung, daß die Matrizen  $A_r A_s - A_s A_r$  ( $r, s = 1, \dots, k$ ) zum Radikal der durch  $A_1, \dots, A_k$  erzeugten Algebra gehören. Verf. gibt einen kürzeren Beweis für dieses Ergebnis und beweist weiterhin den folgenden Satz: Ist  $\mathfrak{A}$  eine Matrixalgebra, in der jede Summe zweier Matrizen als Eigenwerte die Summe der Eigenwerte der Summanden hat, dann hat jede endliche Menge von Matrizen aus  $\mathfrak{A}$  die oben genannte Eigenschaft. Zum Beweis wird der folgende Abbildungssatz benötigt. Seien  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $F$ , sei ferner  $\Phi$  eine Abbildung von  $\mathfrak{A}$  auf  $\mathfrak{B}$ , welche 1. das Einselement von  $\mathfrak{A}$  (falls vorhanden) auf das Einselement von  $\mathfrak{B}$  abbildet, 2. linear ist und 3. Nullteiler in Nullteiler überführt. Ist  $\mathfrak{N}^*$  das Radikal von  $\mathfrak{B}$ , dann gilt mit  $A, A' \in \mathfrak{A}$   $\Phi(A \cdot A') = \Phi(A) \Phi(A') \bmod \mathfrak{N}^*$ .

G. Reichel.

**Schafer, R. D.:** Representations of alternative algebras. Trans. Amer. math. Soc. 72, 1—17 (1952).

Let  $\mathfrak{A}$  be a non-associative algebra over a field  $F$  such that  $\mathfrak{A}$  is alternative in the sense that for all  $x, y$  in  $\mathfrak{A}$  we have  $x(yy) = (xy)y$  and  $(yy)x = y(yx)$ . Following S. Eilenberg (this Zbl. 31, 343) the author defines a representation  $(S, T)$  of  $\mathfrak{A}$  as a pair of linear mappings  $x \rightarrow S_x, x \rightarrow T_x$  of  $\mathfrak{A}$  into the algebra of all linear transformations on a vector space  $\mathfrak{B}$  over  $F$  such that  $[T_x, S_z] = S_{xz} - S_x S_z = T_{zx} - T_x T_z = [S_x, T_z]$  for all  $x, z$  in  $\mathfrak{A}$  where  $[X, Y]$  denotes commutator  $XY - YX$ . The representation space  $\mathfrak{B}$  becomes an alternative module if we define  $vx = vS_x$  and  $xv = vT_x$  ( $v \in \mathfrak{B}$  and  $x \in \mathfrak{A}$ ); this concept generalizes the notion of a two-sided  $\mathfrak{A}$ -module in the theory of associative algebras. The representation theory developed here in details is used to generalize to alternative algebras a theorem of A. Malcev [C. r. (Doklady) Acad. Sci. USSR, n. Sér. 36, 42—43 (1942)] by proving the following result. Let  $\mathfrak{A}$  be an alternative algebra of characteristic 0 with a Wedderburn decomposition  $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$  ( $\mathfrak{N}$  = the radical of  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{S}$  = a separable subalgebra of  $\mathfrak{A}$ ), and  $\mathfrak{M}$  a semi-simple subalgebra of  $\mathfrak{A}$ ; then

there is an automorphism  $G = \exp D = I + D + \frac{1}{2!} D^2 + \dots$  of  $\mathfrak{A}$  mapping  $\mathfrak{M}$  into  $\mathfrak{S}$  such that  $D$  is a (nilpotent) derivation of  $\mathfrak{A}$  [i. e. a linear transformation on  $\mathfrak{A}$  with  $(x y) D = x(y D) + (x D) y$ ] contained in the radical of the enveloping associative algebra of the right and left multiplications of  $\mathfrak{A}$ . L. Fuchs.

**Albert, A. A.: On nonassociative division algebras.** Trans. Amer. math. Soc. 72, 296—309 (1952).

Ein nicht-assoziativer Ring  $R$  ohne Nullteiler heißt Quasidivisionsring, wenn für beliebige, vom Nullelement verschiedene Elemente  $a, b$  aus  $R$  die Gleichung  $ax = b$  bzw.  $xa = b$  stets in  $R$  lösbar ist. Die Gesamtheit aller derjenigen Elemente  $z$  aus  $R$ , die mit jedem Element  $x$  aus  $R$  vertauschbar ( $xz = zx$ ) sind, und die für beliebige Elemente  $x, y$  aus  $R$  das assoziative Gesetz  $(xzy) - (xzz)y, z(xy) = (zx)y$  und  $(xy)z = x(yz)$  erfüllen, nennt man das Zentrum von  $R$ . Ein Quasidivisionsring mit dem Einselement heißt (nicht-assoziativer) Divisionsring. Das Zentrum eines Divisionsringes ist offenbar ein (kommutativer) Körper. Man nennt einen Divisionsring mit dem Zentrum  $F$  auch eine zentrale Divisionsalgebra über  $F$ . — Verf. betrachtet zunächst eine kommutative zentrale Divisionsalgebra  $D$  vom Grade 2 über  $F$  — d. h. jedes nicht zu  $F$  gehörige Element aus  $D$  ist über  $F$  algebraisch vom Grade 2 —, und er beweist, daß für ein beliebiges, nicht zu  $F$  gehöriges Element  $x$  aus  $D$  der Polynomring  $F[x]$  stets über  $F$  eine rein-inseparable Erweiterung vom Grade 2 ist. Es existiert also keine kommutative zentrale Divisionsalgebra vom Grade 2 über dem vollkommenen Zentrum. Verf. betrachtet weiter einen solchen kommutativen Körper  $F$  von der Charakteristik 2, daß über  $F$  eine rein-inseparable Erweiterung von einem Grad  $> 2$  und vom Exponenten 2 existiert, und er gibt ein Konstruktionsverfahren der kommutativen zentralen Divisionsalgebren über  $F$  an. — Ist  $F$  ein kommutativer Körper von einer Charakteristik  $\neq 2$ , so heißt eine Algebra  $A$  über  $F$  „potenzassoziativ“ (power-associative), wenn für ein beliebiges Element  $x$  aus  $A$  die Teilalgebra  $F[x]$  stets einen assoziativen Ring bildet. Definiert man dabei eine neue Produktoperation  $\cdot$  mit  $x \cdot y = (xy + yx)/2$  ( $x, y \in A$ ), so bildet  $A$  offenbar eine kommutative potenzassoziative Algebra  $A^{(+)}$  in bezug auf die Addition von  $A$  und die neu definierte Produktoperation. Wenn außerdem für jede Körpererweiterung  $K$  von  $F$  die Algebra  $(A^{(+)})_K$  über  $K$  auch potenzassoziativ ist, so heißt  $A$  „streng potenzassoziativ“ (strictly power-associative). Ist die Charakteristik von  $F$  größer als 5, so ist jede potenzassoziative Algebra über  $F$  stets streng potenzassoziativ. — Es sei  $D$  eine solche kommutative, streng potenzassoziative und zentrale Divisionsalgebra über  $F$ , daß jedes Element aus  $D$  über  $F$  algebraisch ist. Dann ist entweder  $D$  eine Jordanalgebra [eine kommutative Algebra, welche für beliebige Elemente  $x, y$  aus  $D$  einem speziellen assoziativen Gesetz  $(xy)x^2 = x(yx^2)$  genügt] oder  $F[x]$  eine rein-inseparable Erweiterung über  $F$ , soweit  $x$  aus  $D$  nicht zu  $F$  gehört. — Verf. beweist auch ein Analogon zum wohlbekannten Wedderburnschen Satz, daß ein endlicher assoziativer Divisionsring stets ein kommutativer Körper ist. Es gilt nämlich folgender Satz: Ein endlicher, streng potenzassoziativer Quasidivisionsring von einer Charakteristik  $\neq 2$  ist stets ein kommutativer Körper. Dieser Satz ist für die potenzassoziativen Quasidivisionsringe allgemein nicht gültig; vielmehr beweist Verf. für einen endlichen Körper  $F$  von einer Primzahlcharakteristik  $> 2$  die Existenz einer kommutativen (nicht-assoziativen) Divisionsalgebra vom Range  $n$  über dem Zentrum  $F$ , wo  $n$  eine beliebige natürliche Zahl bezeichnet. Im Unterschied vom assoziativen Fall braucht für eine nicht-assoziative Divisionsalgebra der Rang über dem Zentrum nicht notwendig eine Quadratzahl zu sein. M. Moriya.

**Wilker, P.: Über die Zwischenkörper einfacher algebraischer Erweiterungen.** Math. Ann. 124, 289—290 (1952).

Vereinfachte Beweise der folgenden, von E. Steinitz bewiesenen Sätze (E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Berlin 1930 § 14): I. Ein Erweiterungskörper  $L$  eines Körpers  $K$  besitzt dann und nur dann nur endlich viele Zwischenkörper von  $L/K$ , wenn  $L$  über  $K$  einfach algebraisch ist. II. Ist  $L$  über  $K$  einfach algebraisch, so gilt dasselbe von jedem Zwischenkörper. — Offenbar ist II eine unmittelbare Folge von I. Ein Polynom aus  $K[x]$  heißt normiert, wenn es das Einselement als den höchsten Koeffizienten besitzt. Ist nun ein Körper  $L = K(a)$  über  $K$  einfach algebraisch, so ist  $a$  eine Nullstelle eines normierten irreduziblen Polynomes  $A(x)$  aus  $K[x]$ . In einem Zwischenkörper  $Z$  von  $L/K$  spaltet  $A(x)$  den durch  $Z$  eindeutig bestimmten, normierten irreduziblen Faktor  $P(x)$  mit  $a$  als Nullstelle ab;  $P(x)$  heißt der zu  $Z$  gehörige Faktor von  $A(x)$ . Dabei entsteht  $Z$  aus  $K$  durch Adjunktion aller Koeffizienten von  $P(x)$ . Ist also  $Z'$  ein von  $Z$  verschiedener Zwischenkörper von  $L/K$ , so ist der zu  $Z'$  gehörige Faktor von  $A(x)$  sicher von  $P(x)$  verschieden. Da  $A(x)$  in  $L[x]$  nur endlich viele normierte Faktoren besitzt, so gibt es nur endlich viele Zwischenkörper von  $L/K$ . Existieren umgekehrt nur endlich viele Zwischenkörper, so ist  $L$  nach E. Steinitz über  $K$  endlich algebraisch:  $L = K(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Ist  $K$  endlicher Körper, so ist es auch  $L$ , also ist  $L$  über  $K$  einfach. Andernfalls existieren zwei verschiedene Elemente  $k_1, k_2$  aus  $K$  von der Art, daß für  $f_1 = a_1 + k_1 a_2, f_2 = a_1 + k_2 a_2, K(f_1) = K(f_2) = Z$  ist. Man beweist ohne Mühe, daß  $a_1, a_2$  zu  $Z$  gehören; d. h.  $K(a_1, a_2) = Z$ . Durch vollständige Induktion schließt man, daß  $L$  über  $K$  einfach ist. M. Moriya.



Pickert, Günter: Zwischenkörperverbände endlicher inseparabler Erweiterungen. Math. Z. 55, 355—363 (1952).

Die Zwischenkörper  $Z$  einer Körpererweiterung  $L/K$  ( $K \subseteq Z \subseteq L$ ) bilden bezüglich der Durchschnitts- und Kompositumbildung einen Verband, den wir hier mit  $\{L/K\}$  bezeichnen wollen. Verf. fragt, wann  $\{L/K\}$  modular ist. Da im Falle der Separabilität die Modularität von  $\{L/K\}$  sich mittels der Galoisschen Theorie auf die eines Untergruppenverbandes übertragen läßt, bleibt nur der rein-inseparable Fall sowie diejenige Frage zu untersuchen, wann aus der Modularität von  $\{L/S\}$  und  $\{S/K\}$  die von  $\{L/K\}$  folgt, wo (ebenso auch unten)  $S$  den maximalen separablen Zwischenkörper von  $L/K$  bedeutet. Die Charakteristik von  $K$  kann als eine Primzahl angenommen werden. Verf. zeigt: 1. Der Zwischenkörperverband einer rein-inseparablen Erweiterung ist genau dann modular, wenn die Vielfachheit der Erweiterung kleiner als 3 ist; 2. im Falle einer endlichen Erweiterung  $L/K$  ist  $\{L/K\}$  genau dann modular, wenn ( $\alpha$ ) dasselbe für  $\{S/K\}$  zutrifft, ( $\beta$ ) die Vielfachheit der Erweiterung kleiner als 3 ist, ( $\gamma$ ) jeder Zwischenkörper  $Z$ , für den  $Z/K$  eine Vielfachheit  $> 1$  besitzt,  $S$  enthält. [Dabei bedeutet die Vielfachheit von  $L/K$  die kleinste natürliche Zahl  $m$  mit  $L = K(a_1, \dots, a_m)$ .] L. Fuchs.

Jaeger, Arno: Eine algebraische Theorie vertauschbarer Differentiationen für Körper beliebiger Charakteristik. J. reine angew. Math. 190, 1—21 (1952).

Der übliche Begriff der Ableitung eines Polynoms in einer Unbestimmten mit Koeffizienten aus einem Körper der Charakteristik Null kann unabhängig von irgendwelchen Grenzprozessen formal algebraisch gefaßt werden. Jedoch läßt sich bekanntlich diese formale Definition der Ableitung nicht unmittelbar auf Polynomringe der Charakteristik  $p \neq 0$  übertragen, weil dann alle  $p$ -ten und höheren Ableitungen automatisch verschwinden würden. Eine solche Übertragung gelingt jedoch, wenn man die formale Definition der Ableitung in geeigneter Weise durch Anbringung von Binomialkoeffizienten modifiziert. Eine in diesem Sinne aufgebaute formale Differentiationstheorie wurde von H. Hasse, F. K. Schnidt und M. Deuring begründet. In der vorliegenden Arbeit wird diese Theorie auf den Fall partieller Differentiationen ausgedehnt. Es ergeben sich die genauen Verallgemeinerungen der bekannten Resultate. Darüber hinaus jedoch führen neue Begriffe und Sätze auch im Spezialfall der bekannten Theorie zu neuen Ergebnissen. Die Anschreibung des bisweilen recht komplizierten Formelapparates wird durch eine sehr komprimierte Vektorsymbolik verhältnismäßig knapp und übersichtlich. Jedoch setzt diese Schreibweise zunächst von dem Leser eine gründliche Gewöhnung voraus, ehe ihre Vorteile zur Auswirkung kommen. — Es sei  $R$  ein Integritätsbereich. Eine Multidifferentiation  $n$ -ter Dimension  $\mathfrak{D}$  in  $R$  ist dann eine isomorphe Abbildung von  $R$  in den Potenzreihenring  $R\{u\}$  in  $n$  Unbestimmten  $u = (u_1, \dots, u_n)$  mit Koeffizienten aus  $R$ , die der Iterationsbedingung

$$\mathfrak{D}^a \mathfrak{D}^b x = \binom{a+b}{a} \mathfrak{D}^{a+b} x \quad \left( a = (a_1, \dots, a_n), \quad b = (b_1, \dots, b_n), \quad \binom{a+b}{a} = \prod_v \binom{a_v+b_v}{a_v} \right)$$

genügt. Jede  $n$ -dimensionale Multidifferentiation  $\mathfrak{D}$  besitzt  $n$  Komponenten  $D_1, \dots, D_n$ , die sich durch Löschen von  $n-1$  Unbestimmten in den jeweiligen Potenzreihen ergeben. In üblicher Weise wird der Begriff der Konstanten, der Vollkonstanten usw. erklärt. Jede Multidifferentiation läßt sich durch einen Reduktionsprozeß auf eine Multidifferentiation mit inkonstanten Elementen zurückführen, weswegen man die Untersuchungen auf reduzierte Multidifferentiationen beschränken kann. Als Umkehrung des Reduktionsprozesses erhält man einen Expansionsprozeß. Im weiteren Verlauf der Untersuchungen wird gezeigt, daß sich eine Multidifferentiation eines Integritätsbereiches  $R$  eindeutig auf den Quotientenkörper  $K$  von  $R$ , auf separable algebraische Erweiterungen von  $K$  und in gewissem Umfang auch auf transzendente Erweiterungen fortsetzen läßt. Man kann sich daher auf Multidifferentiationen in Körpern beschränken. Es folgen Beziehungen zwischen verschiedenen Multidifferentiationen desselben Körpers. Dies führt zu dem Begriff der regulären Multidifferentiation, der Abhängigkeit von Multidifferentiationen und zu einer Klasseneinteilung aller Multidifferentiationen in Klassen paarweise abhängiger, sowie zur Aufstellung von Klasseninvarianten. Ausführlich wird die Auflösbarkeit gewisser Differentialgleichungssysteme diskutiert, von der auch bei den folgenden Beweisen Gebrauch gemacht wird. Die regulären Multidifferentiationen können durch eine Folge spezieller Multidifferentiationen derselben Klasse in bestimmter Weise erzeugt werden. Diese Erzeugendenfolgen werden zur Klassenkennzeichnung herangezogen. Einige weitere Sätze gruppieren sich um den Begriff der vertauschbaren Multidifferentiationen. Zu ihrer Behandlung werden sogenannte Expansionsreihen eingeführt. Es ergibt sich eine Aufspaltung der Klassen

in Normalklassen paarweise vertauschbarer Multidifferentiationen. Den Schluß der Arbeit bilden Anwendungen der Theorie auf den Spezialfall algebraischer Funktionenkörper.

H.-J. Kowalsky.

Cohn, Richard M.: Extensions of difference fields. Amer. J. Math. 74, 507—530 (1952).

Unter einem Differenzenkörper  $\mathfrak{F}$  versteht man einen algebraischen Körper mit einem fest gewählten Endomorphismus.  $k$ -fache Anwendung des Endomorphismus auf ein Element  $x \in \mathfrak{F}$  führt dieses in seine  $k$ -te Transformierte  $x_k$  über. Die Theorie solcher Differenzenkörper, ihre Idealtheorie usw. wurde vom Verf. in verschiedenen vorangehenden Arbeiten ausführlich untersucht (dies. Zbl. 33, 179; 37, 66). Während jedoch die bisherigen Untersuchungen weitgehend in Parallele zur Theorie der differenzierbaren Körper und zur Theorie der Polynomideale verlief, zeigen sich in der vorliegenden Arbeit einschneidende Abweichungen, die der Theorie der Differenzenkörper einen ihr eigentümlichen Charakter verleihen. Gegenstand der Arbeit sind Fragestellungen, die sich auf gewisse Erweiterungseigenschaften von Differenzenkörpern beziehen:  $\mathfrak{F}$  sei ein Differenzenkörper, und  $\mathfrak{G}$  bzw.  $\mathfrak{H}$  seien Erweiterungen von  $\mathfrak{F}$ . Die Erweiterungskörper  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  heißen dann unvereinbar (incompatible), wenn es keinen Erweiterungskörper  $\mathfrak{K}$  von  $\mathfrak{F}$  gibt, der zu  $\mathfrak{G}$  bzw.  $\mathfrak{H}$  isomorphe Unterkörper besitzt derart, daß bei den entsprechenden Isomorphismen  $\mathfrak{F}$  elementweise fest bleibt. Weiter sei  $\mathfrak{G}$  eine Erweiterung von  $\mathfrak{F}$  mit der Eigenschaft, daß  $\mathfrak{G}$  Elemente  $x$  enthält, für die keine Transformierte  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) in  $\mathfrak{F}$  liegt.  $\mathfrak{G}$  heißt dann eine monadische Erweiterung von  $\mathfrak{F}$ , wenn es keinen Erweiterungskörper  $\mathfrak{K}$  von  $\mathfrak{F}$  gibt, der zwei verschiedene zu  $\mathfrak{G}$  über  $\mathfrak{F}$  isomorphe Unterkörper besitzt. Ein wesentliches Ziel der Theorie wäre die Charakterisierung derjenigen Differenzenkörper, die solche unvereinbaren bzw. monadischen Erweiterungen besitzen. Die vorliegende Arbeit stellt einen ersten Schritt in dieser Richtung dar. Es zeigt sich nämlich: Endliche Erweiterungen eines algebraisch abgeschlossenen Differenzenkörpers sind weder unvereinbar noch monadisch. — Nach einer einleitenden Zusammenstellung der Definitionen werden zunächst diese Begriffe an zahlreichen einfachen Beispielen ausführlich diskutiert. Es folgt die Bereitstellung verschiedener Hilfssätze, mit Hilfe derer dann die beiden Hauptsätze der Arbeit bewiesen werden. Das oben angegebene Resultat ist eine unmittelbare Folgerung aus den Hauptsätzen. Diese lauten: (I)  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$  seien unvereinbare Erweiterungen des Differenzenkörpers  $\mathfrak{F}$ , und wenigstens eine von ihnen sei eine endliche Erweiterung. Dann gibt es ein algebraisch irreduzibles Differenzenpolynom der Ordnung Null mit Koeffizienten aus  $\mathfrak{F}$  mit der Eigenschaft, daß die Mannigfaltigkeiten ihrer allgemeinen Lösung unvereinbar sind; d. h. daß kein Erweiterungskörper von  $\mathfrak{F}$  erzeugende Nullstellen von allen diesen Mannigfaltigkeiten gleichzeitig enthalten kann. (II) Wenn ein Differenzenkörper  $\mathfrak{F}$  eine endliche monadische Erweiterung besitzt, dann besitzt er auch eine monadische Erweiterung  $\mathfrak{F} \langle \alpha \rangle$ , wobei  $\alpha$  Lösung eines Differenzenpolynoms der Ordnung Null mit Koeffizienten aus  $\mathfrak{F}$  ist. Es folgen entsprechende Untersuchungen für unendliche Erweiterungen, die zu folgenden Ergebnissen führen: (III) Der Differenzenkörper  $\mathfrak{F}$  besitze die beiden unvereinbaren, höchstens abzählbar-unendlichen Erweiterungen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$ . Dann besitzt  $\mathfrak{F}$  auch unvereinbare, höchstens abzählbar-unendliche Erweiterungen  $\mathfrak{G}^*$  und  $\mathfrak{H}^*$  mit der Eigenschaft, daß jedes Element aus  $\mathfrak{G}^*$  bzw.  $\mathfrak{H}^*$  algebraisch über  $\mathfrak{F}$  ist. (IV) Besitzt  $\mathfrak{F}$  eine höchstens abzählbar-unendliche monadische Erweiterung  $\mathfrak{G}$ , so besitzt jedes Element von  $\mathfrak{G}$  eine Transformierte, die algebraisch über  $\mathfrak{F}$  ist. Abschließend formuliert Verf. noch ein Vermutung, aus der sich weitergehende Einblicke in die Verhältnisse ableiten lassen.

H.-J. Kowalsky.

## Zahlkörper. Funktionenkörper:

Nakayama, Tadası: Idèle-class factor sets and class field theory. Ann. of Math., II. Ser. 55, 73—84 (1952).

Es sei  $k$  ein algebraischer Zahlkörper und  $K$  ein Galoischer Erweiterungskörper von  $k$ ; mit  $A_k$  und  $A_K$  mögen die maximalen Abelschen Erweiterungen von  $k$  und  $K$  bezeichnet werden. Dann ist  $A_K/k$  Galoisch, und die zugehörige Galoische Gruppe  $\mathfrak{G}(A_K/k)$  ist eine Erweiterung von  $\mathfrak{G}(A_K/K)$  mit der Faktorgruppe  $\mathfrak{G}(K/k)$ ; sie bestimmt also in  $\mathfrak{G}(A_K/K)$  bis auf Äquivalenz eindeutig ein Faktorensystem zu  $\mathfrak{G}(K/k)$ . Auf dieses Faktorensystem werde nun der durch das Reziprozitätsgesetz der Klassenkörpertheorie gelieferte Isomorphismus von  $\mathfrak{G}(A_K/K)$  auf eine Faktorgruppe  $I_K/P_K$  der Idelgruppe  $I_K$  von  $K$  angewandt; dabei bedeutet  $P_K$  die im Sinne der Chevalleyschen Topologie abgeschlossene Hülle der Hauptidealgruppe  $P_K$ . Es entsteht so in  $I_K/P_K$  ein Faktorensystem zu  $\mathfrak{G}(K/k)$ , wobei man die Automorphismen aus  $\mathfrak{G}(K/k)$  in natürlicher Weise als Operatoren von  $I_K$  aufzufassen hat. Von diesem Faktorensystem hat A. Weil gezeigt, daß es repräsentiert werden kann durch ein sogenanntes „kanonisches“ Faktorensystem  $\alpha$  der Idelklassengruppe  $\mathfrak{C}_K = I_K/P_K$  selbst, welches überdies durch gewisse zusätzliche natürliche Eigenschaften bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist (dies. Zbl. 44, 29). Jeder Galois-schen Zahlkörpererweiterung  $K/k$  ist also in der Idelklassengruppe  $\mathfrak{C}_K$  bis auf Äquivalenz eindeutig und invariant ein kanonisches Faktorensystem  $\alpha$  zu  $\mathfrak{G}(K/k)$  zugeordnet. Verf. stellt



sich hier die Aufgabe, für dieses Faktorensystem eine direkte Konstruktion anzugeben. Zu diesem Zweck betrachtet er eine zyklische Hilferweiterung  $Z/k$ , deren Grad  $m$  ein Vielfaches des Grades  $n$  von  $K/k$  sei, die aber sonst ganz beliebig sein darf (die also insbesondere durch Einheitswurzeln erzeugt gedacht werden kann). Da  $\mathfrak{G}(K/k)$  eine Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}(ZK/k)$  ist, so kann das Weilsche kanonische Faktorensystem  $\alpha$  zu  $\mathfrak{G}(K/k)$  in natürlicher Weise als Faktorensystem  $\tilde{\alpha}$  zu  $\mathfrak{G}(ZK/k)$  aufgefaßt werden. Ausgangspunkt für die Konstruktion des Verf. ist nun der Satz, daß  $\tilde{\alpha}$  äquivalent zu der  $m/n$ -ten Potenz eines durch  $Z/k$  folgendermaßen bestimmten Faktorensystems  $\tilde{\beta}$  ist: Man wähle ein Idel  $z$  aus  $I_K$ , dessen Normsymbol  $(z, Z/k)$  die Ordnung  $m$  besitzt, also eine Erzeugende  $\zeta$  von  $\mathfrak{G}(Z/k)$  darstellt. Dann setze man  $z(\zeta^i, \zeta^j) = 1$ , wenn  $i + j < m$  ist, und  $= z$ , wenn  $i + j \geq m$  ist ( $i, j = 0, 1, \dots, m-1$ ). Man erhält so ein Faktorensystem in  $I_K$  zu der von  $\zeta$  erzeugten zyklischen Gruppe  $\mathfrak{G}(Z/k)$ , welches in natürlicher Weise als Faktorensystem  $\tilde{\beta}$  in  $\mathfrak{G}_K$  zu  $\mathfrak{G}(ZK/k)$  aufgefaßt werden kann. Mit diesem  $\tilde{\beta}$  gilt also  $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}^{m/n}$ , und dieser Satz wird nun vom Verf. umgekehrt dazu benutzt, um das Weilsche Faktorensystem  $\alpha$  zu gewinnen. Notwendig dazu ist lediglich ein Satz über 2-Kohomologien in  $\mathfrak{G}_K$ , welcher als die Formulierung des Noetherschen Hauptgeschlechtssatzes in der Sprache der Ideale angesehen werden kann, und der in den ersten Paragraphen abgeleitet wird. — Fragt man nach der Bedeutung der Ausführungen des Verf. im allgemeinen Gefüge der Klassenkörpertheorie, so ist zunächst seine Bemerkung beachtenswert, daß er das allgemeine Reziprozitätsgesetz nicht voraussetzen braucht, sondern lediglich den einfachen Spezialfall für Einheitswurzelkörper benötigt. Darüber hinaus zeigt er, wie man die kanonischen Faktorensysteme beim Beweise des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes verwenden kann. Er zeigt nämlich den Satz: Ist  $\alpha(\sigma, \tau)$  das kanonische Faktorensystem zu  $\mathfrak{G}(K/k)$  in  $\mathfrak{G}_K$ , so induziert die Abbildung  $\sigma \mapsto \prod_{\tau} \alpha(\sigma, \tau)$  den durch das

Reziprozitätsgesetz gelieferten Isomorphismus zwischen der Normklassengruppe  $\mathfrak{G}_K/N_{K/k}(\mathfrak{G}_K)$  und der Faktorkommutatorgruppe von  $\mathfrak{G}(K/k)$ . Benutzt wird bei der Herleitung dieses Satzes außer der Klassenkörpertheorie für Einheitswurzelkörper nur das folgende: 1. der Normensatz; 2. die fundamentale Indexrelation  $(\mathfrak{G}_K : N_{K/k}(\mathfrak{G}_K)) \leq [K:k]$ ; 3. die Hassesche Summenformel für die lokalen Invarianten einer einfachen Algebra. — Die Untersuchung der allgemeinen Kohomologietheorie in  $I_K$  und  $\mathfrak{G}_K$ , von der die Theorie der Faktorensysteme nur einen Spezialfall bildet, scheint sich in der Klassenkörpertheorie als eine sehr fruchtbare Aufgabe zu erweisen. Verf. beabsichtigt, in einer weiteren Arbeit zusammen mit G. Hochschild auch darauf einzugehen. In dieser Arbeit wird in einem abschließenden Paragraphen (§ 6) lediglich noch ein Satz über 3-Kohomologien in  $P_K$  bewiesen, der ebenfalls auf eine Anregung von A. Weil zurückgeht. Es handelt sich dabei um denjenigen 3-Kozyklus  $\delta\alpha$  zu  $\mathfrak{G}(K/k)$  in  $P_K$ , der als Rand des kanonischen Faktorensystems  $\alpha$  auftritt (und der durch diese Eigenschaft bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist). Es wird gezeigt, daß die dadurch bestimmte 3-Kohomologiekategorie die genaue Ordnung  $n/n'$  besitzt, wenn  $n'$  das kleinste gemeinsame Vielfache sämtlicher  $p$ -Grade von  $K/k$  bedeutet ( $p$  durchläuft alle Primdivisoren von  $k$ ). Insbesondere ist  $\delta\alpha \sim 1$  genau dann, wenn  $n = n'$  ist. Es ergeben sich hier Zusammenhänge mit Untersuchungen von Teichmüller (Über die sogenannte nichtkommutative Galoissche Theorie, dies. Zbl. 23, 198). Inzwischen hat J. Heine mit algebratheoretischen Methoden den einen weiteren Weg zur Behandlung der Idelklassenfaktorensysteme aufgezeigt [Abh. math. Sem. Hamburg 18, 70—98 (1952)]. P. Roquette.

## Zahlentheorie:

● Thébault, Victor: Les récréations mathématiques. Avec des notes de A. Buquet. Paris: Gauthier-Villars 1952. VI, 297 p. 2500.—fr.

Das Buch wird, nach dem Vorwort von A. Balliecioni, Schülern und Studierenden große Dienste leisten. Es enthält im wesentlichen eine Sammlung der vom Verf. seit vielen Jahren in Zeitschriften mehrerer Länder veröffentlichten Beiträge. Diese betreffen in mannigfacher Abwandlung meist solche Merkwürdigkeiten, die mit der Schreibweise der Zahlen in verschiedenen Ziffernsystemen zusammenhängen. Freunde dieses Genres, zu dessen Reizen vielleicht sein Mangel an Systematik zählt, werden dem Buch eine Fülle von Anregungen entnehmen. Spärlicher finden sich spezielle Fragen aus der eigentlichen elementaren Zahlentheorie. Die Rücksicht auf den erwähnten Leserkreis ließe größere Sorgfalt auch in einfachsten Beweisen wünschen; z. B. ist der auf S. 128f., auch von Druckfehlern abgesehen, mißlungen. Zwei Beiträge von A. Buquet beschließen das Werk.

R. Sprague.

Ricci, Giovanni: Funzioni aritmetiche. Proprietà asintotiche — aritmetica analitica. Archimede 4, 1—7 (1952).

**Rosati, Luigi Antonio:** Risoluzione di un sistema diofanteo. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 69—70 (1952).

**Palamà, Giuseppe:** Sulle somme di  $k^{\text{me}}$  potenze e su di un teorema relativo alle multigrade. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 19—29 (1952).

Betrachtet werden Beziehungen folgender Art: (1)  $x_1^k + \dots + x_n^k = y_1^k + \dots + y_m^k$  mit  $m < n$ ,  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 1$ ,  $x_i, y_i$  ganz und  $> 0$ . Es sei  $\beta(k)$  bzw.  $\gamma(k)$  der kleinste Wert von  $n$ , so daß (1) wenigstens eine bzw. unendlich viele nicht triviale Lösungen hat. Ferner seien  $\beta'(k)$ ,  $\gamma'(k)$  die analogen Werte, wenn  $m < n - 1$ . Es ist  $\beta(k) \leq \beta'(k)$ ,  $\gamma(k) \leq \gamma'(k)$ ,  $\beta(k) \leq \gamma(k)$ . Auf Grund allgemeiner Überlegungen ergeben sich unter anderem die speziellen Resultate: Ist  $k \leq 11$ , dann ist  $\gamma(k) \leq k$  und  $\gamma'(k) \leq k + 1$ . Ferner  $\gamma(12) \leq 15$ ,  $\gamma(13) \leq 15$ ,  $\gamma(14) \leq 21$ ,  $\gamma(15) \leq 31$ ,  $\gamma(16) \leq 31$ ,  $\gamma(17) \leq 31$ ,  $\gamma(18) \leq 39$ ,  $\gamma(19) \leq 49$ ,  $\gamma(20) \leq 59, \dots$ , während die entsprechenden  $\gamma'$  eine um 1 größere obere Schranke haben. Weiter ist  $\beta(6) \leq 5$ ,  $\beta(7) \leq 5$ ,  $\beta(8) \leq 7$ ,  $\beta(9) \leq 8$ ,  $\beta'(9) \leq 8$ ,  $\beta'(11) \leq 11$ ,  $\beta'(15) \leq 24$ ,  $\beta'(17) \leq 30$ . Mit ein paar Anwendungen auf mehrgradige Gleichungen schließt die Arbeit.

*N. Hofreiter.*

**Bini, Umberto:** La risoluzione delle equazioni  $x^n - y^n = M$  e l'ultimo teorema di Fermat. Archimede 4, 50—57 (1952).

Verf. gibt mit Hilfe elementarer Überlegungen Klassen natürlicher Zahlen  $M = N^n$  an, so daß die Titelgleichung in natürlichen Zahlen unlösbar ist.

*E. Hlawka.*

**Goodman, A. W. and W. M. Zaring:** Euclid's algorithm and the least-remainder algorithm. Amer. math. Monthly 59, 156—159 (1952).

Wendet man auf zwei ganzrationale Zahlen  $a, b$  den Euklidischen Algorithmus an, und zwar einmal, indem man nach kleinsten nichtnegativen Resten dividiert, zum andern vermittelt Division nach kleinstem Absolutrest:  $a = qb + r$ ,  $|r| \leq \frac{1}{2}|b|$  bzw.  $r = \frac{1}{2}|b|$  im Falle des Gleichheitszeichens, so fragen Verff. nach dem Unterschied in der Anzahl der jeweiligen Divisionsschritte. Durch ein einfaches elementares Reduktionsverfahren, welches den ersteren Algorithmus in den nach kleinstem Absolutrest überführt, wird bewiesen, daß die gesuchte Differenz gleich ist der Anzahl der negativen Reste. Betrachtet man ferner bez. der Division  $a = qb + r$ ,  $0 \leq r < b$  die Folge der  $r/b$ , faßt man in dieser Folge immer solche aufeinanderfolgenden Brüche zu einer Kette zusammen, deren Wert  $> \frac{1}{2}$  ist (die Ketten seien jeweils so lang als möglich), und numeriert die Elemente jeder Kette, jeweils mit eins beginnend, fortlaufend durch, so ist die Gesamtheit aller ungerade numerierten Kettenglieder in der Vereinigung aller Kettenglieder ebenfalls gleich obiger Differenz der Divisionsschrittzahlen. Schließlich wird noch gezeigt, daß die Anzahl der Gleichungen plus der Summe der Quotienten  $q$  in beiden Euklidischen Algorithmen gleich groß ist, also als eine Invariante anzusehen ist.

*H.-H. Ostmann.*

**Carlitz, L.:** Some theorems on Bernoulli numbers of higher order. Pacific J. Math. 2, 127—139 (1952).

Für  $B_m^{(k)}$ , die Bernoullischen Zahlen der Ordnung  $k$ , definiert durch  $\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^k =$

$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} B_m^{(k)}$ , wird eine Reihe von Kongruenzen bewiesen. U. a. für eine Primzahl  $p$

(1)  $B_{p+2}^{(p+1)} \equiv 0 \pmod{p^3}$  für  $p > 3$  und  $B_p^{(p)} \equiv \frac{1}{2} p^2 \pmod{p^3}$  für  $p \geq 3$ . (1) verschärft einen Satz von S. Wachs (dies. Zbl. 38, 25—26), gilt aber für  $p = 3$  wegen  $B_5^{(4)} = -9$  nicht mehr. Die Beweise stützen sich auf eine Anzahl wohl bekannter Formeln für die  $B_m^{(k)}$ , wie sie schon bei J. W. L. Glaisher und N. Nielsen zu finden sind.

*H.-E. Richert.*

**Ankeny, N. C.:** The least quadratic non residue. Ann. of Math., II. Ser. 55, 65—72 (1952).



$n(k)$  bezeichne den kleinsten positiven quadratischen Nichtrest der Primzahl  $k$ . Die beste bisher bekannte Abschätzung von  $n(k)$  nach oben,  $n(k) = O(k^{1/2\sqrt{e}})$ , stammt von Vinogradov [Trans. Amer. math. Soc. **29**, 218—226 (1927)]. Unter Annahme der Richtigkeit der erweiterten Riemannschen Vermutung (E. R. V.) haben S. Chowla und P. Erdős kürzlich  $n(k) = O(\exp(\log^{1/2+\varepsilon} k))$  bewiesen. Hier gelingt es Verf. unter Annahme der E. R. V.  $n(k) = O(\log^2 k)$  zu zeigen. Dieses Ergebnis ist nicht allzuweit von der unteren Abschätzung  $n(k) = \Omega(\log k)$  (V. R. Fridlender, dies. Zbl. **33**, 352) entfernt. Bezeichnen  $r(k)$  die kleinste positive primitive Wurzel mod  $k$ ,  $\nu(k-1)$  die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von  $k-1$ , so gilt ferner unter Annahme der E. R. V.

$$r(k) = O((2^{\nu(k-1)} \log k \log(2^{\nu(k-1)} \log k))^2).$$

Die Herleitung der beiden Ergebnisse gelingt nach dem Beweis des folgenden Satzes: Ist  $X > 3$ , so gilt

$$\sum_p \chi(p) \log p e^{-\nu/X} = O\left(X^{1/2} \left(\frac{\log X \log k}{\log \log k} + \frac{\log k}{\log X}\right)\right) + O(X^{1/3} \log k),$$

wo links die Summe über alle Primzahlen zu erstrecken ist und  $\chi(p)$  einen Charakter mod  $k$  bezeichnet.

H.-E. Richert.

**Nagell, T.:** Der kleinste positive  $n$ -te Nichtpotenzrest modulo  $p$ . Norsk mat. Tidsskr. **34**, 13 (1952) [Norwegisch].

Wenn der Modul  $p$  eine Primzahl  $\geq 11$ ,  $n$  eine ungerade Zahl  $> 3$  und  $(n, p-1) > 1$ , so ist der kleinste positive  $n$ -te Nichtpotenzrest  $< \sqrt[p]{p/2}$ .

H. L. Schmid.

**Erdős, P.:** On the greatest prime factor of  $\prod_{k=1}^x f(k)$ . J. London math. Soc. **27**, 379—384 (1952).

Es sei  $f(x)$  ein Polynom mit ganzrationalen Koeffizienten und nicht ein Produkt solcher linearer Faktoren.  $P_x$  bezeichne den größten Primteiler von  $\prod_{k=1}^x f(k)$ .

Nach Nagell [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg, **1**, 179—194 (1922)] ist  $P_x > c_1 x \log x$ . Verf. beweist die Existenz einer positiven Konstanten  $c_2 = c_2(f)$ , so daß  $P_x > x (\log x)^{c_2 \log \log \log x}$  gilt. Ohne Beweis wird sogar  $P_x > x e^{(\log x)^{c_3}}$  angegeben und die Vermutung  $P_x > c_4 x^l$ ,  $l = \text{Grad } f$ , ausgesprochen. Zum Beweise werden die Zahlen  $u_1 < u_2 < \dots$  des Intervalles  $(x/\log x, x)$ , für die  $f(u_i)$  keinen Primfaktor  $p$  mit  $x \leq p \leq c_{13} x \log \log x$  besitzt, untersucht, und für die nötigen Abschätzungen der Primidealsatz sowie ein Ergebnis von Nagell herangezogen.

H.-E. Richert.

**Erdős, P.:** On the sum  $\sum_{k=1}^x d(f(k))$ . J. London math. Soc. **27**, 7—15 (1952).

Let  $d(n)$  denote the number of divisors of a positive integer  $n$  and  $f(x)$  be a polynomial with integral coefficients. The author proves that

$$0 < c_1 < \left( \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{x=1}^N d(f(x)) \right) / N \log N < c_2 < \infty.$$

L.-K. Hua.

**Cugiani, Marco:** Sull'aritmetica dei polinomi di esponenziali a valori interi. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **7**, 38—43 (1952).

Sei  $F(y) = c_0 y^n + \dots + c_n$  ( $c_0 \neq 0, c_n \neq 0, n \geq 1$ ) ein irreduzibles ganzzahliges Polynom und  $a$  eine ganze Zahl mit  $|a| > 1, (a, c_n) = 1, m \geq 1$ . Dann wird gezeigt: Der größte Primteiler von  $F(a^{1^m}) F(a^{2^m}) \dots F(a^{x^m})$  ist mindestens  $\gamma/x \log x$ , wo  $\gamma$  nicht von  $x$  abhängt. Der Beweis erfolgt durch Abschätzung der Lösungszahl von  $F(a^{x^m}) \equiv 0 \pmod{p^i}$  für festes  $p$ .

K. Prachar.

Gustin, W.: An operatorial characterization of certain partition polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 31–35 (1952).

Es werden explizite Ausdrücke für die Polynome  $f_n(x)$  angegeben, die der folgenden Rekursion genügen:

$$x f_n(x) = 1 + (x-1) \sum_{\alpha|n} f_\alpha(x).$$

Es werden zwei Darstellungen angegeben. Sei  $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$  und  $F_k$  der Operator

$$F_k = \frac{1}{k!} x^k D^k (x-1)^k \quad (k \geq 0),$$

wo  $D$  der Operator der Differentiation nach  $x$  ist. Dann ist

$$f_n(x) = F_{k_1} \cdots F_{k_m} [1].$$

Eine zweite explizite Darstellung wird unter Verwendung der Koeffizienten  $\mu_h(n)$  der Entwicklung  $[\zeta(s)]^{-h} = \sum \mu_h(n) n^{-s}$  gegeben.

K. Prachar.

Sandham, H. F.: Five series of partitions. J. London math. Soc. **27**, 107–115 (1952).

Sei  $p(n)$  die Anzahl der Partitionen von  $n$ , definiert durch

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-q^k)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n \quad (|q| < 1).$$

Verf. berechnet die Summe  $S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(n)}{\cosh \pi \sqrt{k} (n - 1/24)}$  für  $k = 1, 2, 4, 6$ . Es treten dabei nur ineinandergeschachtelte Wurzeln und Logarithmen von rationalen Zahlen auf. Für  $k = 2/3$  ist die Reihe divergent.

$$\left[ \text{Nach Hardy und Ramanujan ist nämlich } p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp \left( \pi \sqrt{\frac{2}{3} n} \right) \right]$$

Verf. zeigt hier

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{p(n)}{\cosh \pi \sqrt{(2/3)(n - 1/24)}} - \frac{1}{2n\sqrt{3}} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{3}{2} \log 2 + 2 \log 3 + 3 \log \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(1/3)} + \frac{1}{2} \gamma - 2 \right\}, \quad \gamma \text{ Eulersche Konst.} \end{aligned}$$

Die Grundlage der Beweise ist die Formel

$$\frac{1}{\pi} S_k = \int_0^1 \frac{q^{1/24} [1 - q^2] (1 - q^4) (1 - q^6) \cdots ]^3 dq}{q^{k/24} (1 - q^k) (1 - q^{2k}) (1 - q^{3k}) \cdots} \frac{dq}{q} \left( \frac{2}{3} < k < 6 \right).$$

K. Prachar.

Bailey, W. N.: A note on two of Ramanujan's formulae. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **3**, 29–31 (1952).

Verf. beweist durch Verwendung von Sätzen über verallgemeinerte hypergeometrische Reihen (dies. Zbl. **14**, 160) die folgenden Formeln von Ramanujan:

$$\begin{aligned} x \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^{5n})^5}{1-x^n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{x^{5n+1}}{(1-x^{5n+1})^2} - \frac{x^{5n+2}}{(1-x^{5n+2})^2} - \frac{x^{5n+3}}{(1-x^{5n+3})^2} + \frac{x^{5n+4}}{(1-x^{5n+4})^2} \right] \\ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^n)^5}{1-x^{5n}} &= 1 - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(5n+1)x^{5n+1}}{1-x^{5n+1}} - \frac{(5n+2)x^{5n+2}}{1-x^{5n+2}} - \frac{x^{5n+3}}{1-x^{5n+3}} + \frac{x^{5n+4}}{1-x^{5n+4}} \right] \end{aligned}$$

Die erste dieser Formeln diente Ramanujan zum Beweis der Identität

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n+4) x^n = 5 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^{5n})^5}{(1-x^n)^6},$$

wo  $p(n)$  die Anzahl der Partitionen von  $n$  ist.

K. Prachar.

Mann, Henry B.: On products of sets of group elements. Canadian J. Math. **4**, 64–66 (1952).



Let  $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$ ,  $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \dots, B_t\}$  be sets of elements of a group  $\mathfrak{G}$  of finite order  $g$ .  $(\mathfrak{A})$ ,  $(\mathfrak{B})$ , denote the number of elements in  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$  the sets of elements of  $\mathfrak{G}$  not in  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ , and  $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = \{A_i B_j\}$ . The author proves two theorems (1) Either  $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = \mathfrak{G}$  or  $g \geq (\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B})$ ; (2) Let  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  be sets of elements of an Abelian group  $\mathfrak{G}$  and let  $C \subset \mathfrak{A} \mathfrak{B}$ . Then there exists a  $\mathfrak{B}^* \supset \mathfrak{B}$  such that (i)  $\mathfrak{A} \mathfrak{B}^* = \mathfrak{H} \mathfrak{C}$ , where  $\mathfrak{H}$  is a subgroup of  $\mathfrak{G}$ , (ii)  $(\mathfrak{A} \mathfrak{B}^*) - (\mathfrak{A} \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}^*) - (\mathfrak{B})$ . — The proof of theorem (2) is closely related to the author's proof of the „ $\alpha + \beta$  hypothesis“.

*S. Selberg.*

**Mann, Henry B.:** Some theorems on difference sets. Canadian J. Math. 4, 222—226 (1952).

A set  $a_1, a_2, \dots, a_n$  of different residues mod  $v$  is called a difference set  $(v, k, \lambda)$ ,  $(v > k > \lambda)$ , if the congruence  $a_i - a_j \equiv d \pmod{v}$  has exactly  $\lambda$  solutions for  $d \not\equiv 0 \pmod{v}$ . — The author improves some efficient necessary conditions (by Hall and Hall and Ryser) by which a large number of  $(v, k, \lambda)$  can be shown to be impossible.

*S. Selberg.*

**Roth, Klaus:** Sur quelques ensembles d'entiers. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 388—390 (1952).

Let  $\mathfrak{A}$  be a set of integers  $u_1 < u_2 < u_3 < \dots$  such that  $u_h + u_k = 2u_l$  has no other solutions than  $h = k = l$ . Let  $A(x)$  be the largest number of integers  $\leq x$  forming a set of type  $\mathfrak{A}$ . The author then proves that  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = 0$ , a result conjectured for some time (about the history see R. Salem and D. C. Spencer, this Zbl. 39, 274). The proof depends on the function

$$S = \sum_{h=1}^U e^{2\pi i \alpha u_h}$$

where  $\alpha$  denotes a real number.

*S. Selberg.*

**Palamà, Giuseppe:** Osservazioni sul „Neocribrum“ di L. Poletti. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 63—67 (1952).

**Fournier, Georges:** Sur la distribution moyenne des nombres premiers. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2411—2413 (1952).

**Borel, Émile:** Démonstration élémentaire du théorème de Dirichlet relatif aux nombres premiers d'une progression arithmétique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 769—770 (1952).

Verf. skizziert einen Beweis des Dirichletschen Satzes über die Primzahlen einer arithmetischen Progression, ausgehend von dem Axiom: „ $P(k)$  seien für verschiedene Zahlen  $k$  unabhängige Aussagen. Die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit von  $P(k)$  strebe mit wachsendem  $k$  gegen 1. Dann ist  $P(k)$  für unendlich viele Zahlen  $k$  richtig.“ Die mathematische Definition der hier verwendeten Worte „unabhängig, Wahrscheinlichkeit“ fehlt leider.

*E. Witt.*

**Brandt, Heinrich:** Über das Maß positiver ternärer quadratischer Formen. Math. Nachr. 6, 315—318 (1952).

Ist  $f = f(x) = \sum_{k,j=1}^3 a_{kj} x_k x_j$  mit  $a_{kj} = a_{jk}$  eine positiv-definite ternäre quadratische Form, dann heißt  $f$  primitiv, wenn die  $a_{kj}$  teilerfremde ganz-rationale Zahlen sind. Der primitiven Form  $f$  sind die Ordnungsinvarianten  $\Omega$  und  $\Delta$  und die primitive adjungierte Form  $F$  zugeordnet (vgl. P. Bachmann, Die Arithmetik der Quadratischen Formen, 1898, S. 39—41). Für die ungeraden Primteiler  $\omega$  von  $\Omega$ , die nicht in  $\Delta$  aufgehen, und die ungeraden Primteiler  $\delta$  von  $\Delta$ , die nicht in  $\Omega$  aufgehen, sind die Charaktere des Geschlechtes von  $f$  gegeben durch die Legendreschen Symbole  $(f/\omega)$ ,  $(F/\delta)$  (vergl. Bachmann S. 52). Die Maßformel besagt, daß das Maß  $M$  des Geschlechtes von  $f$  den Wert

$$(1) \quad M = \zeta \cdot \frac{\Omega}{8} \prod \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \prod \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{1}{\omega}\right) \left(\frac{1}{\omega}\right)\right) \prod \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\Omega F}{\delta}\right) \left(\frac{1}{\delta}\right)\right)$$

hat. (H. J. St. Smith, Coll. math. papers, 1894, S. 455—509, vgl. Bachmann, S. 191). Dabei sind die beiden letzten Produkte in der angegebenen Weise über  $\omega$  und  $\delta$ , das erste Produkt über alle gem. ungeraden Primteiler  $r$  von  $\Omega$  und 1 zu erstrecken. Der Faktor  $\zeta$  kann die Werte 1,  $1/3$ ,  $1/2^2$  mit  $\lambda = 1, 2, 3, 4$  annehmen (Tabelle bei Smith, S. 499). — Bekanntlich ist es oft zweckmäßig,  $a_{kk} = b_{kk}$ ,  $2a_{kj} = b_{kj}$  ( $k \neq j$ ) zu setzen und solche Formen  $f$  zu betrachten, für welche  $b_{kj}$  teilerfremde ganzrationale Zahlen sind. Da bisher keine zweckmäßige Bezeichnung dafür üblich ist, seien solche Formen hier als primär bezeichnet. Die primäre Form  $f$  habe die primäre Adjungierte  $F$ . Für  $s_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$ ,  $s_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$ ,  $s_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$  gelten die bekannten Identitäten

$$\left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} y_k \right)^2 - 4f(x)f(y) = J_1 F(s), \quad \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_k} y_k \right)^2 - 4F(x)F(y) = J_2 f(s).$$

Man berechnet dann leicht, in welcher Potenz 2 in  $J_1$  und  $J_2$  aufgeht und wie  $J_1, J_2$  mit  $\Omega, 1$  zusammenhängt. Verf. benutzt das, um die primären Formen  $f$  in 3 Typen einzuteilen:

1.  $(J_1, 2) = 1$ ,  $16 | J_2 \rightarrow J_1 = -\Omega$ ,  $J_2 = -8\Delta$ ,
2.  $4 | J_1$ ,  $4 | J_2 \rightarrow J_1 = -4\Omega$ ,  $J_2 = -4\Delta$ ,
3.  $16 | J_1$ ,  $(J_2, 2) = 1 \rightarrow J_1 = -8\Omega$ ,  $J_2 = -\Delta$ .

Verf. zeigt, daß man für das Maß  $M$  des Geschlechtes der primären Form  $f$  aus (1) die Formel

$$(2) \quad M = \frac{\kappa J_1 J_2}{6 \cdot 2^{v+4}} \prod \left( 1 - \frac{1}{p_0^2} \right) \prod \left( 1 + \left( \frac{J_2 f}{p_1} \right) \frac{1}{p_1} \right) \prod \left( 1 + \left( \frac{J_1 F}{p_2} \right) \frac{1}{p_2} \right)$$

ableiten kann. Dabei durchläuft im ersten Produkt  $p_0$  alle gem. Primteiler von  $J_1$  und  $J_2$ , im zweiten  $p_1$  alle Primteiler von  $J_1$ , die nicht in  $J_2$  aufgehen, im dritten  $p_2$  alle Primteiler von  $J_2$ , die nicht in  $J_1$  aufgehen. Ferner bezeichnet  $v$  die Anzahl der Charaktere von  $f$ . Der Vorteil von (2) gegenüber (1) liegt darin, daß es für  $\kappa$  nur 3 Möglichkeiten gibt: a)  $\kappa = \frac{1}{2}$ , wenn mindestens eine der Zahlen  $J_1, J_2$  durch 8, aber keine durch 16 teilbar ist, b)  $\kappa = \frac{1}{3}$ , wenn  $f$  und  $F$  nur 3 ungerade Restklassen mod 8 darstellen, c)  $\kappa = 1$  sonst.

H. Braun.

Jones, Burton W.: An extension of Meyer's theorem on indefinite ternary quadratic forms. Canadian J. Math. 4, 120—128 (1952).

Es sei  $f$  eine primitive, ternäre quadratische Form mit ganzzahligen Koeffizienten mit der Matrix  $F$ ;  $d = \det F$  sei die Determinante der Form,  $\Omega$  der 2. Determinantenteiler (d. h. der gr. gem. Teiler der zweizeiligen Minoren) von  $F$ . Dann ist  $d = \Omega \cdot \Delta$ , wo  $\Delta$  ganz. Gilt für 2 primitive indefinite ternäre quadratische Formen eines Geschlechtes:  $(\Omega, \Delta) \leq 2$ ,  $\Omega \not\equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\Delta \not\equiv 0 \pmod{4}$ , so sind sie bekanntlich äquivalent. In der Arbeit werden Sätze abgeleitet, wann ein Geschlecht nur eine Klasse enthält. So ergibt sich als einfachstes Ergebnis: Eine indefinite primitive ternäre quadratische Form ist in einem Geschlecht mit nur einer Klasse, wenn  $(\Omega, \Delta) | 6$ ,  $\Omega \not\equiv 0 \not\equiv \Delta \pmod{4}$  und  $d \not\equiv 0 \pmod{81}$ .

N. Hofreiter.

Chalk, J. H. H.: The minimum of a non-homogeneous binary cubic form. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 392—401 (1952).

Es sei  $f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$  eine binäre kubische Form mit reellen Koeffizienten und negativer Diskriminante  $D$ . Zu beliebigen reellen Zahlen  $x_0, y_0$  gibt es mod 1 kongruente Zahlen  $x, y$ , so daß  $|f(x, y)| \leq 1/8 \cdot \max \{|f(1, 0)|, |f(0, 1)|, |f(1, 1)|, |f(1, -1)|\}$ . Die rechte Seite hängt also von der gegebenen Form  $f$  ab und ist nicht von der Gestalt  $k \cdot D^{1/4}$ , wo  $k$  eine von  $f$  unabhängige Konstante ist. Der Beweis erfolgt mit zahlengeometrischen Überlegungen. Die obige Aussage ist äquivalent mit der geometrischen, die besagt, daß sich die Ebene mit zum Sternbereich:  $|x|(x^2 + y^2) \leq 1$  kongruenten Bereichen überdecken läßt, deren Mittelpunkte ein Gitter bilden. Die Ränder der Sternbereiche sind somit spezielle kubische Kurven, die sich (was im Beweis wesentlich ist) — von einem Ausnahmefall abgesehen — in höchstens vier Punkten schneiden.

N. Hofreiter.

Chalk, J. H. H.: The minimum of a non-homogeneous bilinear form. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 119—129 (1952).

The minimum of the bilinear form

$$B = (\alpha x + \beta y + c_1)(\gamma z + \delta t + c_2)$$

for integer variables  $x, y, z, t$  satisfying

$$(1) \quad xt - yz = \pm 1$$



has been investigated by Davenport and Heilbronn (this Zbl. 29, 111) in the particular case  $c_1 = c_2 = 0$ . Here the author supposes that  $c_1, c_2$  do not both vanish and shows that there are integers  $x, y, z, t$  satisfying (1) such that

$$(2) \quad |B| \leq \frac{1}{4} |\alpha \delta - \beta \gamma|$$

and indeed

$$(3) \quad |B| > \frac{1}{8} |\alpha \delta - \beta \gamma|$$

if both  $\alpha/\beta, \gamma/\delta$  are irrational. There is no evidence that either constant is best possible. The proof of (2) is simple, that of (3) depends on the following result of general interest. If  $X = \alpha x + \beta y$ ,  $Y = \gamma x + \delta y$  and  $c$  is a constant then there are coprime integers  $x, y$  such that

$$(4) \quad |X + c| |Y| \leq (1 - 2^{-1/2}) |\alpha \delta - \beta \gamma|$$

and indeed

$$(5) \quad |X + c| |Y| < \frac{1}{4} |\alpha \delta - \beta \gamma|$$

if  $\alpha/\beta$  is irrational. The constant in (4) is best possible; and in a subsequent paper Davenport (review below) has shown that that in (5) is also best possible. The proof of (5) follows closely Sawyer's proof (this Zbl. 39, 26) of Minkowski's theorem on the product of two inhomogeneous forms and seems to the reviewer to be incomplete in the same respect. Namely both proofs seem to use tacitly the following false proposition. Let  $P_1, P_2, P_3, P_4$  be points of an (inhomogeneous) lattice, one in each quadrant. Then there are points  $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4$ , one in each quadrant, such that each  $P'_i$  lies in the quadrilateral  $P_1 P_2 P_3 P_4$  and such that the quadrilateral  $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$  contains no lattice points except the vertices.

J. W. S. Cassels.

**Davenport, H.:** Note on a result of Chalk. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 130—138 (1952).

Let  $X, Y$  be homogeneous forms in  $x, y$  of determinant  $\Delta \neq 0$ ; and  $c \neq 0$ , a constant. Chalk has shown (cf. preced. review) that if neither  $X$  nor  $Y$  represents 0 non-trivially there are coprime integers  $x, y$  such that  $|X + c| |Y| < \frac{1}{4} |\Delta|$ . The author shows, by an example, that the constant 4 cannot be replaced by a larger one. He shows, however, that there are integers  $(x, y) \neq (0, 0)$  not necessarily coprime, such that  $|X + c| |Y| \leq |\Delta|/4.1$ . The proof consists in showing that it is enough to consider  $X = x + \Theta y$ ,  $Y = x - \Phi y$  where  $0 < \Phi < 1 \leq \alpha < \Theta$ , by making a suitable transformation of  $x, y$ . The result then follows by considering a few pairs of values of  $x, y$ . It is shown by an example that 4.1 cannot be replaced by 5.06.

J. W. S. Cassels.

**Cole, A. J.:** On the product of  $n$  linear forms. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 56—62 (1952).

Let  $L_1, \dots, L_n$  be homogeneous linear forms in  $u_1, \dots, u_n$  of determinant  $\Delta \neq 0$  with real coefficients and let  $c_1, \dots, c_n$  be real constants. It is shown that there are always integers  $u_1, \dots, u_n$  such that

$$(*) \quad L_1 + c_1 > 0, \dots, L_{n-1} + c_{n-1} > 0, (L_1 + c_1) \cdots (L_{n-1} + c_{n-1}) |L_n + c_n| \leq \frac{1}{2} |\Delta|.$$

The constant  $\frac{1}{2}$  is best possible for each  $n$ . The author also gives very general conditions under which (\*) has infinitely many integer solutions. The methods are similar to Chalk's (this Zbl. 38, 27).

J. W. S. Cassels.

**Rogers, C. A.:** Indefinite quadratic forms in  $n$  variables. J. London math. Soc. 27, 314—319 (1952).

Es sei  $Q(u_1, \dots, u_n)$  eine beliebige indefinite quadratische Form mit reellen Koeffizienten und der Determinante  $D \neq 0$ . Nach Blaney (dies. Zbl. 31, 204) gibt es zu beliebigen reellen Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  stets ganze Zahlen  $u_1, \dots, u_n$ , so daß

$$|Q(u_1 + \alpha_1, \dots, u_n + \alpha_n)| \leq c_n |D|^{1/n},$$

wobei  $c_n = 2^{n-2}$  gesetzt werden darf. Verf. verschärft das Resultat, indem er zeigt, daß  $c_n = n^2 \gamma_n / 4$  genommen werden kann. Dabei ist  $\gamma_n$  die Hermitesche Konstante, also die obere Grenze des Minimalwertes für alle positiv definiten quadratischen Formen mit der Determinante 1, wenn die Variablen alle ganze Zahlen  $\neq 0, \dots, 0$  durchlaufen. Der Nachweis erfolgt mit geometrischen Überlegungen. In zwei angefügten Noten zeigt Verf. daß weitere Verschärfungen bei geringeren Änderungen des Beweises erzielt werden können, z. B.  $n \gamma_n / 4 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) statt  $n^2 \gamma_n / 4$ .

N. Hofreiter.

**Cassels, J. W. S.:** The inhomogeneous minimum of binary quadratic, ternary cubic and quaternary quartic forms. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **48**, 72—86 (1952).

The following results are proved: (I) Let  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$  be real indefinite. There exist real  $(x_0, y_0)$  such that  $|f(x, y)| \geq \sqrt{b^2 - 4ac}/48$  for all  $(x, y) \equiv (x_0, y_0) \pmod{1}$ , and there are indenumerably many such  $(x_0, y_0)$  if  $f$  represents 0. If  $a, b, c$  are rational, then  $x_0, y_0$  may be chosen rational. — There are  $2^{\aleph_0}$  pairs  $(x_0, y_0)$  such that  $|f(x, y)| \geq \sqrt{b^2 - 4ac}/87$  for all  $(x, y) \equiv (x_0, y_0) \pmod{1}$ , hence also transcendental pairs of this kind. — If  $f$  is not the multiple of a product of two linear forms with rational coefficients, then 
$$\inf_{(x, y) \equiv (x_0, y_0) \pmod{1}} |f(x, y)| = 0$$

for almost all pairs  $(x_0, y_0)$ . (II) Let  $L_1, L_2, L_3, L_4$  be one real and two complex conjugate linear forms in  $x, y, z$  of determinant  $\Delta \neq 0$ . There exists a real point  $(x_0, y_0, z_0)$  such that  $|L_1 L_2 L_3| \geq |\Delta|/420$  for all  $(x, y, z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod{1}$ . If  $L_1, L_2, L_3$  are conjugate forms in a cubic field,  $x_0, y_0, z_0$  may be chosen rational. (III) Let  $L_1, L_2 = L_1, L_3, L_4 = L_3$  be two pairs of complex conjugate linear forms in  $x, y, z, t$  of determinant  $\Delta \neq 0$ . Then there is a real point  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  such that  $|L_1 L_2 L_3 L_4| \geq |\Delta|/5300$  for all  $(x, y, z, t) \equiv (x_0, y_0, z_0, t_0) \pmod{1}$ . If the  $L$ 's are conjugate forms in a quartic field, then  $x_0, y_0, z_0, t_0$  may be chosen rational. — These theorems improve on earlier results by H. Davenport [this *Zbl.* **36**, 163; **37**, 308; **39**, 31; *Proc. London math. Soc.*, II. Ser. **53**, 65—82 (1951)]. The proofs depend on simple set-theoretical considerations and on Minkowski's theorem on lattice points in convex bodies. — The paper is unfortunately not free of misprints; in particular, read  $(k-2)/2(k-1)$  instead of  $2(k-1)/(k-2)$  in formula (4) and  $v_0, u_0$  instead of  $v, u$  in formula (7). *K. Mahler.*

**Gastinger, Walter:** Über die untere Grenze der positiven Werte reeller quadratischer Formen. *Monatsh. Math.* **56**, 49—60 (1952).

The author considers numbers  $p_n$ , depending only on  $n$ , with the property that

$$(1) \quad 0 < P(x_1, \dots, x_n) \leq p_n |D|^{1/n}$$

has always an integer solution, where  $P$  is an indefinite quadratic form of determinant  $D \neq 0$ . Blaney (this *Zbl.* **31**, 204) has shown that  $p_n = 2^{n-1}$  will do. In the present paper it is shown that if an admissible  $p_{n-1}$  has been found, then  $p_n$  can be taken to be

$$(2) \quad p_n = \text{Max} \{ \alpha_n, (4 \alpha_{n-1})^{(n-1)/n}, (4 p_{n-1}/3)^{(n-1)/n} \},$$

where  $\alpha_n$  is a number defined similarly to  $p_n$ , when  $P$  is a definite form. The reviewer remarks that an  $\varepsilon_0$  appears to be mislaid between equations (17) and (18) and that what is actually proved is  $\inf_{P>0} P \leq p_n |D|^{1/n}$ , instead of (1). — The author

now uses the known estimate  $\alpha_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \Gamma \left( 1 + \frac{n+2}{2} \right) \right\}^{2/n}$  to deduce numerical values of  $p_n$  and to show that  $p_n = (4/3)^{(n-1)/2}$  for  $n \geq 18$ . The reviewer confesses his complete inability to follow the argument here. The author first shows that the first term of (2) is less than the second and so can be disregarded. He then proposes to compare the second and third terms but remarks „Statt  $(4 p_{n-1}/3)^{(n-1)/n}$  kann man, indem man von  $p_1 = 1$  ausgeht und rekursiv schließt,  $(4/3)^{(n-1)/2}$  setzen“. This could be done only if the second term of (2) were always less than  $(4/3)^{(n-1)/2}$ , which, however, is true only for  $n \geq 18$ . *J. W. S. Cassels.*

**Sanov, I. N.:** Neuer Beweis eines Satzes von Minkowski. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **16**, 101—112 (1952) [Russisch].

A new proof of the Minkowski-Hlawka theorem on symmetric star-bodies in  $n$ -space of volume  $< 2\zeta(n)$  (E. Hlawka, this *Zbl.* **28**, 206). The proof uses ideas of the author going back to 1941 [I. N. Sanov, *Učenyje Zapiski Leningrad. gos. Univ.* **111**, 32—46 (1949)]. For other recent work (not cited here) see C. L. Siegel, *Ann. of Math.*, II. Ser. **46**, 340—347 (1945), and C. A. Rogers, this *Zbl.* **36**, 27.

*J. W. S. Cassels.*

**Kuipers, J. and B. Meulenbeld:** Some properties of continued fractions. *Acta math.* **87**, 1—12 (1952).

Let  $\alpha > 0$  be irrational with convergents  $P_n/Q_n$ , so  $|\alpha - P_n/Q_n| < Q_n^{-2}$ . It is known that an irreducible fraction  $P/Q$  satisfying (\*)  $|\alpha - P/Q| < Q^{-2}$  is of



one of the forms

$$\frac{P_n}{Q_n}, \quad \frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{P_n + P_{n-1}}{Q_n + Q_{n-1}}, \quad \frac{P''_n}{Q''_n} = \frac{(a_{n+1} - 1)P_n + P_{n-1}}{(a_{n+1} - 1)Q_n + Q_{n-1}}$$

where  $a_{n+1}$  is the  $(n+1)$ -th partial quotient. The authors show that sufficient conditions for  $P'_n/Q'_n$ ,  $P''_n/Q''_n$  to satisfy (\*) are  $a_{n+1} \geq 2$ ,  $a_{n+1} \leq a_n + 1$  and  $a_{n+1} \geq 2$ ,  $a_{n+1} \leq a_{n+2} + 1$  respectively. They deduce the following theorems of W. T. Scott (this Zbl. 22, 308): (I) For every  $\alpha$  there are infinitely many  $P/Q$  satisfying (\*) of each of the three types odd/odd, odd/even, even/odd. (II) Given  $k < 1$  there are everywhere dense  $\alpha$  with only a finite number of solutions of  $|\alpha - P/Q| < k/Q^2$  of a specified type. They also discuss the distribution of the convergents between the three types.

J. W. S. Cassels.

**Bergmann, G.: Periodische Ketten linearer Transformationen.** J. reine angew. Math. 190, 108—124 (1952).

This paper continues earlier attempts to generalize the continued fraction algorithm to three dimensions (G. Bullig, this Zbl. 23, 112, 113) but is practically self-contained. The objects to which the algorithm is applied are here three dimensional real matrices  $\mathfrak{A} = (a_{ij})$ . The author confines her attention to the case when  $|\mathfrak{A}| \neq 0$  and the elements of each column of  $\mathfrak{A}$  and of  $(\mathfrak{A}^{-1})'$  are linearly independent over the rational field. (This corresponds in two dimensions to the case when the continued fraction is infinite). Two such matrices  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  are said to be equivalent if there is a matrix  $\mathfrak{Z}$  with integer coefficients and  $|\mathfrak{Z}| = \pm 1$  such that  $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z} \mathfrak{B}$ . The author sets up a definition of a reduced matrix and shows that every matrix is equivalent to a reduced matrix. For  $p = 1, 2, 3$  and a reduced matrix  $\mathfrak{A}$  the author defines a  $p$ -neighbour  $\mathfrak{A}_p$  which is reduced and equivalent to  $\mathfrak{A}$ . More generally, if  $p_1 p_2 \dots p_s$  is any sequence of the numbers 1, 2, 3 define  $\mathfrak{A}_{p_1 p_2 \dots p_s}$  to be the  $p_s$ -neighbour of  $\mathfrak{A}_{p_1 p_2 \dots p_{s-1}}$ . The author proves the following two results: 1) If  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  are two reduced equivalent matrices then  $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_{p_1 \dots p_s}$  for some  $s$  and some numbers  $p_1, \dots, p_s$ . 2) Let  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  be two reduced matrices and for all  $s$  and  $p_1 \dots p_s$  let the transformations taking  $\mathfrak{A}$  into  $\mathfrak{A}_{p_1 \dots p_s}$  and  $\mathfrak{B}$  into  $\mathfrak{B}_{p_1 \dots p_s}$  be the same. Then  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ , where  $\mathfrak{C}$  is a diagonal matrix; and conversely. We say that  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  are proportional in this case. — The author defines a reduced matrix  $\mathfrak{A}$  to be (purely) periodic if there are  $s$  and  $p_1, \dots, p_s$  such that  $\mathfrak{A}_{p_1 \dots p_s}$  is proportional to  $\mathfrak{A}$  and unequal to it. She also defines a cubic matrix  $\mathfrak{A}$  to be one in which  $a_{11}, a_{21}, a_{31}$  are linearly independent elements of a cubic field and the second and third columns of  $\mathfrak{A}$  are algebraic conjugates of the first. She proves 3) that the necessary and sufficient condition for a matrix to be periodic is that it should be proportional to a cubic matrix. This corresponds to the well-known theorem of Lagrange on periodic continued fractions. — The proofs depend, partly, on a geometric interpretation of the criterion for reduction and contain some detailed case-by-case argumentation.

J. W. S. Cassels.

**Hofreiter, Nikolaus: Über die Approximation von komplexen Zahlen durch Zahlen des Körpers  $K(i)$ .** Monatsh. Math. 56, 61—74 (1952).

In analogy to a result on real numbers due to A. V. Prasad (this Zbl. 34, 28), the author proves that for  $C \geq \sqrt{2 - \sqrt{3}} = C_0$  say, there exists to every complex number  $\xi$  a pair of co-prime Gaussian integers  $p, q$  satisfying  $|\xi - p/q| \leq C/|q|^2$ , while there is no such pair when  $\xi_0 = (1 + \sqrt{-3})/2$ ,  $C < C_0$ . In other words, the circles in the Gaussian plane of centres  $p/q$ ,  $(q, p) = 1$ , and radii  $C/|q|^2$  cover the whole plane if  $C \geq C_0$ , but do not do so if  $C < C_0$ .

K. Mahler.

**Kanagasabapathy, P.: Note on diophantine approximation.** Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 365—366 (1952).

By means of a result of H. Davenport [Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 815—21 (1946), Lemma 3], the author proves the following complement to a well-known theorem of Minkowski: „Let  $\delta > 0$  be given, and let  $k \geq k_0(\delta)$  be a sufficiently large positive integer. If  $\theta = k + \sqrt{k^2 + 1}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}(\theta - 1)$ , then  $|(x - \theta y - \alpha)y| > \frac{1}{4} - \delta$  for all integers  $x, y$  with  $y \neq 0$ .“

K. Mahler.

**Korobov, I. M.: Einige mehrdimensionale Probleme der Theorie der diophantischen Approximationen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 13—16 (1952) [Russisch].

Let  $q \geq 2$  be an integer. A construction of systems of real numbers  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  in form of series is given for which the points  $(\alpha_1 q^\nu, \dots, \alpha_s q^\nu)$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ )

are uniformly distributed (mod 1); e. g. one may take

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(k) v_k}{q^{v_k} - 1} (q^{-n_{k-1}} - q^{-n_k}) \quad (i = 1, 2, \dots, s);$$

with the symbols defined as follows:  $\varphi(k)$  is integral valued and tends to  $\infty$  with  $k$ ;

$\tau_k = q^k$ ;  $n_k = \sum_{v=1}^k \varphi(v) q^v$ ;  $\varphi_1(k), \dots, \varphi_s(k)$  are integral valued functions such that

$\varphi_i(k) = o(q^k)$  and that  $\sum_{i=1}^s m_i \varphi_i(k)$  has only finitely many zeros if the integers  $m_1, \dots, m_s$  do not all vanish; finally the integers  $v_k$  are connected with the systems  $\varrho'_k(q)$  considered by the author in his paper (this Zbl. 36, 311).

K. Mahler.

**Carlitz, L.: Diophantine approximation in fields of characteristic  $p$ .** Trans. Amer. math. Soc. **72**, 187—208 (1952).

Many parts of real Diophantine Analysis possess their analogues in the field of all Laurent series  $\sum_{-\infty}^m c_k x^k$  ( $m < \infty$ ) with coefficients  $c_k$  in a given constant field  $F$ .

Particularly simple results hold if  $F = GF(p^n)$  is a finite Galois field. The author shows that in this special case the classical methods can be taken over with very little change. He so derives analogues to Kronecker's theorem on the simultaneous inhomogeneous approximations of several numbers, and to Weyl's theory of trigonometrical sums and uniform distribution of sequences (mod 1).

K. Mahler.

**Koksma, J. F.: A diophantine property of some summable functions.** J. Indian math. Soc., n. Ser. **15**, 87—96 (1952).

Es sei  $\{f_n(x)\}$  eine reelle Funktionenfolge. Gilt für irgendein  $x$  für jede nach 1 periodische, im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion  $g(t)$  die Limesrelation

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n g(f_v(x)) = \int_0^1 g(t) dt$$

so liegen die Zahlen  $f_v(x)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) (mod 1) gleichverteilt [vgl. z. B. Weyl, Math. Ann. **77**, 313—352 (1916)]. Für die Funktionenfolge  $f_v(x) = v^\alpha x$  ( $\alpha > 0$ ;  $v = 1, 2, \dots$ ) liegen die Zahlen  $f_v(x)$  (mod 1) für jedes irrationale  $x$ , also für jedes  $x$  mit Ausnahme einer Nullmenge gleichverteilt. Es erhebt sich die Frage, wann die Limesrelation (1) für fast jedes  $x$  (d. h. für alle  $x$  mit Ausnahme höchstens einer Nullmenge) gilt, wenn die Voraussetzung der  $R$ -Integrierbarkeit der Funktion  $g(t)$  durch die schwächere:  $g(t)$  gehöre zu  $\mathcal{L}^2$  ersetzt wird. Diese Frage wurde für spezielle  $\{f_v(x)\}$  von mehreren Autoren: Erdős (dies. Zbl. **34**, 72), Raikoff (dies. Zbl. **14**, 397), Khintchine [Math. Z. **18**, 289—306 (1923)] und Kac-Salem-Zygmund (dies. Zbl. **32**, 274) behandelt. Verf. bewies (J. F. Koksma, dies. Zbl. **38**, 191) folgenden Satz: ist  $g(t)$  eine periodische Funktion mit der Periode 1,  $g(t) \in \mathcal{L}^2$  und gilt für die Koeffizienten  $c_k$  der Fourierreiheentwicklung von  $g(t)$

$$(2) \quad g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k t}, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \frac{R_p}{p} < \infty \quad \text{mit} \quad R_p = \sum_{v=p+1}^{\infty} |c_v|^2,$$

so gilt (1) für fast jedes  $x$ , wenn die Funktionenfolge  $f_v(x)$  noch folgendes erfüllt:  $f'_v(x)$  existiert für jedes  $v = 1, 2, \dots$ , ist entweder nicht-abnehmend oder nicht-zunehmend und es gilt,  $A_v = \max(f'_v(0)^{-1}, f'_v(1)^{-1})$  gesetzt,  $\sum_{v=m}^{n+m} A_v = O(n)$  für beliebiges ganzes  $m$ . In der vorliegenden Arbeit wird der Spezialfall  $f_v(x) = vx$  behandelt. Folgender Satz wird bewiesen: Ist  $g(t)$  periodisch nach Eins,  $g(t) \in \mathcal{L}^2$  und genügen die Koeffizienten der Entwicklung (2) folgender Bedingung:

$$(3) \quad \sum_{v=1}^{\infty} |c_v|^2 \omega(v) < \infty \quad \text{mit} \quad \omega(v) = \sum_{d|v} \frac{\log^2 d}{d},$$

so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n g(vx) = \int_0^1 g(t) dt$$

für fast alle  $x$ . Dieser Satz ist (natürlich nur für den Spezialfall  $f_v(x) = vx$ ) schärfer als der allgemeine Satz des Verf., da (3) leicht aus  $\sum_{p=2}^{\infty} R_p \frac{(\log \log p)^3}{p \log p} < \infty$  gefolgert werden kann und



so aus der schwächeren Voraussetzung  $\sum_{p=2}^{\infty} R_p \frac{(\log \log p)^3}{p \log p} < \infty$  statt  $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{R_p}{p} < \infty$  auf (1) geschlossen werden darf. Wegen der Einzelheiten muß auf die Arbeit verwiesen werden.  
P. Szűsz.

**Sapiro-Pjateckij, I. I.:** Über eine Verallgemeinerung des Begriffs der Gleichverteilung der Bruchteile. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 669—676 (1952) [Russisch].

Verf. nennt eine Folge  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ,  $0 \leq \theta_k < 1$ , fast-gleichverteilt, wenn folgendes gilt: Sei  $P_N(\alpha, \beta)$  die Anzahl der  $\theta_k \in [\alpha, \beta]$  mit  $k \leq N$ . Dann soll  $\beta - \alpha$  Häufungswert von  $P_N(\alpha, \beta)/N$  sein, für alle  $\alpha, \beta$  mit  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ . Als Hauptresultat ergibt sich: Sei  $n_1 < n_2 < \dots$  eine Folge, für die eine der beiden Bedingungen erfüllt ist: 1. Wenn  $K_r(s)$  die Lösungszahl von

$$n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_r} = n_{i'_1} + n_{i'_2} + \dots + n_{i'_r} \quad (i_k, i'_k \leq s)$$

ist, so gibt es ein  $r$  mit  $K_r(s) = O(s^{2r/n_s})$ . 2. Die Folge  $n_1 < n_2 < \dots$  ist eine dichte Teilfolge einer Folge  $n'_1 < n'_2 < \dots$ , für die  $(\alpha n'_k) \bmod 1$  gleichverteilt ist, für alle  $\alpha$  mit eventueller Ausnahme von abzählbar vielen  $\alpha$ . — Dann gilt: Die Folge  $\theta_k = \alpha n_k - [\alpha n_k]$  ist höchstens für abzählbar viele  $\alpha$  nicht fast-gleichverteilt. An einem Beispiel wird gezeigt, daß in der Behauptung des Satzes das „fast“ wesentlich ist. Im Falle, daß  $n_1 < n_2 < \dots$  eine Folge positiver Dichte ist, wird ein Satz gezeigt, aus dem folgt: Die Menge der  $\alpha$ , für die  $(\alpha n_k)$  nicht gleichverteilt mod. 1 ist, kann mit Intervallen der Längen  $d_k$  überdeckt werden, für die  $\sum |d_k|^\varepsilon$  beliebig klein wird ( $\varepsilon > 0$  beliebig).  
K. Prachar.

**Davenport, H. and P. Erdős:** Note on normal decimals. Canadian J. Math. 4, 58—63 (1952).

Verff. zeigen folgenden Satz: Es sei  $f(x)$  ein Polynom in  $x$  vom Grad  $g$ , dessen Werte für  $x = 1, 2, \dots$  natürliche Zahlen sind. Dann ist die Dezimalzahl  $0, f(1)f(2)\dots$  normal. Ist  $N(n, t)$  die Anzahl, mit der eine feste Kombination von  $k$  Ziffern unter den Ziffern von der  $(n+1)$ -ten bis zur  $t$ -ten Ziffer einer Dezimalzahl vorkommt,  $N(t) = N(0, t)$ , so heißt eine Zahl normal, wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{10^k}$ . Der Beweis ver-

läuft so: Es ist für  $t > u$   $N(u, t) \leq N(t) - N(u) \leq N(u, t) + (k-1)$ . Ist für festes natürliches  $n$   $x_n$  die größte ganze Zahl  $x$ , für welche  $f(x)$  weniger als  $n$  Ziffern besitzt [es ist  $x_n \sim \alpha(10^{1/g})^n$  für  $n \rightarrow \infty$ ,  $\alpha$  Konstante], nimmt die letzte Ziffer in  $f(x_n)$  den  $t_n$ -ten Platz in  $0, f(1)f(2)\dots$  ein [ $t_{n+1} - t_n = n(x_{n+1} - x_n)$ ], so genügt es zu zeigen  $N(t_n, t) = 10^{-k}(t - t_n) + o(t_n)$  für  $n \rightarrow \infty$  ( $t_n < t \leq t_{n+1}$ ). Hier genügt es den Fall  $t = t_n + nX$  ( $X$  ganz) zu betrachten. Ist nun  $\theta(z)$  definiert als 1 wenn  $z$  (modulo 1) einer Zahl kongruent ist, welche in einem Intervall der Länge

$10^{-k}$  liegt und sonst 0, so ist  $N(t_n, t) = \sum_{x=x_{n+1}}^{x_n+X} \sum_{m=k}^n \theta(10^{-m} f(x)) + O(x_{n+1} - x_n)$ ,

und es ist zu zeigen, daß die Doppelsumme  $= 10^{-k} nX + o(n(x_{n+1} - x_n))$  für  $0 < X \leq x_{n+1} - x_n$  ist. Alles ist gezeigt, wenn für jedes feste  $\delta > 0$ ,  $\delta n < m < (1-\delta)n$ ,  $\sum_{x=x_{n+1}}^{x_n+X} \theta(10^{-m} f(x)) = 10^{-k} X + o(x_{n+1} - x_n)$  gleichmäßig in  $m$  ist.

Diese Summe kann aber nach geläufigen Methoden [vgl. Koksma, Diophantische Approximationen, Berlin 1936, SS. 91—92; dies. Zbl. 12, 396] behandelt werden und läuft auf die Abschätzung der Weylschen Summe

$$S_{n,m,v} = \sum_{x=x_{n+1}}^{x_n+X} \exp(2\pi i 10^{-m} v f(x))$$

hinaus, welche durch die Weylsche Ungleichung geleistet wird. Die Verff. zeigen noch schärfer: Für jedes  $\varepsilon$  und  $k$  ( $\varepsilon > 0$ ,  $k$  natürliche Zahl) sind fast alle Zahlen  $f(1), f(2), \dots$   $(\varepsilon, k)$ -normal (zur Definition vgl. Besicovitch, dies. Zbl. 9, 200).

E. Hlawka.

Steinberg, R. and R. M. Redheffer: Analytic proof of the Lindemann theorem. Pacific J. Math. 2, 231—242 (1952).

Im Anschluß an seinen Transzendenzbeweis für  $e$  [Math. Ann. 43, 216 (1893)] bemerkt Hilbert, daß man diesen auch zu einem Beweis des Lindemannschen Satzes ausbauen kann. Dies wird hier in ausführlicher und sehr übersichtlicher Weise durchgeführt. Dem allgemeinen Beweis wird der Hilbertsche Transzendenzbeweis für  $e$  in einer Fassung „for classroom use“ vorangestellt. F. Kasch.

Spencer jr., S. M.: Transcendental numbers over certain function fields. Duke math. J. 19, 93—105 (1952).

Sei  $F$  ein Körper beliebiger Charakteristik und  $\Phi = F[x_1, \dots, x_w]$  der Polynomring in den Unbestimmten  $x_1, \dots, x_w$  mit Koeffizienten aus  $F$ . Ist  $G$  ein Polynom aus  $\Phi$  vom Grad  $g$  und  $k$  eine reelle Zahl größer als 1, so erhält man durch  $|G| = k^g$  eine nichtarchimedische Bewertung von  $\Phi$  und damit auch vom Quotientenkörper  $F(x_1, \dots, x_w)$  von  $\Phi$ .  $\Phi^*$  bezeichne die perfekte Hülle von  $F(x_1, \dots, x_w)$  bei der angegebenen Bewertung. Die Bezeichnungen algebraisch und transzendent beziehen sich im folgenden stets auf  $F(x_1, \dots, x_w)$ . — In Theorem 1 soll ein Satz von G. Faber [Math. Ann. 58, 552 (1904)] auf derartige Körper übertragen werden.

Verf. behauptet: Wenn  $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i t^i$ ,  $C_i \in F(x_1, \dots, x_w)$ , für alle  $t \in \Phi^*$  konvergiert und wenn unendlich viele Zahlen  $n = n_1, n_2, \dots$  existieren, so daß für alle  $n' > n$  gilt:

$$(1) \quad |C_{n'}| < |G_n|^{-k_n} \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty,$$

wobei  $G_n$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von  $C_0, C_1, \dots, C_n$  bezeichnet, dann ist  $f(t)$  für alle algebraischen Werte  $t \neq 0$  transzendent. Diese Behauptung ist jedoch unzutreffend, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei  $F$  irgendein Körper.  $\Phi = F[x]$  und

$$f(t) = 1 - t + t^2/x^2 - t^3/x^2 + t^4/x^4 - t^5/x^4 + \dots,$$

dann sind mit  $n_i = 2i + 1$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) und  $k_{n_i} = n_i$  alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt, aber es ist  $f(1) = 0$ . — Beim Beweis des Verf. wird in den ersten Zeilen fälschlich von (1) auf das Bestehen der Ungleichung

$$(2) \quad 0 < \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} C_i t^i \right| < |G_n|^{-k_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \infty,$$

geschlossen. Von da ab folgt Verf. dem Faberschen Beweis und zeigt damit tatsächlich, daß Theorem 1 gilt, falls man statt (1) fordert, daß bei festem  $t$  unendlich viele Zahlen  $n = n_1, n_2, n_3, \dots$  existieren, für die (2) erfüllt ist. Damit ist dieser Satz auch in der Formulierung dem von Faber analog. — In den weiteren Sätzen, in denen  $F$  als Galoisfeld der Charakteristik  $p$  vorausgesetzt wird, werden Ergebnisse von L. J. Wade [Duke Math. J. 8, 701—720 (1941); 11, 755—758 (1944)] mit der gleichen Beweisordnung wie bei Wade verallgemeinert. Als Beispiel sei Theorem 9

angegeben: Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} G_k e_k^q$  ist transzendent, falls die  $G_k$  Polynome sind und die folg.

Bedingungen gelten:  $G_k |G_{k+1}|$ ; Grad  $G_0 \geq 1$ ;  $e_0 < e_1 < \dots$ ;  $q \geq 2$  und  $p \nmid e_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). F. Kasch.

## Analysis.

● Vogel, Alfred: Klassische Grundlagen der Analysis. Leipzig: S. Hirzel Verlag 1952. IX, 194 S. mit 17 Figuren. DM 8.50 geh.

Im ersten und zweiten Kapitel werden die natürlichen Zahlen und die positiven rationalen Zahlen im wesentlichen nach dem bekannten Buche von Landau behandelt. Im dritten Kapitel werden die rationalen Zahlen als Klassen von äquivalenten Differenzen eingeführt. Das vierte Kapitel enthält den Begriff des Limes einer Zahlenfolge und die Einführung der reellen Zahlen als Klassen von äquivalenten Intervallschachtelungen. Im fünften Kapitel behandelt Verf. die Begriffe von Menge, Mächtigkeit, Verknüpfung von Mengen, Kardinalzahl, Verknüpfung von Kardinalzahlen. — Dem knappen Telegrammstil von Landau gegenüber ergänzt Verf. die Definitionen und Beweise mit zahlreichen Bemerkungen und Erklärungen und gibt Ausblick auf die Begriffsbildungen der modernen Algebra. Á. Császár.

Monna, A. F.: Sur une transformation simple des nombres  $p$ -adiques en nombres réels. Indagationes math. 14, 1—9 = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 1—9 (1952).

Es sei  $T$  eine Abbildung der positiven reellen Zahlen in die  $p$ -adischen Zahlen



die der reellen Zahl  $a = \sum_{n=-t}^{\infty} a_n p^{-n-1}$  ( $0 \leq a_n \leq p-1$ ) [wo die Entwicklung so zu wählen ist, daß eine unendliche Anzahl der ganzen Zahlen  $a_n$  von Null verschieden sei] die  $p$ -adische Zahl  $\alpha = \sum_{n=-t}^{\infty} a_n p^n$  zuordnet. Verf. untersucht die Haupteigenschaften (z. B. die Stetigkeit) dieser Abbildung, sowie die der inversen Abbildung  $T^{-1}$ ; deren Wichtigkeit liegt in der Tatsache, daß sie gestatten, gewisse Aussagen über reelle Zahlen unmittelbar in solche über  $p$ -adische Zahlen und umgekehrt zu übersetzen. So z. B. verbindet  $T$  die Lebesgueschen Maßtheorien des reellen und des  $p$ -adischen Zahlkörpers miteinander.

*L. Fuchs.*

**Ruderman, H. D.:** Two new inequalities. Amer. math. Monthly 59, 29—32 (1952).

Es wird durch dreifache Induktion der folgende Satz bewiesen:  $\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ij} \leq$

$\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m a'_{ij}$ , wo  $a_{ij} \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) und  $a'_{ij}$  durch Umordnen der Reihen in nicht-wachsende Ordnung erhalten wurde:  $a'_{11} \geq a'_{12} \geq \dots$   
 $\dots \geq a'_{in}$ . Auch  $\prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij} \geq \prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a'_{ij}$  wird etwas umständlicher bewiesen.

*J. Aczél.*

### Mengenlehre:

● **Cantor, Georg:** Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Translated and provided with an introduction and notes by Philip E. B. Jourdain. New York: Dover Publications, Inc. VII, 211 p. \$ 1.25.

Übersetzung ins Englische der Arbeiten von Georg Cantor: Math. Ann. 46, 481—512 (1895) und 49, 207—246 (1897). In einer ausführlichen Einleitung (über ein Drittel des Buches) legt der Übers. die historische Entwicklung des Funktionsbegriffs und der reellen Zahlen unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses von Weierstraß auf Cantor dar. [Vgl. dazu die Arbeiten des Übers. in Arch. der Math. u. Phys., III. Ser. 10, 254—281 (1906), 14, 289—311 (1909); 16, 21—43 (1910); 22, 1—21 (1913).] Die Übersetzung ist sorgfältig durchgeführt und in zweifelhaften Fällen sind die entsprechenden deutschen Ausdrücke hinzugefügt. Relativ zu der ausgedehnten Einleitung wäre ein entsprechendes Nachwort mit einer Darstellung der Fortschritte seit ca. 1915 am Platze gewesen.

*G. H. Müller.*

**Bachmann, H.:** Vergleich und Kombination zweier Methoden von Veblen und Finsler zur Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Commentarii math. Helvet. 26, 55—67 (1952).

Fortsetzung der Untersuchungen des Verf. über das „Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen“ (Terminologie und Symbolik wie in dies. Zbl. 41, 21). Verf. vergleicht die Veblensche Methode mit der Finslerschen (vgl. dies. Zbl. 42, 280) und beweist, daß schon das Veblensche Originalverfahren (um so mehr also das Veblen-Bachmannsche Verfahren) allgemeiner ist als das letztere [es sei bemerkt, daß das obige Problem mit Hilfe des Auswahlaxioms bejahend lösbar ist; s. Finsler, loc. cit. und Ref., C. r. Acad. Sci., Paris 234, 175—177 (1952)]. Verf. kombiniert nun das Verfahren von Finsler mit dem verallgemeinerten Verfahren von Veblen folgendermaßen: Statt  $\varphi_0(\xi) = \omega^\xi$  nimmt er die Normalfunktion  $\Psi_0(\xi)$ , mit der eine zu  $\Phi_1$  analoge Folge  $\Phi'_1$  von Normalfunktionen entsteht; die so kombinierte Methode ist ebenso zugkräftig wie die Veblen-Bachmannsche Methode. [ $\varphi_\alpha(\xi, \eta)$  ( $\alpha, \xi, \eta < \omega_1$ ) seien die Finslerschen Funktionen; dann wird die Folge  $\varphi_1(0, \omega), \dots, \varphi_\xi(\omega, \omega)$  ( $\xi < \omega_1$ ) als die Funktion  $\Psi_0(\xi)$  bezeichnet; also z. B.  $\Psi_0(2) = \omega^2$ ,  $\Psi_0(4) = \omega^{\omega^{\omega}}$ ,  $\Psi_0(5) = \varepsilon$ .]

*G. Kurepa.*

Kurepa, G.: On a characteristic property of finite sets. *Pacific J. Math.* **2**, 323--326 (1952).

The author calls a partially ordered set  $S$  ramified if for each  $x$  in  $S$  the set of elements  $y$  of  $S$  such that  $y \leq x$  form a chain, i. e. a subset of  $S$  every pair of elements of which are comparable. He defines an anti-chain to be a set of elements no two of which are comparable. He proves that for a nonvoid set  $S$  to be finite it is necessary and sufficient that in every ramified partial ordering of  $S$  every maximal chain meets (i. e. has a point in common with) every maximal anti-chain. In his proof of the sufficiency of the condition he makes tacit use of the Axiom of Choice, or at least of the hypothesis that every infinite set contains a denumerable subset. He observes that the theorem would not be true without the restriction that the partial ordering be ramified. Finally he poses two questions: „Is there a nonvoid partially ordered set in which there is no maximal anti-chain which meets all maximal chains?“ „Is there a nonvoid partially ordered set in which there is no maximal chain which meets all maximal anti-chains?“ — The reviewer observes that the answer to both of these questions is „yes“. In fact there are ramified partially ordered sets with the property that no anti-chain meets all maximal chains and no chain meets all maximal anti-chains. An example of such a set is the set whose elements are the finite sequences of integers, partially ordered by putting  $(m_1 \dots m_k) \leq (n_1 \dots n_{k'})$  when  $k \leq k'$ ,  $m_i = n_i$  for  $i < k$ , and  $m_k \leq n_k$ . There also exist finite (but not, of course, ramified) partially ordered sets satisfying the conditions of the second question, e. g. the set consisting of six elements  $x_1, \dots, x_6$  with  $x_1 > x_2 < x_3 > x_4 < x_5 > x_6 < x_1$ . But every partially ordered set satisfying the conditions of the first question is necessarily infinite; in fact (again assuming that every infinite set contains a denumerable subset) this gives rise to another characteristic property of finite sets, viz.: „A nonvoid set  $S$  is finite if and only if in every partial ordering of  $S$  (or, in every ramified partial ordering of  $S$ ) there exists an anti-chain meeting all maximal chains“.

*J. C. Shepherdson.*

Thurston, H. A.: The structure of an operation. *J. London math. Soc.* **27**, 271—279 (1952).

Es wird die Frage untersucht, wann eine in einer Menge  $S$  erklärte Funktion  $f$  von  $n$  Argumenten, also eine Abbildung von  $S^n$  in  $S$ , aus Funktionen mit weniger als  $n$  Argumenten in einer vorgeschriebenen Weise aufgebaut werden kann, also im Falle  $n = 6$  etwa:  $f(x_1, \dots, x_6) = g(h_2(h_1(x_1, x_2), x_3, x_4), h_3(x_5, x_6))$ . Bei unendlicher Menge  $S$  ist das stets möglich, bei endlicher Menge  $S$  dagegen genau unter der folgenden Bedingung: Sind die Argumente der Nummern  $i_1, \dots, i_m$  gerade diejenigen, welche bei der vorgeschriebenen Aufbauart unter einem der Funktionszeichen vorkommen (also unter  $h_2$  in dem obigen Beispiel 1, 2, 3, 4), so darf die zwischen  $m$ -tupeln  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_m})$ ,  $(y_{i_1}, \dots, y_{i_m})$  durch „ $f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$ “ für alle  $x_i, y_i \in S$  mit  $x_i = y_i$  und  $i \neq i_1, \dots, i_m$ “ in  $S^m$  definierte Äquivalenzrelation höchstens soviel Äquivalenzklassen besitzen wie  $S$  Elemente enthält. Die angegebene notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $f$  sich mittels einer einzigen Funktion (geringerer Argumentanzahl) aufbauen läßt, ist lediglich eine Umformulierung dieser Forderung auf Grund der bekannten Zerlegung einer Abbildung in eine Abbildung, welche jedem Element seine Äquivalenzklasse bei einer bestimmten Äquivalenzrelation zuordnet, und nachfolgender eindeutiger Abbildung.

*G. Pickert.*

Dowker, C. H.: A problem in set theory. *J. London math. Soc.* **27**, 371—374 (1952).

Let  $S$  be a set and  $\mathfrak{A}$  a proper ideal of sets  $\subset S$ . The author considers the following two conditions: I. There is a transformation  $T$  of  $S$  into  $\mathfrak{A}$  such that for any two distinct points  $x, y \in S$  one has  $x \in T(y)$  or  $y \in T(x)$  or both. II. For each decomposition of  $S$  into two disjoint nonvacuous sets  $X, Y$  there is a mapping  $T$  of  $S$  into  $\mathfrak{A}$  such that the relations  $x \in X, y \in Y, x \neq y$ , imply  $x \in T(y)$  or  $y \in T(x)$  or both. — Obviously,  $I \Rightarrow II$ . The problem arises whether also  $II \Rightarrow I$ . The author proves that it is so at least provided that the cardinal  $kS$  of  $S$  is  $< \aleph_2$ . [In the proof of the L. (a): if  $S$  is union of  $\aleph_0$  sets  $A_n \in \mathfrak{A}$  ( $n < \omega$ ), then I, II are both satisfied, the sequence  $A_n$  is to be replaced e. g. by the sequence  $A'_n$  defined so that  $A'_1 = A_1$ ,  $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{v=1}^n A_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n-1$ ); otherwise the union  $T(x)$  of all the  $A_n \ni x$  should not be necessarily an element of  $\mathfrak{A}$ .]

*G. Kurepa.*



**Rothberger, Fritz:** A remark on the existence of a denumerable base for a family of functions. *Canadian J. Math.* **4**, 117—119 (1952).

We say that a family  $F$  of real-valued functions defined on an abstract set  $X$  has a denumerable base if there exists a  $\omega$ -sequence  $\sigma$  of functions (not necessarily belonging to  $F$ ) such that each  $f \in F$  be limit of a subsequence of  $\sigma$ . The author considers the „Proposition  $(m, n)$ “ ( $m, n$  cardinals): „If the cardinal  $kF$  of  $F$  is  $m$ , and  $kX = n$ , then  $F$  has a denumerable base“. Since the continuum hypothesis implies the correctness of the proposition  $(c, c)$  [cf. Rothberger, *Ann. of Math.*, II. Ser. **45**, 397—406 (1944)], the author considers the proposition  $(c, c)$  independently upon the continuum hypothesis  $2^{\aleph_0} = c$ ; he proves: If there exists ordinals  $\alpha, \beta$  such that  $\aleph_\alpha < \aleph_\beta \leq c < 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\omega_\beta}$ , then the prop.  $(c, \aleph_\alpha)$  and in particular  $(c, c)$  is false; consequently,  $(c, c)$  is false provided  $2^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_2}$ ,  $\aleph_2 \leq c < \aleph_{\omega_2}$  or  $2^{\aleph_n} = \aleph_{\omega_{n+1}}$  ( $n < \omega$ ) respectively.

*G. Kurepa.*

**Aigner, Alexander:** Eine kombinatorische Systematik der Punktmengen. *Elemente Math.* **7**, 11—14 (1952).

Let  $M$  be a set of points of a euclidean space,  $M'$  its derived set, and  $M$  its complement. The author shows that if the points of the space are divided into 8 mutually exclusive classes according to their membership or non-membership of  $M, M', (\bar{M})'$  then two of these classes are null for all  $M$ . There are 64 possible ways of assigning „null“ or „non-null“ to the other 6 classes. The author shows that only 27 of these distributions can actually be realised and gives for each of these 27 an example of a set  $M$  for which it is realised.

*J. C. Shepherdson.*

**Rohrbach, Hans und Bodo Volkmann:** Zur Konvergenz von Mengenfolgen. *Math. Ann.* **124**, 298—302 (1952).

Für gewisse Untersuchungen innerhalb der additiven Zahlentheorie hatte Ref. im Bereich aller Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen den folgenden Konvergenzbegriff verwendet:  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \dots$  heißt konvergent, wenn es zu jeder ganzen Zahl  $x \geq 0$  ein  $k(x)$  gibt, so daß für alle  $n \geq k$  stets  $\mathfrak{A}_n \cap [0, x] = \mathfrak{A}_k \cap [0, x]$  gilt ( $[0, x] = \{0, 1, 2, \dots, x\}$ ), was also zufolge der Ganzzahligkeit der Elemente (Koordinaten) der  $\mathfrak{A}_n$  mit koordinatenweiser Konvergenz identisch ist.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{A}_n =$

$\bigcup_{x=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{k(x)} \cap [0, x]$  existiert dann für jede konvergente Folge stets. Verff. zeigen, daß dieser Konvergenzbegriff identisch ist mit dem auf E. Borel (s. Hausdorff, Mengenlehre) zurückgehenden, in der Mengenlehre geläufigen Konvergenzbegriff:  $\lim \mathfrak{A}_n$  sei die Menge aller Elemente, die in unendlich vielen  $\mathfrak{A}_n$  enthalten sind (die  $\mathfrak{A}_n$  sind dabei jetzt ganz beliebige Mengen),  $\lim \mathfrak{A}_n$  bedeute die Menge aller Elemente, die in fast allen  $\mathfrak{A}_n$  enthalten sind. Im Fall der Gleichheit dieser limites erhält man Äquivalenz mit obigem Konvergenzbegriff. Am Schluß erwähnen Verff. noch eine Bemerkung des Ref., daß nämlich die durch

$|\mathfrak{A}, \mathfrak{B}| = \frac{1}{n}$ , wenn  $\mathfrak{A} \cap [0, n-1] = \mathfrak{B} \cap [0, n-1]$ ,  $n \notin \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ,  $n \geq 1$ , ( $0 \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ )

eingeführte Metrik nicht archimedisch ist und dieselbe Konvergenz liefert. Verff. weisen ferner darauf hin, daß die Borelsche Konvergenzdefinition teilweise bequemere Beweisformulierungen gestattet als die von Ref. verwendete.

*H.-H. Ostmann.*

**Besicovitch, A. S.:** On two problems of Loewner. *J. London math. Soc.* **27**, 141—144 (1952).

Unter der  $K$ -Distanz zweier Punkte  $P$  und  $Q$  eines Kontinuums  $K$  im euklidischen Raum verstehe man die Länge des kürzesten Bogens, welcher  $P$  und  $Q$  innerhalb  $K$  verbindet; der  $K$ -Abstand zweier Teilmengen von  $K$  ist dann wie üblich durch die  $K$ -Distanz zu erklären. Mit punktmengentheoretischen Methoden wird

folgendes gezeigt: 1. Ist  $Q = \varphi(ABCD)$  ebenes topologisches Bild eines Quadrats  $ABCD$ , und ist der  $Q$ -Abstand der Bilder  $\varphi(AB)$ ,  $\varphi(CD)$  bzw.  $\varphi(BC)$ ,  $\varphi(DA)$  der Seitenpaare  $\geq a$  bzw.  $\geq b$ , dann hat  $Q$  einen Flächeninhalt  $\geq a \cdot b$ . 2. (Durch Konstruktion eines Beispiels). Es gibt ein topologisches Bild  $Z = \psi(C)$  eines 3-dimensionalen Kreiszylinders  $C$ , für welchen der  $Z$ -Abstand der  $\psi$ -Bilder von Grund- und Deckfläche von  $C$  gleich  $h$  und der Flächeninhalt jedes „Querschnitts“  $> a$  ist, obwohl sein Rauminhalt  $< \frac{1}{2} a \cdot h$ . Dabei ist „Querschnitt“ jedes in  $Z$  gelegene topologische Bild einer Kreisscheibe, dessen Begrenzung auf dem Mantelbild liegt und zu den Bildern von Grund- und Deckfläche fremd ist. *G. Aumann.*

## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

**Yosida, Kôsakû and Edwin Hewitt:** Finitely additive measures. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 46—66 (1952).

1. Abschnitt. Es sei  $X$  eine (Grund-)Menge,  $m$  ein Boolescher Verband von Teilmengen von  $X \in m$  und  $m$  der kleinste Boolesche  $\sigma$ -Verband über  $m$  (in  $X$ ). Ferner sei  $q|m$  eine beschränkte additive (reelle) Funktion und  $\Phi = \Phi(X, m)$  das System aller solcher  $q$ . Es wird  $q \in \Phi$  als  $\sigma$ -additiv bezeichnet, wenn  $q(A) = \sum q(A_n)$  falls  $A, A_n \in m$ ,  $A = \sum A_n$  und  $A_n A_k = 0$  für  $n \neq k$ . Es ist  $\Phi$  teilweise geordnet vermöge der Festsetzung:  $q \leq \psi$ , wenn  $\psi(E) - q(E) \geq 0$  für alle  $E \in m$ . Es heißt  $q \geq 0$  rein additiv, wenn jedes  $\sigma$ -additive  $\psi \in \Phi$  mit  $0 < \psi \leq q$  identisch Null ist; allgemein heiÙe  $q \in \Phi$  rein additiv, wenn sowohl  $q^+$  als  $q^-$  rein additiv ist. Die additiven bzw.  $\sigma$ -additiven bzw. rein additiven Funktionen bilden einen Vektorverband. — Es sei  $m = \bar{m}$ , ferner  $q \geq 0$  rein additiv und  $\psi \geq 0$   $\sigma$ -additiv; dann existieren  $B_n \in m$  mit  $B_n \supset B_{n+1}$  und  $q(B_n) = q(X)$  sowie  $\lim \psi(B_n) = 0$ . — Jedes  $q \in \Phi$  läÙt sich auf genau eine Weise darstellen als Summe eines  $\sigma$ -additiven  $q_s$  und eines rein additiven  $q_r$ . — 2. Abschnitt. Es sei  $k$  ein Boolescher  $\sigma$ -Verband von Teilmengen von  $X$ , ferner  $T \subset X$  beliebig und  $q$  ein in  $k$  enthaltenes  $\sigma$ -System mit der Eigenschaft, das aus  $Q \in q$ ,  $A \subset T$  und  $A \subset Q$  folgt  $A \in q$ . Ist  $x|_T$  reelle,  $k$ -meÙbare Funktion, so sei  $\|x\| = \inf \{ \alpha; [x] < \alpha \} \in q$  und  $\neq 0$  sonst  $\|x\| = +\infty$ . Der Banachraum aller  $x$  mit  $\|x\| < +\infty$  und  $x' = x''$  falls  $\|x' - x''\| = 0$  sei  $L_\infty$ . Zu jedem reellen linearen Funktional  $F|_{L_\infty}$  mit  $|F(x)| \leq C \|x\|$  für alle  $x$  (mit konstantem  $C$ ) existiert ein additives  $\varphi|_k$  mit  $F(x) = \int_T x d\varphi$  für alle  $x$  und mit  $\varphi(Q) = 0$  für  $Q \in q$ . Umgekehrt ist jedes solche

Integral ein Funktional der betrachteten Art. — 3. Abschnitt. Es werden Sätze über additive  $q$  bewiesen, wenn  $X$  die reelle Zahlgerade und  $\bar{m}$  der  $\sigma$ -Körper der Lebesgue-meÙbaren Mengen ist. Beispiel: Es existiert ein nicht identisch verschwin-

denes additives  $\varphi$  mit  $\int_{-\infty}^{+\infty} c(t) d\varphi = 0$  für alle beschränkten stetigen Funktionen  $c$ ;

übrigens ist  $q$  rein additiv. — 4. Abschnitt. Die bei der Integraldarstellung der linearen Funktionale  $F$  (2. Abschn.) auftretenden  $q$  können als  $\sigma$ -additive Borelsche Maße in einem gewissen kompakten Hausdorffraum betrachtet werden. — Wegen weiterer Einzelheiten sei auf die Arbeit selbst verwiesen. *O. Haupt.*

**Enomoto, Shizu:** A lattice-theoretic treatment of measures and integrals. Proc. Japan Acad. **28**, 14—18 (1952).

Verf. bringt eine komplizierte Verallgemeinerung der Carathéodoryschen Definition des äußeren Maßes und der Meßbarkeit in halbgeordneten Mengen durch Betrachtung einer halbgeordneten Menge  $\mathfrak{M}$  mit Nullelement, in der das Produkt zweier und die Summe abzählbar vieler Elemente gebildet werden können, jedoch nicht notwendig die Differenz.  $\mathfrak{M}$  besitze aber eine halbgeordnete Erweiterung  $\mathfrak{N}$  mit gleichem Nullelement, in der ebenfalls die Summe abzählbar vieler Elemente existiert und in der die Differenz  $B - BA$  vorhanden ist, falls  $B \in \mathfrak{N}$ ,  $A \in \mathfrak{M}$ .



Die in  $\mathfrak{M}$  gebildete Summe zweier Elemente aus  $\mathfrak{M}$  falle mit der in  $\mathfrak{N}$  zusammen (Anm. d. Ref.: vermutlich soll dasselbe auf abzählbar viele zutreffen, doch wird dies nicht gesagt). Ist  $B$  zu jedem  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) fremd, so sei  $B$  fremd zu  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ , falls  $B \in \mathfrak{M}$ ,  $A_n \in \mathfrak{N}$  oder  $A_n \in \mathfrak{M}$ ,  $B \in \mathfrak{N}$ . — Das äußere Maß  $\mu$  ist eine in der Menge  $\mathfrak{M}^*$  aller Differenzen  $A - AB$  mit  $A, B \in \mathfrak{M}$  erklärte nicht negative monotone Funktion, so daß  $\mu(UV) \leq \mu(UA_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(UA_{n+1} - UA_{n+1}A_n) + \mu(U - UV)$

gilt, wenn  $U \in \mathfrak{M}^*$ ,  $A_n \in \mathfrak{M}$ ,  $A_n \subseteq A_{n+1}$  und  $V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ .  $A$  heißt meßbar, wenn  $A \in \mathfrak{M}$  und  $\mu(U) = \mu(UA) + \mu(U - UA)$  für jedes  $U \in \mathfrak{M}^*$ . Neben den sinngemäß modifizierten elementaren Aussagen über die Meßbarkeit wird ein Erweiterungssatz für gewisse in Teilmengen von  $\mathfrak{M}$  definierte nicht negative endliche Funktionen angegeben. Beweise fehlen.

K. Krickeberg.

**Pauc, Christian:** *Mesure et prétopologie. Les théorèmes forts de Vitali établis sous des conditions de limitation locale de la dilatation en halo.* C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1119—1120 (1952).

Ausgehend von Arbeiten von Denjoy und A. P. Morse werden unter Benutzung lediglich pretopologischer (also mit Hilfe einer de Posselschen Ableitungsbasis  $\alpha$  allein erklärter) Begriffe starke Vitalische Überdeckungssätze aufgestellt. — (I) Definitionen. Es sei  $m_{|\beta}$  ein  $\sigma$ -endliches, in der Grundmenge  $R$  vollständiges Maß mit  $R \in \beta$  und mit dem  $\sigma$ -Ideal  $n$  der  $m$ -Nullmengen.  $m$  sei das durch  $m$  in  $R$  induzierte äußere Maß,  $M^*$  eine  $m$ -meßbare Hülle von  $M \subset R$ . Für die Ableitungsbasis  $\alpha$  bezüglich  $m_{|\beta}$  sei  $E = E(\alpha)$  die Menge aller  $x \in R$ , deren jedem (mindestens) eine „derivierende“ Moore-Smithsche Folge  $g(x) \in \alpha$  zugeordnet ist. Die Elemente  $V$  von  $g(x)$  heißen Konstituenten von  $g(x)$  oder von  $\alpha$ , ihre Gesamtheit sei mit  $v = v(\alpha)$  bezeichnet. Ein Teilsystem  $t$  von  $v$  heißt  $\alpha$ -feine Überdeckung von  $M \subset R$ , wenn zu  $m$ -fast jedem  $x \in M$  ein  $g(x)$  existiert, dessen Konstituenten sämtlich in  $t$  enthalten sind. — Ist eine reelle, endliche, positive Funktion  $d|v$  und ein  $a \geq 1$  sowie ein  $V_0 \in v$  gegeben, so bezeichnen wir als  $(d, a)$ -Halo  $H(V_0)$  des Kernes  $V_0$  die Vereinigung aller  $V \in v$  mit  $VV_0 \neq \emptyset$  und mit  $d(V) \leq ad(V_0)$ . — Pretopologische Begriffe. Es heiße  $x' \in ME$   $\alpha$ -innerlicher Punkt von  $M$ , wenn für jedes  $g(x')$  schließlich alle Konstituenten  $V \in g(x')$  Teilmengen von  $M$  sind. Nun sei  $I(M)$  bzw.  $F(M)$  die Menge der  $\alpha$ -innerlichen  $x \in ME$  bzw. derjenigen  $y \in E$ , zu welchen mindestens ein  $g(y)$  existiert, dessen Konstituenten sämtlich zu  $M$  nicht fremd sind. Die Menge  $G$  bzw.  $A$  heißt dann  $(D)$ -extern offen bzw.  $(D)$ -extern abgeschlossen, wenn  $EG \subset I(G)$  (mod  $n$ ) bzw.  $EA \supset F(A)$  (mod  $n$ ); und die  $EG$  bzw.  $EA$  werden dann als  $(D)$ -intern offen bzw. abgeschlossen und mit  $O$  bzw.  $C$  bezeichnet. Die  $G, A$  bzw.  $O, C$  bilden eine Nikodymsche, genannt externe bzw. interne, Pseudotopologie. — (II) Sätze von Vitali-Banachschem Typus. Wir erwähnen: Vor. (II, 1) Jedes  $V \in v$  ist extern abgeschlossen. — (II, 2) Es existiert ein  $a > 1$  und ein  $d|v$  derart, daß für  $m$ -fast jedes  $x \in E$  und jedes  $g(x)$  gilt  $\limsup [d(V) + (\overline{m}(H(V)):m(V))] < +\infty$ , wobei  $\limsup$  auf  $g(x)$  bezogen ist. — (II, 3) Zu jedem  $M \subset E$  mit  $\overline{m}(M) < +\infty$  existiert ein extern offenes  $G$  mit  $M \subset G$  und  $\overline{m}(G) < +\infty$ . — (II, 4) Für jedes  $x \in E$ , jedes  $g(x)$  und schließlich alle  $V \in g(x)$  gilt  $x \in V$ . Beh. Es besitzt  $\alpha$  die reduzierte starke Vitalische Eigenschaft, kurz st. Vit. E., d. h. Für jedes  $M \subset E$  existieren in jeder  $\alpha$ -feinen Überdeckung  $t$  von  $M$  abzählbar viele fremde  $V_r \in t$  mit  $M \subset \bigcup_r V_r$  (mod  $n$ ). — (III) Sätze von Vitali-Carathéodoryschem Typus. Wir erwähnen: Vor. (III, 1) wie (II, 1) und (II, 2) mit  $a = 1$ . — (III, 2). Ist  $M \subset E$  mit  $0 < \overline{m}(M) < +\infty$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig, so gibt es in jeder  $\alpha$ -feinen Überdeckung  $t$  von  $M$  abzählbar viele  $V_r \in t$  mit  $M \subset \bigcup_r V_r$  (mod  $n$ ) und  $m((\bigcup_r V_r) - M^*) < \varepsilon$ . — Beh. Es besitzt  $\alpha$  die st. Vit. E., d. h. Für jedes  $M \subset E$  und jedes  $\varepsilon > 0$  enthält jede  $\alpha$ -feine Überdeckung von  $M$  abzählbar viele fremde  $V_r$  mit  $M \subset \bigcup_r V_r$  (mod  $n$ ) und  $m((\bigcup_r V_r) - M^*) < \varepsilon$ . — Übrigens wird zu (II) auch eine hinreichende Bedingung angegeben dafür, daß für ein  $M \subset EG$  mit  $\overline{m}(G) < +\infty$  jedes System von endlich vielen fremden Konstituenten  $V_1, \dots, V_k$  zu einem abzählbaren System fremder Konstituenten  $V_r$  erweitert werden kann mit  $M \subset \bigcup_r V_r$  (mod  $n$ ); entsprechend für (III), wobei die  $V_1, \dots, V_k$  ebenso wie die  $V_{k+1}, \dots$  der gleichen (beliebigen)  $\alpha$ -feinen Überdeckung von  $M$  angehören sollen und neben  $M \subset \bigcup_r V_r$  (mod  $n$ ) noch  $m((\bigcup_r V_r) - M^*) < \varepsilon$  gelten soll, wenn  $m((v_1 \cup \dots \cup v_k) - M^*) < \varepsilon$  war.

O. Haupt.

**Pauc, Christian:** *Adaptation d'une mesure à une prétopologie. Passage de la propriété forte de Vitali réduite à la propriété complète.* C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1242—1243 (1952).

In der Differentiationstheorie der  $\sigma$ -additiven Mengenfunktionen im euklidischen  $E_n$  folgt die starke Vitalische Eigenschaft aus der reduzierten (vgl. vorst. Referat), weil jedes  $M \subset E_n$

in offenen Mengen  $T$  mit beliebig kleinem  $m(T - M^*)$  enthalten ist. Darin kommt eine Kopp-  
 lung (Adaptation) des Lebesgueschen Maßes an die Topologie im  $E_n$  zum Ausdruck. Verf. formu-  
 liert Entsprechendes im Rahmen der Pretopologie. (In den Bezeichnungen und Numerierungen  
 schließen wir an das vorstehende Referat an.) — IV. Adaptation eines Maßes an eine Pre-  
 topologie (externer Standpunkt). Vor. (IV, 1) Die intern offenen Mengen  $O$  sind  $m$ -meß-  
 bar, also auch die  $C$ . Zu jedem  $C$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein extern offenes  $G$  mit  $C \subset G$  und  
 $\bar{m}(G - C) < \varepsilon$  (Adaptationsaxiom); (IV, 2) Es ist  $E$  Vereinigung abzählbar vieler  $C$  mit  
 $m(C) < +\infty$ . — Es sei dann  $q \subset E$  (wobei  $E \in \mathfrak{z}$ ) und  $q'$  das System aller  $Q \in q$  derart, daß  
 zu jedem  $Q'$  und  $\varepsilon > 0$  ein extern offenes  $G$  existiert mit  $Q' \subset G$  und  $\bar{m}(G - Q') < \varepsilon$ . — Beh. (A)  
 Für  $Q \in q$  gilt  $Q \in q'$  genau dann, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $C$  existiert mit  $C \subset Q$  und  $m(Q - C) < \varepsilon$ .  
 Es ist  $q'$  ein  $\sigma$ -Körper mit  $E$  als größter Menge, ein  $\sigma$ -Körper ist also auch das System  $\mathfrak{z}' \subset \mathfrak{z}$   
 aller Mengen  $M' = M(R - E) + Q'$  mit  $M \in \mathfrak{z}$  und  $Q' \in q'$ . Die Verengung  $m'|\mathfrak{z}' = m|\mathfrak{z}$  von  
 $m|\mathfrak{z}$  heiße das an die Pretopologie extern adaptierte Maß. — (B) Fordert man noch  
 Vor. (II, 1) sowie für  $a$  die red. st. Vit. E., so besitzt  $q$  die st. Vit. E., wenn  $m$  durch  $m'$  ersetzt  
 wird. Ferner besitzt jedes  $m$ -Integral  $m$ -fast überall eine Ableitung nach  $a$ , die gleich ist einem  
 $m'$ -Integralen. (Beispiel vgl. dies. Zbl. 42, 58). — (V) Denjoybasen (Interner  
 Standpunkt). Vor. (V, 0) Die derivierenden Systeme  $g(x) \in a$  sind identisch mit den (ge-  
 wöhnlichen) Folgen  $\{V_n\}$ , für welche  $d(V_n) \rightarrow 0$  und  $x \in V_n$  für alle  $n$ . Dann ist durch das Kon-  
 stituentsystem  $v$  und durch die Funktion  $d|v$  schon  $a(v; d)$  und  $E(a) = E(v; d)$  bestimmt,  
 und entsprechend durch jedes Teilsystem  $t$  von  $v$  eine Ableitungsbasis  $a(t; d)$  sowie das zu-  
 gehörige  $E(a(t; d)) = E(t)$ ; (V, 1) = (II, 1); (V, 2) = (II, 2); (V, 3) = (II, 3); (V, 4) = (IV, 2).  
 — Beh. (A) Für jedes  $t \subset v$  ist  $E(t)$   $m$ -meßbar. Jedes  $C$  ist  $m$ -meßbar. Für die  $Q'' = \bigcup C_n$   
 (mod  $n$   $E$ ), wobei die  $C_n$  intern abgeschlossen sind, gilt die st. Vit. E. Diese  $Q''$  bilden einen  
 $\sigma$ -Körper  $q''$  und daher die  $M'' = M(R - E) + Q''$  mit  $M \in \mathfrak{z}$ ,  $Q'' \in q''$  ebenfalls einen  $\sigma$ -Körper  
 $\mathfrak{z}''$ . Es heiße  $m|\mathfrak{z}''$  das an die Pretopologie intern adaptierte Maß. — (B) Nimmt man,  
 wie in (IV) (B), die (Vor. (II, 1) und die) red. st. Vit. E. hinzu, so gilt der aus (IV) (B) vermöge  
 Ersetzung von  $m'$  durch  $m''$  sich ergebende Satz. (Beispiele dies. Zbl. 42, 283.) O. Haupt.

**Haupt, Otto et Christian Pauc:** La topologie approximative de Denjoy envi-  
 sagée comme vraie topologie. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 390—392 (1952).

Ausgehend von einer Ableitungsbasis  $\mathfrak{B}$  im Sinne von de Possel bezüglich  
 eines vollständigen, finiten oder  $\sigma$ -finiten Maßes  $m$  wird eine Topologie ( $D$ -Topologie)  
 erklärt, in welcher die im Denjoyschen Sinne approximativ-stetigen Funktionen  
 sich als „stetig“ erweisen: Ein Punkt  $a$  von  $A$  heißt  $D$ -Innenpunkt von  $A$ ,  
 wenn die innere  $\mathfrak{B}$ -Dichte von  $A$  in  $a$  existiert und gleich 1 ist;  $D$ -Umgebung von  $a$   
 heißt jede Menge, welche  $a$  als  $D$ -Innenpunkt besitzt. Ist  $f$   $m$ -meßbar, beschränkt  
 und im Punkt  $x$   $D$ -stetig, so hat das  $m$ -Integral von  $f$  in  $x$  eine  $\mathfrak{B}$ -Ableitung gleich  $f(x)$ .  
 Erfüllt  $\mathfrak{B}$  überdies die schwache Vitali-Eigenschaft (s. O. Haupt und Ch. Pauc,  
 dies. Zbl. 42, 282), so ist die Bildung der Menge der  $D$ -Innenpunkte idempotent,  
 so daß eine wirkliche Topologie vorliegt; hier sind die  $m$ -Nullmengen identisch mit  
 den Mengen erster Kategorie bezüglich der  $D$ -Topologie, und die  $m$ -meßbaren  
 Mengen stimmen überein mit den  $D$ -quadrierbaren Mengen [vgl. O. Haupt und  
 Ch. Pauc, dies. Zbl. 38, 34 (IV.)].

G. Aumann.

**Hayes, Charles A.:** Differentiation with respect to  $\Phi$ -pseudo-strong blankets  
 and related problems. Proc. Amer. math. Soc. 3, 283—296 (1952).

Definitions and notations —  $\mathfrak{S}$ : metric space.  $\sigma$ : union of the sets of ...  $\mathfrak{B}$ : family  
 of outer measures on  $\mathfrak{S}$  in the sense of Caratheodory, assuming finite values on bounded sets.  
 $\Phi$ ,  $\Psi$ : elements of  $\mathfrak{B}$ .  $F$  ( $B$ -blanket): function defined on  $A \subset \mathfrak{S}$ , whose values are families of  
 bounded Borel subsets  $\beta \in \mathfrak{S}$  and such that the infimum, for  $\beta \in F(x)$ , of the diameters of the  
 sets  $\beta + \{x\}$  be  $= 0$  in each point  $x$  of  $A$ . Spread  $\mathfrak{F}$  of  $F$ : union of all families  $F(x)$ .  $D(\Psi, \Phi, F, x)$ :  
 derivative of  $\Psi$  with respect to  $F$ , if it exists, the blanket  $F$  being used as a derivation basis.  
 $\mathfrak{G}$ : enumerable subfamily of  $\mathfrak{F}$ .  $P_{\mathfrak{G}}(x)$ : number of members of  $\mathfrak{G}$  containing  $x$ .  $\Psi$ -overlap of  
 $\mathfrak{G}$ :  $\int_{\sigma(\mathfrak{G})} (P_{\mathfrak{G}}(x) - 1) \cdot d\Psi(x)$ .  $F$  is called „ $\Phi$ -pseudo-strong“ if, corresponding to each subblanket  
 $F'$  of  $F$  with domain  $B$ , to each  $\Psi$  in  $\mathfrak{B}$  and each  $\varepsilon > 0$  there exists in the spread of  $F'$  a  
 countable family  $\mathfrak{G}$  for which (i)  $\Phi(A - \sigma \mathfrak{G}) < \varepsilon$ , and (ii)  $\Psi$ -overlap of  $\mathfrak{G}$ ,  $< \varepsilon$ . Theorem  
 — If  $F$  is  $\Phi$ -pseudo-strong, the derivative  $D(\Psi, \Phi, F, x)$  exists and is finite for  $\Phi$ -almost all  
 $x \in A$ . Sketch of the proof — (a) For each  $\varepsilon > 0$  and each  $s \subset \sigma$ ,  $\Gamma(\Psi_{\mathfrak{F}}, \varepsilon, s)$  denotes the  
 infimum of the numbers of the form  $\sum_{\mathfrak{G}} \Psi(\beta)$ , where  $\mathfrak{G}$  is such a countable family of subsets of  
 $\mathfrak{F}$  that  $\Phi(s - \sigma \mathfrak{G}) < \varepsilon$ .  $\Psi(s)$  is defined as  $\lim \Gamma(\Psi_{\mathfrak{F}}, \varepsilon, s)$  for  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . (b) If  $F'$  is a subblanket



of  $F$  with domain  $B$  and spread  $\mathfrak{F}'$ , then  $\mathfrak{F}'$  includes a countable family  $\mathfrak{G}$  for which  $\Phi(B \setminus \mathfrak{G}) < \varepsilon$ ,  $\sum_{t \in \mathfrak{G}} \Psi(t) \leq \bar{\Psi}(B) + \varepsilon$ . (c) If  $0 < \lambda < \infty$ ,  $F'$  is a subblanket of  $F$ ,  $B$  a subset of the domain of  $F'$  and the upper derivative  $D(\Psi, \Phi, F', x)$  is  $< \lambda$  for each  $x \in B$ , then  $\Psi(B) \leq \lambda \cdot \Phi(B)$ . (d) Cf. in A. P. Morse, Trans. Amer. math. Soc. 55, 205–235 (1944) the proof of Theorem 8. 5. [Remarks by the reviewer — (R 1) If  $\varrho$  denotes the  $\Phi$ -regular part of the restriction  $\Psi_{\mathfrak{A}}$  of  $\Psi$  to the Borel sets (Radon measure),  $\Psi$  is the outer measure corresponding to  $\varrho$ . The passage from  $\Psi$  to  $\bar{\Psi}$  is a regularization process in a double sense: Extraction of the singular part of  $\Psi_{\mathfrak{A}}$ . Regularization of an outer measure according to Caratheodory. (R 2) De Possel's technique (this Zbl. 15, 205) used in the proof of his Theorem IV, combined with a slightly adapted result by Haupt (this Zbl. 34, 183) concerning his „Lebesgue derivation bases“, yields the author's differentiation theorem and in addition the integration theorem: the indefinite integral of  $D(\Psi, \Phi, F, x)$  is  $\varrho$ . (R 3) In a joint paper with the rev., the author will prove that the pseudo-strength condition is necessary and sufficient for the validity of the Differentiation Theorem in the sense of de Possel (i. e. existence of the derivative almost everywhere and its equivalence with an integrand for all Radon measures of the metric space). Two constructions are given. In both  $\mathfrak{S}$  is an open unit square  $S$  of the euclidean plane,  $\Phi$  the Lebesgue measure  $L$ . In the first example the constituents of the blanket are squares surrounded by an enumerable, „weightless cloud“. Vitali's Theorem is not valid for the blanket. However it is  $L$ -pseudo-strong, even with  $L$ -overlap  $= 0$  for  $\mathfrak{G}$ . In the second example the constituents are squares surrounded by a finite number of small satellite squares. The blanket  $H$  satisfies the condition defining  $\Phi$ -pseudo-strength for  $\Psi = \Phi$  (equivalent to de Possel's weak Vitali condition). But a non-negative function  $g$  is constructed, belonging to  $L^{(p)}$  for all  $p \geq 1$ , such that for its indefinite  $L$ -integral  $\Omega$  and the corresponding outer measure  $\Omega'$ ,  $D(\Omega', L, H, t) = D(\Omega, L, H, t) = \infty$  for each  $t \in \Omega$ . The paper ends on the following theorem, whose lengthy but straightforward proof is not given: The union of a countable family of  $\Phi$ -pseudo-strong blankets whose domains are disjointed, is  $\Phi$ -pseudo-strong.

C. Y. Pauc.

Choquet, Gustave: Capacités. Premières définitions. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 35–37 (1952).

Choquet, Gustave: Extension et restriction d'une capacité. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 383–385 (1952).

Choquet, Gustave: Propriétés fonctionnelles des capacités alternées ou monotones. Exemples. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 498–500 (1952).

Choquet, Gustave: Capacitabilité. Théorèmes fondamentaux. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 784–786 (1952).

1. Note. (1) Ein System  $e$  von Teilmengen der Menge  $E$  heiße additiv (oder  $s$ -System) bzw. multiplikativ (oder  $d$ -System), wenn mit  $A_i \in e$ ,  $i = 1, 2$ , auch  $A_1 \cup A_2$  bzw.  $A_1 \cap A_2$  zu  $e$  gehört. Weiter sei  $f|e$  eine reelle (nicht notwendig endliche) Funktion. Bei additivem  $e$  setze man  $V_1(X, A_1) = f(X) - f(X \cap A_1)$ , allgemein  $V_{n+1}(X, A_1, \dots, A_{n+1}) = V_n(X, A_1, \dots, A_n) - V_n(X \cap A_{n+1}, A_1, \dots, A_n)$ . Ist nun  $V_n(X, A_1, \dots, A_n) \leq 0$  für beliebige  $X, A_1, \dots, A_n \in e$ , so heiße  $f$  alternierend (alternée) von der Ordnung  $n$ , kurz  $n$ -altern. Bei multiplikativem  $e$  erhält man aus  $V_n$  bei Ersetzung von  $\cup$  durch  $\cap$  einen Ausdruck  $A_n(X, A_1, \dots, A_n)$ ; ist dieser  $\geq 0$  für beliebige  $X, A_1, \dots, A_n \in e$ , so heiße  $f$  monoton von  $n$ -ter Ordnung, kurz  $n$ -monoton. Ist  $f$  zugleich 2-altern und 2-monoton, so ist  $f$  wachsend und genügt der Gleichung  $f(A_1 \cup A_2) + f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) + f(A_2)$ . — (2) Nunmehr sei  $E$  ein topologischer Raum.  $f|e$  heißt rechts-stetig in  $A$  bzw. auf  $e$ , wenn zu  $A$  bzw. zu jedem  $A \in e$  und zu jedem  $\delta > 0$  eine Umgebung  $U$  von  $A$  in  $E$  existiert derart, daß  $|f(X) - f(A)| < \delta$  für jedes  $X \in e$  mit  $A \subset X \subset U$ . Jede auf  $e$  wachsende und rechts-stetige Funktion heißt eine Kapazität auf  $e$ . Für beliebige Teilmengen  $T$  von  $E$  erklärt man  $f_*(T) = \sup \{f(X); X \subset T, X \in e\}$  als innere Kapazität und  $f^*(T) = \inf \{f_*(O); T \subset O, O \text{ offen}\}$  als äußere von  $T$ . Es ist  $f^*(T) = f^{**}(T)$ . Falls  $f_*(T) = f^*(T)$ , bezeichnet man  $f(T) = f_*(T)$  als Kapazität von  $T$  und  $T$  als kapazitabel; dazu gehört jedes  $T \in e$  und jedes offene  $T$ . — (3) Die Kapazität  $f|e$  heißt alternierend von der Ordnung  $A(\alpha)$ , kurz  $A(\alpha)$ -altern, wenn  $e$  additiv ist, abgesehen vom Fall  $\alpha = 1$ ,  $a$  und  $f$  einer der folgenden Bedingungen genügt:  $A(1, a)$  Für jede wachsende Folge von Teilmengen  $T_k$  von  $E$  ist  $f^*(T_k) \rightarrow f^*(\cup T_k)$ ;  $A(1, b)$  Zu beliebigem  $\varepsilon > 0$  existiert  $\eta > 0$ , so daß aus  $f(A_i) - f(B_i) < \eta$  für  $A_i, B_i \in e$  und  $B_i \subset A_i$ ,  $i = 1, 2$ , folgt  $f(A_1 \cup A_2) - f(B_1 \cup B_2) < \varepsilon$ ;  $A(n)$  Es ist  $f$   $n$ -altern,  $n \geq 2$ ;  $A(\infty)$  Es ist  $f$   $n$ -altern gleichzeitig für jedes  $n \geq 2$ . — (4) Dual wird die monotone Kapazität von der Ordnung  $M(\alpha)$  erklärt, wobei in  $M(1, a)$   $f_*$  an Stelle von  $f^*$  tritt [ $M(\alpha)$ -Monotonie]. — 2. Note. Sind  $e_1, e_2$  Systeme von Teilmengen von  $E$  mit  $e_1 \subset e_2$  und ist  $f|e_1$  Kapazität, so ist  $f^*|e_2$  Kapazität und heißt die Erweiterung von  $f$  auf  $e_2$ . Mit  $f|e$  ist auch jede Erweiterung von  $f$   $A(\alpha)$ -altern. Ein additives  $e$  heißt reich, wenn zu beliebigen offenen Mengen  $O_i \subset E$ ,  $i = 1, 2$ , und jedem  $A \in e$  mit  $A \subset O_1 \cup O_2$  zwei  $A_i \in e$  existieren, so daß  $A_i \subset O_i$  und  $A \subset A_1 \cup A_2$ . — Sätze: (1) Ist  $e$  additiv und reich, ferner die Kapazität  $f|e$   $A(\alpha)$ -altern, so

ist jede Erweiterung  $g|e'$  von  $f$  bei additivem  $e'$  ebenfalls  $A(\alpha)$ -altern. (2) Ist  $e_1$  additiv und multiplikativ, ferner  $f|e_1$   $M(\alpha)$ -monotone Kapazität ( $\alpha \geq 1, b$ ), so ist die Erweiterung  $g|e_2$  von  $f$  ebenfalls  $M(\alpha)$ -monoton, falls jedes  $A \in e_2$  kompakt ist oder jedes  $A \in e_2$  abgeschlossen ist im normalen  $E$ . — (3) Es sei  $e_1$  ein multiplikatives System aus kompakten Mengen und  $e_2$  das System der Durchschnitte beliebiger  $A \in e_1$ , ferner sei  $g|e_2$  Erweiterung der Kapazität  $f|e_1$ . Dann gilt  $g(B) = \inf \{f(A), B \subset A, A \in e_1\}$ ; ist überdies  $f$   $M(\alpha)$ -monoton ( $\alpha \geq 1, b$ ), so auch  $g$ . — 3. Note. Unter anderem wird eingeführt der Begriff des rechts-stetigen  $\cup$ -Homomorphismus; darunter versteht man eine Abbildung  $Y = \varphi(X)$  das additiven Systems  $e$  aus  $E$  in das System  $e'$  aus  $E'$  (wobei  $E, E'$  topologisch), so daß gilt: (a) Zu beliebigem  $A \in e$  und beliebiger Umgebung  $U'$  von  $A' = \varphi(A)$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $A$ , so daß für jedes  $X \in e$  mit  $X \subset U$  gilt:  $\varphi(X) \subset U'$ ; und (b)  $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$  für  $A_1, A_2 \in e$ . Ist nun  $f|e$   $A(\alpha)$ -altern, so auch  $f(\varphi)|e'$ . Von den angeführten Beispielen solcher Homomorphismen sei erwähnt:  $F$  und  $G$  seien „separiert“ (séparé),  $E = F \times G$  und  $\varphi$  die kanonische Projektion von  $E$  auf  $F$ . Die Elemente von  $e$  seien kompakt, ferner sei  $e' = \varphi(e)$  und aus  $\varphi(K) \in e'$  soll folgen  $K \in e$  für jedes kompakte  $K$  aus  $E$ . Setzt man  $g(O) := f(\varphi(O))$  für jedes offene  $O$  aus  $E$ , so ist  $\varphi(A)$   $f$ -kapazitable, wenn  $A$   $g$ -kapazitable ist. — Entsprechendes für rechts-stetige  $\cap$ -Homomorphismen. — Unter den Beispielen für  $A(\alpha)$ -alterne Kapazitäten seien nur die einfachsten hervorgehoben: Jedes positive Radonsche Maß auf einem lokal-kompakten Raum  $E$ . — Die klassische Kapazität für die Greensche Funktion eines Gebietes  $E$  im  $R_n$ . — Es sei  $E$  separiert; für  $T, X \in e$  sei  $f_T(X) = 0$  oder  $= 1$ , je nachdem  $T \cap X = 0$  oder  $\neq 0$  (sogenannte elementare alternierende Kapazität vom Index  $T$ ). — Kennzeichnung der positiven Radonschen Maße. Es sei  $E$  lokal kompakt, ferner  $k(E) = k$  das System der kompakten Teilmengen von  $E$ . Es ist  $f|k$  ein positives Radonsches Maß genau dann, wenn  $f$  endlich,  $f(0) = 0$ ,  $f$  wachsend und rechts-stetig und wenn  $f(K_1 \cup K_2) + f(K_1 \cap K_2) = f(K_1) + f(K_2)$ . — 4. Note. Sätze: (1) Es sei  $e$  additiv sowie reich und  $f|e$   $A(\alpha)$ -alterne Kapazität ( $\alpha \geq 1, b$ ). Dann gilt: Die Vereinigung endlich vieler  $f$ -kapazitabler Mengen  $A$  mit  $f(A) > -\infty$  ist  $f$ -kapazitable. (2) Ist  $e$  ein  $s, \delta$ -System derart, daß für jede fallende Folge von Mengen  $A_i \in e$  und jede Umgebung  $U$  von  $A = \bigcap A_i$  ein  $n_0$  existiert mit  $A_n \subset U$  für  $n > n_0$ , und ist  $f|e$  eine  $A(1, a)$ -alterne Kapazität, so ist jede Menge  $B \in e_{\sigma\delta}$   $f$ -kapazitable. Ist  $E$  metrisch und separabel sowie vollständig, ist ferner  $e = k(E)$ , so ist jede Borelsche oder analytische Menge in  $E$  kapazitable für jedes  $f$  von der Ordnung  $A(\alpha)$ , wo  $\alpha$  beliebig. — Analoges für  $M(\alpha)$ -Kapazitäten. — Den Schluß bilden Betrachtungen über nicht-kapazitable Mengen, insbesondere die Konstruktion von Klassen solcher.

O. Haupt.

**Davies, R. O.:** On accessibility of plane sets and differentiation of functions of two real variables. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 215—232 (1952).

Es handelt sich ausschließlich um Mengen  $M$  in der euklidischen Ebene  $E_2$ ; mit  $|M|$  wird das äußere, 2-dimensionale Lebesguesche Maß bezeichnet und „meßbar“ bedeutet „(2-dimensional) Lebesgue-meßbar“. Ist  $g$  eine Menge von Geraden, so sei  $T = T(g)$  die Menge aller Punkte aller Geraden von  $g$ . — Es wird (ohne Zuhilfenahme des Auswahlpostulates) gezeigt: (1) Ist  $M$  meßbar mit  $|M| < -\infty$ , so läßt sich eine Geradenmenge  $g$  konstruieren mit folgenden Eigenschaften: (a) Zu jedem Punkt  $p \in M$  und jedem Winkelraum  $w$  mit  $p$  als Scheitel existieren  $2^{\aleph_0}$  in  $w$  liegende Geraden  $g \in g$ ; (b)  $|M| = |T(g)|$ . — (2) Es läßt sich eine Menge  $M$  konstruieren derart, daß  $|E_2 - M| = 0$ , ferner daß zu jedem  $p \in M$  und jedem Winkelraum  $w$  mit  $p$  als Scheitel  $2^{\aleph_0}$  Geraden existieren, die in  $w$  liegen und deren jede mit  $M$  nur  $p$  gemeinsam hat [Verallgemeinerung eines Satzes von Nikodym, Fundamenta Math. 10, 116—168 (1927)]. — (3) Definition: Die reelle Funktion  $f(x, y)$  mit dem Definitionsbereich  $D$ , kurz  $f|D$ , heiße approximativ konstant in  $(x_0, y_0) \in D$  längs der durch  $(x_0, y_0)$  gehenden Geraden  $g$ , wenn auf  $g$  eine Menge  $L \subset D$  existiert mit folgender Eigenschaft: Es ist  $(x_0, y_0)$  (Maß-)Dichtepunkt von  $L$  bezüglich des 1-dimensionalen Lebesgueschen Maßes auf  $g$  und es ist  $f(x, y) = f(x_0, y_0)$  für jedes  $(x, y) \in L$ . Satz. Ist  $f|E_2$  meßbar, so kann eine meßbare Funktion  $g|E_2$  definiert werden, welche fast überall gleich  $f$  ist und folgende Eigenschaft besitzt: Zu fast jedem Punkt  $p \in E_2$  und jedem Winkelraum  $w$  mit  $p$  als Scheitel existieren  $2^{\aleph_0}$  in  $w$  liegende Geraden, längs deren  $g$  in  $p$  approximativ konstant ist. (4) Es sei  $Q$  ein Quadrat und  $f|Q$  stetig in  $Q$ . Dann kann bei beliebig gegebenen  $\varepsilon > 0$  eine Menge  $M$  mit  $|M| < \varepsilon$  definiert werden und eine in  $Q$  stetige Funktion  $g|Q$  mit  $f - g$  in  $Q - M$  und mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt  $p \in Q - M'$ , wobei  $|M'| < \varepsilon$ , und jedem Winkelraum  $w$  mit  $p$  als Scheitel gibt es  $2^{\aleph_0}$  in  $w$  liegende Geraden, längs deren  $g$  in  $p$  approximativ konstant ist. — Hinsichtlich weiterer Ergebnisse muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

O. Haupt.

**Cafiero, Federico:** Sulle famiglie di funzioni additive d'insieme, uniformemente continue. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 155—162 (1952).

Eine über einen totaladditiven Mengenkörper  $\mathfrak{K}$  definierte reelle totaladditive Mengenfunktion  $\varphi$  ist stetig in dem Sinne, daß für eine konvergente Mengenfolge



$M_n \subset \mathfrak{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(M_n) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n\right)$  gilt. Verf. betrachtet Familien gleichgradig stetiger Mengenfunktionen und beweist den Satz: Eine Folge von Funktionen  $\varphi_k$ , die denselben Voraussetzungen wie oben  $\varphi$  genügen, ist genau dann gleichgradig stetig, wenn sich aus jeder Folge von paarweise fremden gegen die leere Menge konvergierenden Mengen  $I_n$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $I_r$  so auswählen läßt, daß  $|\varphi_k(I_r)| < \varepsilon$  für  $k > \nu(\varepsilon)$ . Begriffsbildung und der Satz (sowie ein daraus gefolgelter) hängen sehr eng mit Arbeiten von Dubrovskij zusammen, deren zwei der Autor als ihm durch die Math. Reviews bekannt zitiert. Es sei jedoch wenigstens noch auf Dubrovskij, dies. Zbl. 32, 339, hingewiesen. Verf. gibt an, daß der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit für Mengenfunktionen von Caccioppoli (Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, IV. Ser. 25, 34—40 (1929) herrührt. *L. Schmetterer.*

**Talmadge, R. B.:** Representation of complete systems of functions. Duke math. J. 19, 203—218 (1952).

Soient  $S$  un espace topologique,  $s$  un ensemble de fonctions numériques bornées sur  $S$ ; on dit que  $s$  est complet si: 1)  $s$  contient les constantes; 2) lorsque  $f \in s$  et  $g \in s$ , on a  $\sup(f, g) \in s$ ,  $\inf(f, g) \in s$ ,  $f + g \in s$ ,  $f - g \in s$ ,  $f g \in s$ ,  $f/g \in s$  lorsque  $f/g$  est bornée; 3) la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions de  $s$  est dans  $s$ . Soit  $\Sigma(s)$  l'ensemble des parties de  $S$  définies par une équation de la forme  $f(x) \leq \lambda$  avec  $f \in s$ ,  $\lambda$  réel;  $\Sigma(s)$  est une lattice distributive. Alors,  $s$  est isomorphe (comme lattice) à l'ensemble des fonctions continues sur l'espace de Wallman (ce Zbl. 18, 332) associé à  $\Sigma(s)$ . Ce théorème est ensuite amélioré puis appliqué aux fonctions de Baire de  $S$  (ou plus généralement aux „fonctions de Baire sur  $s$ “ de  $S$ , obtenues en prenant les fonctions de  $s$  pour point de départ).

*J. Dixmier.*

**Bilharz, H.:** Integralumformungen auf alternierende Differentialformen. Math.-phys. Semesterber. 2, 238—250 (1952).

Rapide exposé synthétique des éléments du calcul différentiel extérieur et de son emploi dans la formule générale de Stokes. *J. Dufresnoy.*

**Aussem, M. V.:** Die Geometrie eines Doppelintegrals. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4 (50), 144—145 (1952) [Russisch].

**Volpato, Mario:** Sulla derivazione sotto il segno di integrale. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 146—150 (1952).

Die folgenden Voraussetzungen sichern bereits die bekannte Formel zur Differentiation des Integrals  $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$  für fast alle  $y$  des Intervalls  $c \leq y \leq d$ : die „Grenzen“  $\alpha(y)$  und  $\beta(y)$  sind dort totalstetig und monoton im engeren Sinne oder konstant mit  $\alpha(y) < \beta(y)$  für  $c < y < d$ ; im Bereich der Punkte  $x, y$  mit  $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  ist  $f(x, y)$  definiert und als Funktion von  $x$  meßbar; es gibt eine summierbare Funktion  $M(x)$ , so daß  $|f(x, y)| \leq M(x)$ ,  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M(x) |y_1 - y_2|$ . Zugleich erweist sich  $F(y)$  als totalstetig. Die Formel war bisher unter so allgemeinen Voraussetzungen nur im Fall fester Grenzen, d. h. bei konstantem  $\alpha(y)$  und  $\beta(y)$  bekannt.

*K. Krickeberg.*

**Pipes, C. J.:** Generalizations of a theorem of Sierpinski and Zygmund on continuous functions. Proc. Amer. math. Soc. 3, 237—243 (1952).

Verf. bildet Analoga zu einem Satz von Sierpinski und Zygmund über die Stetigkeit reeller Funktionen einer reellen Variablen, indem er den gewöhnlichen Stetigkeitsbegriff durch allgemeinere, „Stetigkeit bei Vernachlässigung gewisser Mengen“, ersetzt. Es sei  $\pi$  ein System von Mengen reeller Zahlen, das mit jeder Menge auch ihre Teilmengen, mit höchstens abzählbar vielen Mengen auch ihre Vereinigung, jede einelementige Menge, aber nicht die ganze Zahlengerade enthält. Die Funktion  $f$  heißt  $\pi$ -stetig im Punkte  $y$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung

$I$  von  $y$  gibt, so daß die Menge aller  $x \in I$  mit  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$  zu  $\pi$  gehört. Mit Hilfe eines Satzes über den Zusammenhang der Begriffe „ $\pi$ -stetig“ und „stetig“ sowie der Kontinuumshypothese wird gezeigt, daß es eine auf der ganzen Zahlengeraden definierte Funktion gibt, deren Einschränkung auf jede nicht zu  $\pi$  gehörige Menge nicht  $\pi$ -stetig ist. —  $f$  heißt approximativ stetig im Punkte  $y$ , wenn bei beliebigem  $\varepsilon > 0$  die Menge der  $x$  mit  $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$  in  $y$  die äußere Dichte Null hat. Dieser Stetigkeitsbegriff ordnet sich dem der  $\pi$ -Stetigkeit nicht unter. Ein Zusammenhang zwischen ihm und dem der Baireschen Funktion erlaubt jedoch, unter der Kontinuumshypothese zu beweisen, daß eine auf der ganzen Zahlengeraden definierte Funktion existiert, deren Einschränkung auf jede Menge positiven äußeren Maßes nicht approximativ stetig ist.

K. Krickeberg.

**Mohr, Ernst und Walter Noll: Eine Bemerkung zur Schwarzschen Ungleichheit.** Math. Nachr. 7, 55–59 (1952).

Die für eine in  $a \leq x \leq b$   $n$ -mal stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$  gültige Schwarzsche Ungleichung  $\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b [f(x)]^2 dx$  wird durch die folgende Gleichung verallgemeinert:

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 = (b-a) \sum_{v=0}^{n-1} \frac{(-1)^v}{v!(v+1)!} \int_a^b [f^{(v)}(x)]^2 ((b-x)(x-a))^2 dx + (-1)^n R_n,$$

wobei

$$R_n = \frac{2}{(n!)^2} \iint_{a \leq t \leq s \leq b} f^{(n)}(s) f^{(n)}(t) ((b-s)(t-a))^n ds dt,$$

oder auch

$$R_n = \iint_{a \leq x_n \leq \dots \leq x_1 \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq b} \left[ \int_{x_1}^{y_1} f^{(n)}(t) dt \right]^2 dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n.$$

Für beliebig oft differenzierbares  $f(x)$  gilt

$$\left[ \int_a^b f(x) dx \right]^2 = (b-a) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v!(v+1)!} \int_a^b [f^{(v)}(x)]^2 ((b-x)(x-a))^2 dx$$

mit konvergenter rechter Seite sicher dann, wenn eine Taylorentwicklung von  $f(x)$  um jeden Punkt von  $a \leq x \leq b$  mit Konvergenzradialen  $> \frac{1}{2}(b-a)$  möglich ist.

G. Aumann.

**Hayman, W. K.: An inequality for real positive functions.** Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 93–105 (1952).

Sätze: Ist  $f^{(n)}(x)$  für  $x > x_0$  positiv und nichtabnehmend, dann gibt es ein  $x_1$  derart, daß  $\inf_{h>0} \frac{f(r+h)}{h^n} \geq \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)$  für alle  $x > x_1$  ist. Sind außerdem auch

$\frac{f^{(k)}(x)}{f^{(k-1)}(x)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) alle positiv und nichtabnehmend in  $[x_0, \infty)$ , so gilt

dort  $g_n(x) = \inf_{h>0} \frac{f(r+h)}{h^n} / f^{(n)}(x) \geq \left(\frac{e}{n}\right)^n$  und es ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} g_n(x) = \left(\frac{e}{n}\right)^n$  bis auf

eine Menge endlichen Maßes. Ist  $f(x)$  positiv und  $n$ -mal stetig ableitbar für positive  $x$  und ist  $f^{(v)}(x)$  positiv und nicht-abnehmend für große  $x$ -Werte, so gilt für das Maß  $m(L)$  der bei gegebenem  $\varepsilon$  der Ungleichung  $g_n(x) < \left[\left(\frac{e}{n}\right)^n + \varepsilon\right]$  genügenden  $x$

mit  $0 \leq x < L$ :  $\liminf_{L \rightarrow \infty} \frac{m(L)}{L} > C(\varepsilon) > 0$ ; falls das Nichtabnehmen von  $f^{(n)}(x)$

nicht postuliert wird, so leitet Verf. nur  $\inf_{h>0} \frac{f(r+h)}{h^2} < (e+\varepsilon) f'(x)$  und  $\inf_{h>0} \frac{f(r+h)}{h^2} <$

$\left(\frac{e^2}{4} + \varepsilon\right) f''(x)$  für genügend große  $x$  ab. Die Beweise werden durch 11 Lemmata



erzielt. — Als Anwendung gibt Verf. den folgenden Satz: Ist  $M'(r)$  bzw.  $M''(r)$  für  $r > r_0$  stetig und ist  $f(x)$  eine nicht-rationale ganze Funktion derart, daß  $|f(z)| < M(|z|)$  für große  $|z|$ , dann gibt es zu jedem gegebenen  $\varepsilon$  so große  $|z|$ , daß  $|f'(z)| < (e + \varepsilon) M'(|z|)$  bzw.  $|f''(z)| < \left(\frac{e^2}{2} + \varepsilon\right) M''(|z|)$  gilt. *J. Aczél.*

**Nikol'skij, S. M.:** Über die Fortsetzung von differenzierbaren Funktionen von mehreren Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 521–524 (1952) [Russisch].

Bezüglich der Bezeichnungen vgl. dies. Zbl. 43, 56. Verf. beweist den Satz: Es seien  $m$ ,  $1 \leq m < n$ ,  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , und positive Zahlen  $r_1, \dots, r_n, \varrho_1, \dots, \varrho_m$  vorgegeben; es gelte:  $\varrho_k = r_k \kappa$ ,  $k = 1, \dots, m$ , mit  $\kappa = 1 - \frac{1}{p} \sum_{m+1}^n \frac{1}{r_i} > 0$ .

Die Funktion  $\varphi(x_1, \dots, x_m)$  gehöre zur Klasse:  $H_p^{(\varrho_1, \dots, \varrho_m)}(M_1, \dots, M_m)$ . Dann gibt es eine Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$  mit folgenden Eigenschaften: 1)  $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$ . 2)  $f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_m)$ . 3. Bei beliebigem  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$  gehört  $f$  bezüglich  $(x_1, \dots, x_m)$  zur Klasse  $H_p^{(\varrho_1, \dots, \varrho_m)}$ . Die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $x_i$  der Ordnungen  $b = 0, 1, \dots, \bar{r}_i$  ( $r_i = \bar{r}_i + \alpha_i$ ,  $\bar{r}_i$  ganz,  $0 < \alpha_i \leq 1$ ) genügen der Gleichung:

$$\lim \left( \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |f_{x_i}^{(b)}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) - f_{x_i}^{(b)}(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0)|^p dx_1 \dots dx_m \right)^{1/p} = 0,$$

wenn  $\sum_{m+1}^n |x_k - x_k^0| \rightarrow 0$  strebt und  $x_{m+1}^0, \dots, x_n^0$  beliebig sind. 4.  $\|f\|_p^{(m)} \leq$

$c_1 \|\varphi\|_p^{(m)} + c_2 \sum_1^m M_k$ ;  $c_1$  und  $c_2$  Konstanten; die Indizes  $(n)$  und  $(m)$  deuten an, daß die Normen sich auf die Räume  $R_n$  bzw.  $R_m$  beziehen. *W. Thimm.*

**Sengenhorst, Paul:** Über konvexe Funktionen. Math.-phys. Semesterber. 2, 217–230 (1952).

Es werden bekannte Definitionen und einfache Eigenschaften der konvexen sowie auch der monotonen Funktionen und der Funktionen, die rechts und links genommene Ableitungen besitzen, und der Zusammenhang zwischen diesen Funktionsgattungen erörtert. *J. Aczél.*

**Videnskij, V. S.:** Eine Folgerung aus einem Satz von S. N. Bernštejn über ganze Funktionen vom Geschlecht Null. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 421–424 (1952) [Russisch].

Eine ganze Funktion  $\Phi(x) = e^{p(x)}$  heißt von normalen Wachstum, ( $\Phi(x) \in N$ ), wenn  $p(x) > 0$  ist und wenn  $x p'(x)$  monoton mit  $x$  gegen unendlich strebt. Verf. beweist unter Bezugnahme auf Untersuchungen von S. Bernštejn (dies. Zbl. 42,

72): Ist  $e^{p(x)} \in N$  und konvergiert  $\int_{+1}^{\infty} x^{-2} p(x) dx$ , dann existiert eine ganze ge-

rade Funktion  $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}$  vom Geschlecht Null, die  $e^{p(x)}$  majorisiert:

$e^{p(x)} < F(x)$  für  $-\infty < x < +\infty$ . — Weiterhin leitet Verf. noch einige Kenn-

zeichnungen der Funktionen vom Geschlecht Null ab, z. B. zeigt er, daß mit  $\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n}$  auch  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n}| x^{2n}$  vom Geschlecht Null ist und umgekehrt. *W. Hahn.*

**Bernštejn, S. N.:** Über normal wachsende Gewichtsfunktionen und Majoranten endlichen Wachstums. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 257–260 (1952) [Russisch].

Verf. teilt auf Grund des im vorsteh. Referat bewiesenen Satzes die geraden Funktionen der Klasse  $N$  in zwei Teilklassen, je nachdem das angegebene Integral divergiert oder nicht, d. h. also, je nachdem die Funktion eine „Gewichtsfunktion“ ist oder sich majorisieren läßt. Die Eigenschaften der Majoranten werden näher

untersucht; sodann zeigt Verf., wie man die Begriffsbildungen auf nichtsymmetrische ganze Funktionen übertragen kann. Er untersucht diejenigen Funktionen näher, die auf der positiven Achse zu der einen Klasse gehören und auf der negativen zur anderen.  
*W. Hahn.*

**Zolotarev, G. N.:** Ein hinreichendes Kriterium für die lineare Abhängigkeit von Funktionen einer Veränderlichen. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 2 (48) 201—205 (1952) [Russisch].

Der folgende Satz wird bewiesen: Die  $(n-1)$ -fach differenzierbaren Funktionen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  sind linear abhängig (in einem abgeschlossenen Intervall) dann und nur dann, wenn der Rang der Matrix  $\|y_i^{(j)}(x)\|_{i=1, \dots, n; j=0, \dots, n-1}$  einer von  $x$  unabhängigen Konstante  $k < n$  und dem Rang der Matrix  $\|y_i^{(j)}(x)\|_{i=1, \dots, n; j=0, \dots, n-2}$  gleich ist.  
*R. Sikorski.*

**Taylor, A. E.:** L'Hospital's rule. *Amer. math. Monthly* 59, 20—24 (1952).

Article didactique dans lequel l'A. donne une nouvelle présentation de la démonstration permettant d'établir la règle dans tous les cas à la fois, puis rapelle d'autres démonstrations connues.  
*A. Revuz.*

**Phipps, C. G.:** Maxima and minima under restraint. *Amer. math. Monthly* 59, 230—235 (1952).

Expository article with interpretations of the Lagrange multipliers.

*Bo Kjellberg.*

### Allgemeine Reihenlehre:

**Berg, Lothar:** Über eine Abschätzung von Mathieu. *Math. Nachr.* 7, 257—259 (1952).

In Beantwortung einer von Schröder aufgeworfenen Frage (dies. Zbl. 35, 187; insbes. S. 258—260 der Arbeit) beweist Verf. die von Mathieu ohne Beweis angegebene Ungleichung  $s(c) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu}{(\mu^2 + c^2)^2} < \frac{1}{2c^2}$  ( $c > 0$ ) auf einfache Weise unter Verwendung der Eulerschen Summenformel. Darüber hinaus liefert der Beweis  $s(c) = 1/2 c^2 - 1/12 c^4 + O(1/c^6)$  für  $c \rightarrow \infty$ . Diese Abschätzung ist für große  $c$  besser als die neuerdings von Emersleben [*Math. Ann.* 125, 165—171 (1952)] auf eine ähnliche Art gewonnene Relation  $1/2 c^2 - 5/32 c^4 \leq s(c) < 1/2 c^2$  ( $c > 0$ ).  
*D. Gaier.*

**Chow, Hung Ching:** A note on summable series. *J. London math. Soc.* 27, 352—355 (1952).

Verf. beweist den folgenden Satz: Ist  $k > 0$ , so ist eine Reihe  $\sum a_n$  genau dann  $(C, k)$ -summierbar mit der Summe  $s$ , wenn gilt  $s_n^{k-1} + (n+k) b_{n+1}^k \rightarrow k s$ , wobei  $b_n^k = \sum_{v=n}^{\infty} \frac{S_v^{k-2}}{(v+k) A_v^{k-1}}$  ist,  $\left( A_n^k s_n^k = S_n^k = \sum_{v=0}^n A_{n-v}^k a_v, A_n^k = \binom{n+k}{n}, S_v^{-1} = a_v \right)$ . Für ganze  $k > 0$  ist der Satz bekannt [W. L. Ferrar, *J. London math. Soc.* 1, 175—179 (1926)]. Der Beweis erfolgt durch Zurückführung auf einen von Knopp und Hardy stammenden Satz, der genaue Bedingungen für  $C_1$ -Summierbarkeit angibt.  
*A. Peyerimhoff.*

**Aucoin, A. A.:** A generalization of Abel's transformation. *Proc. Amer. math. Soc.* 3, 120—125 (1952).

Für ganze Zahlen  $n \geq 0, k \geq 1, p \geq 1$  gilt (1) 
$$\sum_{j=n+1}^{n+k} A_j^p (b_j - b_{j+1}) - A_n^p b_{n+1} + A_{n+k}^p b_{n+k+1} - \sum_{i=0}^{p-2} \binom{p}{i+1} \sum_{j=n}^{n+k-1} A_j^{p-1-i} a_{j+1}^{i+1} b_{j+1}$$
 (die  $a_j, b_j$  beliebige Konstante,  $A_j = a_0 + \dots + a_j$ ). Beweis durch Induktion. Für  $p = 1$  ist (1) die Formel der Abelschen partiellen Summation. So wie man aus



dieser das Abelsche und verwandte Konvergenzkriterien gewinnt, erhält man aus (1) analoge Kriterien. Beispiel: Sei  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$  konvergent, die reelle Folge  $b_n$  monoton und beschränkt, und  $\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{p-1-i} a_{j+1}^{i+1} b_{j+1}$  für  $i = 0, \dots, p-2$  konvergent; dann ist  $\sum_{j=0}^{\infty} a_j^p b_j$  konvergent. W. Meyer-König.

**Karamata, J.:** Ein Satz über die Abschnitte einer Potenzreihe. Math. Z. 56. 219—222 (1952).

Das Abelsche Summierungsverfahren  $A$ , das auf der Grenzwertbildung  $\lim f(x)$  für  $x \rightarrow 1$  mit  $f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} u_v x^v$  beruht, wird abgewandelt. Sei  $N = N(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 1$  und  $f_N(x) = \sum_{v \leq N} u_v x^v$ ; dann wird  $\lim_{x \rightarrow 1} f_N(x)$  untersucht. Dieses  $A_N$ -Verfahren ist permanent und um so schwächer, je langsamer  $N(x)$  gegen  $\infty$  strebt. Sei  $t$  eine Konstante,  $\frac{1}{2} < t < 1$ . Satz 1: Aus  $\sum_{v \geq t} u_v x^v \rightarrow s$  für  $x \rightarrow 1$  folgt  $u_1 + \dots + u_n \rightarrow s$  für  $n \rightarrow \infty$  und umgekehrt. Das  $A_N$ -Verfahren ist also konvergenzgleich für (1)  $N(x) = (\log x)^{-1} \log t$ . Verf. bemerkt, daß dieser Satz Mercerscher Art aus einem allgemeinen Satz von H. R. Pitt (dies. Zbl. 20, 17) abgeleitet werden könnte, gibt jedoch einen elementaren Beweis. Satz 2: Aus (2)  $A\text{-}\sum u_v = s$  und (3)  $u_n = O(1/n)$  folgt  $A_N\text{-}\sum u_v = s$  mit  $N$  wie in (1). Dies ergibt sich aus dem Littlewoodschen Satz, daß aus (2) und (3) sogar die Konvergenz von  $\sum u_v$  folgt. Verf. beweist nun aber den Satz 2 direkt (übrigens für  $0 < t < 1$ ), womit unter Hinzunahme von Satz 1 ein neuer Beweis des Littlewoodschen Satzes gewonnen ist. — Verf. diskutiert noch das zu  $N(x) = (\log x)^{-1} \log t + (1-p)(\log x)^{-1} \log \log x^{-1}$ ,  $1 < p < 1$ , gehörige  $A_N$ -Verfahren. W. Meyer-König.

**Kuttner, B.:** On the „second theorem of consistency“ for Riesz summability. II. J. London math. Soc. 27, 207—217 (1952).

Fortsetzung einer im folgenden mit I bezeichneten Arbeit (dies. Zbl. 42, 66). Wieder handelt es sich um die Aussage  $P(k, \Phi)$ , jedoch jetzt für beliebiges, nicht notwendig ganzes  $k > 0$ . Satz 1: Sei  $r = k + \vartheta$  ( $r$  ganz,  $0 \leq \vartheta < 1$ ) und  $\Phi(t)$  für  $t \geq 0$  mit einer in jedem endlichen Intervall beschränkten  $(r+1)$ -ten Ableitung versehen; notwendig und hinreichend für die Richtigkeit von  $P(k, \Phi)$  ist dann die Bedingung (\*)  $\int_0^w t^k |D_w^{k+1} \{\Phi(w) - \Phi(t)\}|^k dt = O\{[\Phi(w)]^k\}$

für  $w \rightarrow \infty$ . Das Differentiationssymbol  $D_w^l = I_w^{-l}$  ist dabei durch  $I(l) I_w^l f(t) - \int_t^w f(u) (u-t)^{l-1} du$

( $t < w$ ;  $l > 0$ ) und die Rekursionsformel  $I_w^l f(t) = -\frac{d}{dt} I_w^{l+1} f(t)$  erklärt. Für  $0 < k < 1$  ist noch die (nicht sehr ernsthafte) Voraussetzung zu machen, daß  $\Phi'(t) \neq 0$  [also  $\Phi'(t) > 0$  wegen des Zunehmens von  $\Phi(t)$ ] ist. Satz 1 gilt in analoger Form mit einer Funktion  $\Phi(t)$ , die die Voraussetzungen erst für hinreichend große  $t$  erfüllt, und mit einer Konstanten  $A$  als unterer Integrationsgrenze in (\*). Verf. macht es wahrscheinlich, daß die relative Kompliziertheit des Kriteriums (\*) in der Natur des Problems liegt und daß eine lediglich einfache notwendige und hinreichende Bedingung nur für ganzes  $k$  existiert. Satz 1 gilt auch für ganzes  $k$ , jedoch ist in diesem Fall das Kriterium aus I befriedigender. Daß die im Referat zu I genannte Bedingung (1) nicht hinreichend für die Richtigkeit von  $P(k, \Phi)$  ist, wenn  $k$  nicht ganz ist, zeigt Satz 2: Sei  $k > 0$  und nicht ganz; dann gibt es ein  $\Phi(t)$ , das den in Satz 1 genannten Voraussetzungen genügt, so daß das genannte (1) richtig, jedoch  $P(k, \Phi)$  falsch ist. W. Meyer-König.

**Garreau, G. A.:** Methods of generating  $T$ -matrices. Indagationes math. 14, 237—244 (1952) = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 237—244 (1952).

Es sei  $\sigma_n > 0$ ,  $\sigma_n \rightarrow \infty$ . Es sei ferner  $f_n(x)$  eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit (1)  $\int_0^{\infty} |f_n(x)| dx < M$  für  $n > n_0$ ; (2) es gilt  $\lim_{\sigma_n} \frac{1}{\sigma_n} |f_n(x)| = 0$  gleichmäßig für  $0 \leq x \leq h$ ,  $h > 0$ ; (3)  $\lim_{\sigma_n} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = 1$ . Dann ist die Matrix

$(a_{nk}) = \left( \frac{1}{\sigma_n} \int_k^{k+1} f_n \left( \frac{u}{\sigma_n} \right) du \right)$  eine  $T$ -Matrix, d. h. limitiert jede konvergente Folge zu ihrem Grenzwert. Umgekehrt kann jede  $T$ -Matrix auf diese Weise erzeugt werden. Für  $f_n(x) = r(1-x)^{r-1}$  für  $0 \leq x \leq 1$ ,  $f_n(x) = 0$  für  $x > 1$ , und  $\sigma_n = n+1$  erhält man so z. B. das  $r$ -te Rieszsche Mittel. Ein analoges Resultat gilt für  $\gamma$ -Matrizen, die Reihen in Folgen gleichen Grenzwerts transformieren. Ein zweites spezielleres Verfahren zur Erzeugung von  $T$ -Matrizen wird behandelt: Es sei  $a_n \geq 0$ ,  $\pi_n = \prod_{p=1}^n (1 + a_p) = \sum_{p=0}^n \sigma_{np}$ ,  $\sigma_{np}$  die Summe aller Produkte mit  $p$  Faktoren  $a_i$ . Dann ist die durch  $a_{00} = 1$ ,  $a_{nk} = \frac{1}{\pi_n} \sigma_{n, n-k}$  für  $0 \leq k \leq n$ ,  $a_{nk} = 0$  für  $k > n$  erklärte Matrix eine  $T$ -Matrix, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi_n} \sigma_{n, n-k} = 0$  für jedes  $k$ .  $a_n = (1-r)/r$  ergibt die Euler-Knoppsche Matrix,  $a_n = n$  ergibt eine für die Taylorreihen im Summabilitätspolygon mit der Borelschen Matrix konsistente  $T$ -Matrix.

G. Köthe.

**Peyerimhoff, Alexander:** Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren. Math. Z. 55, 288—291 (1952).

Die Zahlen  $\varepsilon_r$  ( $r = 0, 1, \dots$ ) sollen Konvergenzfaktoren bei dem auf der Transformation  $\sigma_n = q^{-n} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (q-1)^{n-r} s_r$  beruhenden Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren  $E^k$  ( $k > 0$ , fest;  $q = 2^k$ ) heißen, wenn die Reihe  $\sum_{r=0}^{\infty} s_r \varepsilon_r$  konvergiert für alle  $E^k$ -limitierbaren Folgen  $s_r$ . Sind die  $\varepsilon_r$  Konvergenzfaktoren bei  $E^k$ , so ist notwendig (1)  $\varepsilon_n = O((2q-1)^{-n})$  für  $n \rightarrow \infty$ . Die Frage, ob es Folgen von Konvergenzfaktoren gibt, welche die Größenordnung (1) erreichen, wird positiv beantwortet durch den Nachweis: Für alle  $E^k$ -limitierbaren Folgen  $s_r$  konvergiert die Reihe  $\sum_{r=0}^{\infty} s_r (2q-1)^{-r}$ .

W. Meyer-König.

**Zeller, Karl:** Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren. Math. Z. 56, 134—151 (1952).

Ist  $A = (a_{nk})$  ein Matrixverfahren und ist  $\{x_k\}$  eine  $A$ -limitierbare Folge, d. h. ist  $x_n^A = \sum_k a_{nk} x_k$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergent, so nennt Verf. eine Folge  $\{s_k\}$  eine (zu  $\{x_k\}$  gehörige) Faktorfolge, wenn  $\{x_k s_k\}$   $A$ -limitierbar ist. Aus gewissen Voraussetzungen über die Matrix  $G = (g_{nk}) = (a_{nk} x_k)$  werden hinreichende Bedingungen für Faktorfolgen abgeleitet. Erfüllt z. B.  $G$  die Bedingungen  $Zr$  (d. h.  $\left| \sum_{k=r}^{\infty} g_{nk} \right| \leq M$ ) und  $\chi = 0$  (mit  $\chi = \lim_n \sum_k g_{nk} - \sum_k \lim_n g_{nk}$ ), so ist bei passend gewählter Folge  $\{q_i\}$  (monoton wachsend) jedes  $\{s_k\}$  mit  $\sum_{l=q_i+1}^{q_{i+1}} |As_l| = o(1)$  eine Faktorfolge. — Jedem Wirkfeld  $\mathfrak{A}$  eines Verfahrens  $A$  werden vier Unterräume  $\mathfrak{A}_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) zugeordnet. Es gehört  $\{x_k\}$  zu  $\mathfrak{A}_i$ , falls  $G$  gewisse Eigenschaften besitzt. Z. B. ist  $\mathfrak{A}_0$  erklärt durch  $\chi = 0$ ,  $\mathfrak{A}_3$  durch  $Zr_0$  (d. h.  $\lim_n \overline{\sum_{k=r}^{\infty} g_{nk}} = 0$ ) und  $Sp$  (d. h.  $\lim_n g_{nk}$  existiert). Die Unterräume  $\mathfrak{A}_i$  besitzen wichtige Eigenschaften; es werden u. a. Anwendungen auf die Beziehungen zwischen beschränkten divergenten und unbeschränkten Folgen in Wirkfeldern, Vergleichssätze und Taubersätze behandelt. (So wird z. B. gezeigt, daß alle Folgen  $\{x_k\} \in \mathfrak{A}_3$ , die einer gewissen Schwankungsbedingung genügen, konvergent sind. Beweis durch Anwendung der Landauschen Methode zum Beweis des  $O$ -Taubersatzes beim  $C_1$ -Verfahren). Die



Beweise werden z. Teil mit Hilfe der Sätze über Faktorfolgen erbracht. Fallen Unterräume  $\mathfrak{M}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) mit  $\mathfrak{M}_0$  zusammen (Verf. zeigt, daß für das  $C_1$ -Verfahren  $\mathfrak{M}_3 = \mathfrak{M}_0$  ist), so erhält man allgemeine Sätze über das Verfahren  $A$ .

*A. Peyerimhoff.*

**Pennington, W. B.:** A Tauberian theorem on the oscillation of Riesz means. J. London math. Soc. **27**, 199—206 (1952).

Sei  $\sum_0^\infty a_n$  eine Reihe mit reellen Gliedern,  $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$ ,  $\lambda_n \rightarrow \infty$ ,  $\kappa \geq 0$ ,  $A^\kappa(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n)^\kappa$ ,  $l^{(\kappa)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\kappa} A^\kappa(x)$ ,  $L^{(\kappa)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} x^{-\kappa} A^\kappa(x)$ .

Satz 1: Streben  $l^{(\kappa)}$  und  $L^{(\kappa)}$  beide gegen denselben endlichen Grenzwert  $A$  für  $\kappa \rightarrow \infty$ , so ist (1)  $l^{(\kappa)} = L^{(\kappa)} = A$  für genügend große  $\kappa$ ; genauer, ist  $l^{(\kappa_0)} > -\infty$ , so gilt (1) für  $\kappa \geq \kappa_0 + 1$ . Dieser Satz, mit Cesàroschen Mitteln  $C(\kappa)$  anstatt der Rieszschen Mittel  $R(\lambda, \kappa)$ , läßt sich unter Verwendung eines Taubersatzes für Abelsche Summierung sehr kurz beweisen, und J. E. Littlewood (dies. Zbl. **12**, 403) hat im Anschluß an den Beweis die Aufgabe gestellt, einen nicht über das Abelsche Verfahren führenden Beweis zu geben. Verf. gibt in diesem Sinn einen direkten Beweis, und zwar gleich von Satz 1. Der zentrale Beweisgedanke ist dem Beweis von A. E. Ingham für das High-Indices-Theorems beim Abelschen Verfahren (dies. Zbl. **16**, 397) entnommen. Verf. skizziert noch einen Beweis in der Linie des Littlewoodschen, der aber von schwierigeren Sätzen über die Summierung Dirichletscher Reihen Gebrauch machen müßte.

*W. Meyer-König.*

**Rajagopal, C. T.:** On a onesided Tauberian theorem. J. Indian math. Soc., n. Ser. **16**, 47—54 (1952).

Der einseitige Umkehrsatz des A-Verfahrens (Ref., dies. Zbl. **42**, 293) und ein Sonderfall desselben [Vijayaraghavan, J. London math. Soc. **2**, 215—222 (1927), Satz 8] wird folgendermaßen auf allgemeine  $\Phi$ -Verfahren erweitert: Satz A. Sei

für  $u > 0$ ,  $\varphi(u)$  positiv, zweimal differenzierbar,  $\varphi'(u) \leq 0$ ,  $\varphi(0) = 1$  und  $\int_u^\infty \frac{\varphi(u)}{u} du$  konvergent; sei weiter  $a(u)$  integrierbar in jedem endlichen Intervall,  $a(u) = 0$

für  $0 \leq u < 1$ , (1)  $u a(u) > -W$ ,  $W > 0$ , für  $u > 1$ . Aus  $\int_0^\infty \varphi(ut) a(u) du < M$

für  $t > 0$  folgt dann (2)  $\int_0^x a(u) du < W \log(-\varphi'(0) \log x) + M + W(1-c) + o(1)$ ,

( $x \rightarrow \infty$ ) wobei  $c = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\log t - \int_0^\infty \frac{\varphi(u)}{u} du \right\}$  ist. Satz a. Wird im Satz A

die Voraussetzung (1) durch  $\int_0^\infty \varphi(ut) a(u) du + W \log \log 1/t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ),

ersetzt, so folgt anstatt der Behauptung (2), daß  $\int_0^x a(u) du \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ). —

Indem diese Sätze mit den entsprechenden Sätzen (Delange, dies. Zbl. **39**, 64; Verf., dies. Zbl. **40**, 322), bei welchen die einseitige Bedingung  $u a(u) > O(1)$  durch  $u a(u) = O(1)$  ersetzt ist, verglichen werden, kommt der wesentliche Unterschied dieser beiden Bedingungen mehr zum Vorschein.

*J. Karamata.*

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

● **Vitali, G. e G. Sansone:** Moderna teoria delle funzioni di variabile reale. Parte II: Giovanni Sansone: Sviluppi in serie di funzioni ortogonali. (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie di matematica applicata.) Bologna: Nicola Zanichelli Editore 1952. 3. ed. VII, 614 p. Lire 7000.

(Parte I v. ce Zbl. 42, 55; 1. ed. 1936, ce Zbl. 13, 250, 16, 157; 2. ed. 1943, 1946). Cette 3<sup>ème</sup> édition du 2<sup>ème</sup> tome du traité bien connu diffère de la précédente par quelques adjonctions: étude du phénomène de Gibbs, applications des séries trigonométriques (distribution de la chaleur dans une plaque plane, inégalité isopérimétrique), compléments relatifs aux polynômes orthogonaux dans un intervalle infini et aux polynômes de Tchebychef, fonctions lipschitziennes d'ordre  $\alpha$ . La rédaction, toujours claire et élégante, s'est vue améliorée par l'introduction de quelques figures. Fournissant un exposé dont la simplicité n'est jamais obtenue aux dépens de la rigueur, l'ouvrage répond aux conditions que l'on est en droit d'exiger d'une monographie de mathématiques appliquées et qui ne sont pas toujours aussi pleinement satisfaites. Abrégé de la table des matières: Ch. I. Développements en séries de fonctions orthogonales et premières notions sur l'espace de Hilbert. Ch. II. Développements en séries de Fourier. Ch. III. Développements en séries de polynômes de Legendre et en séries de fonctions sphériques. Ch. IV. Développements en séries de Tchebychef-Laguerre et Tchebychef-Hermite. Ch. V. Approximation et interpolation. Ch. VI. Intégrale de Stieltjes. *A. Revuz.*

**Geronimus, Ja. L.:** Über die orthogonalen Polynome V. A. Steklovs. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 5—8 (1952) [Russisch].

Orthogonale Polynome von Steklov nennt Verf. die Polynome eines Orthogonalsystems, wenn alle Polynome des Systems unter derselben Schranke bleiben für alle  $x$  des Definitionsbereiches (oder eines Teiles davon). Es wird gezeigt: Sei  $p(\theta)$  eine Belegungsfunktion mit

$$\sup_{0 < h < \delta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(\theta + h) - p(\theta)|^2 d\theta < M \delta^\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq 2,$$

( $M$  Konstante) und fast überall in  $[0, 2\pi]$   $0 < m_1 \leq p(\theta) \leq m_2$ . Sei weiter  $P_n(z)$  das Orthogonalsystem in bezug auf den Einheitskreis und zur Belegung  $p(\theta)$ , d. h.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) P_n(e^{i\theta}) \bar{P}_m(e^{i\theta}) d\theta = \delta_{nm}.$$

Dann gilt  $|P_n(z)| \leq A$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) in  $|z| \leq 1$ . Mit  $x = \cos \theta$  und  $p(\theta) = w(\cos \theta)$   $|\sin \theta|$  kann dies in eine Aussage über die zur Belegung  $w(x)$ ,  $x \in [-1, +1]$ , gehörigen Orthogonalpolynome übersetzt werden. *K. Prachar.*

**Rudin, Walter:**  $L^2$ -approximation by partial sums of orthogonal developments. Duke math. J. 19, 1—4 (1952).

Sia  $\Phi_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) una successione di funzioni definite in  $(0, 1)$  ortogonali e normali, e completa in  $L^2$ . Sia  $s_n(x)$  la somma parziale  $n$ -esima della serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \int_0^1 f(t) \Phi_n(t) dt$ , sia  $V(f)$  la variazione totale della funzione  $f(x)$ ,  $(0, 1)$ . e si ponga

$$N(f) = \limsup \left| \frac{f(x) - f(t)}{x - t} \right| \quad (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1),$$

$$\mu_n = \limsup \frac{1}{V(f)} \left[ \int_0^1 \{f(t) - s_n(t)\}^2 dt \right]^{1/2} \quad [0 < V(f) < \infty],$$

$$\lambda_n = \limsup \frac{1}{N(f)} \left[ \int_0^1 \{f(t) - s_n(t)\}^2 dt \right]^{1/2} \quad [0 < N(f) < \infty].$$

Tra i risultati raggiunti dall'A. citiamo i seguenti: Teorema 1. a) Esiste una costante  $A > 0$ , tale che risulta  $\mu_n > A n^{-1/2}$  per ogni successione  $\Phi_n(x)$  soddisfacente alle condizioni indicate. b) Nel caso particolare (1)  $\Phi_n(t) = 2^{1/2} \cos(n-1)\pi t$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ;  $\Phi_1(t) \equiv 1$ ) è  $\mu_n = O(n^{-1/2})$ . Teorema 2. a) Esiste una costante  $B > 0$ , tale che risulta  $\lambda_n > B n^{-1}$  per ogni successione  $\Phi_n(x)$  soddisfacente alle ipotesi indicate. b) Nel caso speciale (1) è  $\lambda_n = O(n^{-1})$ . *S. Cinquini.*



**Lorch, Lee:** The Lebesgue constants for  $(E, 1)$  summation of Fourier series. Duke math. J. **19**, 45—50 (1952).

Die bei der Eulerschen Summierung der Fourierreihen auftretenden Lebesgueschen Konstanten sind

$$L_E(n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^n t \frac{|\sin(n+1)t|}{\sin t} dt.$$

Verf. beweist

$$L_E(n) = \frac{2}{\pi^2} \log n + \alpha + O(1/\sqrt{n}),$$

wo  $\alpha$  eine gewisse Konstante ist. Die asymptotische Entwicklung der Lebesgueschen Konstanten für gewöhnliche Konvergenz beginnt nach Féjer mit  $(4/\pi^2) \log n$ , hat also dieselbe Größenordnung. Wie Ref. zeigen konnte (dies. Zbl. **33**, 113), ist dies bei der Eulerschen Summierung der Legendreschen Reihen nicht mehr der Fall.

K. Prachar.

**Herriot, John G.:** Partial-sum couplings for double Fourier series. Duke math. J. **19**, 183—198 (1952).

The rectangular partial sums of the Fourier series of a function  $f(x, y)$ , Lebesgue integrable over  $|x| \leq \pi$ ,  $|y| \leq \pi$  and of period  $2\pi$  in  $x$  and  $y$ , are denoted by  $s_{m,n}(x, y)$ . The author studies the couplings

$$\begin{aligned} \varkappa_{m,n}(x, y; p, q) = & \frac{1}{4} [s_{m,n}(x, y) + (-1)^{p-1} s_{m,n}(x + p\pi/m, y) \\ & + (-1)^{q-1} s_{m,n}(x, y + q\pi/n) + (-1)^{p+q} s_{m,n}(x + p\pi/m, y + q\pi/n)], \end{aligned}$$

where  $p$  and  $q$  are integers. The main result is: Let  $f$  be continuous at  $(x, y)$  and  $\lambda \geq 1$  be given. Then to every  $\varepsilon > 0$  there correspond positive numbers  $H(\varepsilon)$  and  $N(\varepsilon, \lambda)$  such that

$$|\varkappa_{m,n}(x + h, y + k; p, q) - \frac{1}{4} [1 + (-1)^{p-1}] [1 + (-1)^{q-1}] f(x, y)| < \varepsilon$$

for all  $|h| \leq H$ ,  $|k| \leq H$  and all  $m, n \geq N$  such that  $m/n \leq \lambda$ ,  $n/m \leq \lambda$ . In particular, when  $h_m \rightarrow 0$ ,  $k_n \rightarrow 0$ ,

$$\varkappa_{m,n}(x + h_m, y + k_n; p, q) \rightarrow \frac{1}{4} [1 + (-1)^{p-1}] [1 + (-1)^{q-1}] f(x, y),$$

provided that  $m/n \leq \lambda$ ,  $n/m \leq \lambda$  for some  $\lambda \geq 1$ . This latter restriction cannot usually be removed. — Several applications to the study of the Gibbs Phenomenon are made. The results generalise those known for single variable Fourier series.

W. Rogosinski.

**Ivašev-Musatov, O. S.:** Über die Fourier-Stieltjes-Koeffizienten singulärer Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **82**, 9—11 (1952) [Russisch].

Für eine singuläre Funktion  $F(x)$  (stetig, monoton, Ableitung fast überall gleich 0) ist  $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^2$  mit  $c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx} dF(x)$  divergent. Verf. zeigt: Es sei eine für  $x \geq 0$  definierte Funktion  $\chi(x)$  mit folgenden Eigenschaften gegeben:

1.  $\psi(y) = \int_0^y \chi^2(x) dx \rightarrow \infty$  für  $y \rightarrow \infty$ , 2. für beliebiges  $\theta \geq 1$  und alle  $x$  ist

$$\frac{\chi(x)}{\chi(\theta x)} \sqrt{\frac{\psi(\theta x)}{\psi(x)} + 1} \leq \theta, \quad 3. \quad x \chi^2(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow \infty, \quad 4. \quad \text{für beliebiges } \varepsilon > 0 \text{ ist}$$

$x^{1+\varepsilon} \chi^2(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Dann existiert eine Funktion  $F(x)$ , die folgenden Bedingungen genügt: a)  $F(x)$  ist in  $0 \leq x \leq 2\pi$  stetig und monoton nicht abnehmend, b)  $F'(x) = 0$  fast überall, c)  $\int_0^{2\pi} e^{-iyx} dF(x) = O(\chi(|y|))$  für  $|y| \rightarrow \infty$ .

G. Doetsch.

**Myškis, A. D.:** Ein Satz über die Konvergenz von Funktionenfolgen. Uspechi mat. Nauk **7**, Nr. 1 (47), 186—190 (1952) [Russisch].

Verf. zeigt mittels der Greenschen Formel:  $\{u_i\}$  sei eine Folge zweimal stetig

differenzierbarer Funktionen, die im Mittel in einem Gebiet  $G$  des  $R_n$  ( $n \geq 2$ ) konvergieren. Sei  $(1) \sup_i \int_G |Au_i|^\lambda dv < \infty$  ( $\lambda > \frac{n}{2}$ ). Dann konvergiert die Folge  $\{u_i\}$  auf jeder kompakten Teilmenge aus  $G$  gleichmäßig. [Falls die  $u_i$  harmonisch sind, ist die Voraussetzung (1) trivial und der Satz eine fast unmittelbare Folgerung aus dem Gaußschen Mittelwertsatz]. Ein Beispiel zeigt, daß (1) mit  $\lambda \leq \frac{n}{2}$  nicht hinreicht für die Gültigkeit des Satzes. Verf. bemerkt u. a., daß für  $n = 1$   $\sup_i \int_a^b |u_i''(x)|^\alpha dx < \infty$  für  $\alpha \geq 1$ , aber nicht für  $\alpha < 1$ , hinreicht für die Gültigkeit eines analogen Satzes.

L. Schmetterer.

**Salinas, Baltasar R.: Bemerkung über das asymptotische Verhalten der Iteration einer Folge von Funktionen.** *Gac. mat.*, Madrid 4, 81—90 (1952) [Spanisch].

Soi  $\{f_n(x)\}$  une suite de fonctions réelles, définies et non nulles dans  $0 < x < \alpha$  et  $\{a_n\}$  une suite de nombres positifs, telle que  $A_n = a_1 + \dots + a_n \rightarrow \infty$ ,  $a_n/A_n \rightarrow 0$ . Supposons que pour tout  $X$  ( $0 < X < \alpha$ )

$$\inf_{0 < x < X} \left\{ \frac{1}{a_n x^p} \left( \frac{x}{f_n(x)} - 1 \right) \right\} > 0 \quad (p \geq 1),$$

$n = 1, 2, \dots$

et que  $f_n(x) = x - a_n x^{1+p} \theta_{n-1}(x)$ , où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta \left( \frac{y}{A_n^{1/p}} \right) = 1$  uniformément en  $y$ . Définissons  $\{F_n(x)\}$  en posant  $F_1(x) = f_1(x)$ ,  $F_n(x) = f_n(F_{n-1}(x))$ . Alors on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/p} F_n(x) = p^{-1/p}$ . L'A. démontre aussi un théorème plus général.

J. Horváth.

**Walters, S. S.: On Ascoli's theorem.** *Amer. math. Monthly* 59, 237—238 (1952).

Als Beitrag zur Klärung der Rolle der Voraussetzungen des Ascolischen (Arzelaschen) Satzes gibt Verf. ein Beispiel einer gleichmäßig beschränkten Folge reeller, stetiger, im Intervall  $0 \leq x \leq 1$  definierter Funktionen, die in einer dichten Teilmenge dieses Intervalls konvergiert und sonst divergiert. K. Krickeberg.

**Morozov, M. I.: Über einige Fragen der gleichmäßigen Annäherung stetiger Funktionen durch Funktionen der Interpolationsklassen.** *Isvestija Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. 16, 75—100 (1952) [Russisch].

Es sei  $F(x, a_1, \dots, a_n)$  eine reelle Funktion der Veränderlichen  $x$  und der Parameter  $a_i$ . Dabei ist  $x$  auf das Intervall  $(0, 1)$ ,  $a_i$  auf ein gewisses endliches Intervall beschränkt. Wenn sich jedes Gleichungssystem  $y_i = F(x, a_1, \dots, a_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bei gegebenen  $x_i, y_i$  auflösen läßt (die  $y_i$  müssen dem Wertevorrat  $D_x$  der  $F$  entnommen sein), dann „gehört  $F$  zur Interpolationsklasse  $K^{\alpha}$ “. Ist weiter  $f(x)$  in  $(0, 1)$  stetig, so ist die „kleinste Annäherung“  $\mu$  von  $f(x)$  durch Funktionen der Klasse ist das Minimum dieses Maximums, wenn  $F$  über alle Funktionen der Klasse variiert.  $\mu$  hängt nur von  $f(x)$  und von  $E$  ab. Verf. beweist nun in Verallgemeinerung bekannter Ergebnisse aus dem Tschebyscheffschen Ideenkreis einige Sätze, die auf folgendes hinauslaufen: 1. Gibt man  $f(x)$  und eine aus  $n+1$  Punkten bestehende Menge  $E_{n+1} \subset (0, 1)$  vor, so gibt es genau eine Funktion  $F$  kleinster Abweichung bezüglich  $E_{n+1}$ . 2. Zu einer beliebigen abgeschlossenen Menge  $E$ , die aus mindestens  $n+1$  Punkten besteht, gibt es auch genau eine Funktion  $F$  kleinster Abweichung, und zwar ist das entsprechende  $\mu(f, E)$  die obere Grenze aller möglichen  $\mu(f, E_{n+1})$  mit  $E_{n+1} \subset E$ . 3. Die Minimalfunktion  $F^*$  ist dadurch gekennzeichnet, daß die Differenz  $f - F^*$  mindestens an  $n+1$  Stellen ihr absolutes Maximum erreicht und zwar mit jeweils wechselndem Vorzeichen. — Für die Beweise werden erst die Funktionen der Klasse  $K$  studiert (ihr Wertevorrat ist z. B. ein Intervall), insbesondere die Differenz zweier Funktionen und ihr Vorzeichen. Die Untersuchung der  $F$  auf Punktmengen  $E_{n+1}$  macht verschiedene neue Begriffsbildungen nötig; es handelt sich jedoch im wesentlichen um Erweiterungen und Verfeinerungen der bei dem behandelten Problemkreis üblichen Methoden. W. Hahn.

**Olevskij, M. N.: Über die Approximation einer stetigen Funktion auf einem gegebenen Intervall durch eine stückweise lineare Funktion.** *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 82, 193—196 (1952) [Russisch].



Verf. denkt sich im Intervall  $a \leq x \leq b$  einen stetigen Kurvenbogen  $f(x)$  und einen  $n$ -gliedrigen gebrochenen Linienzug  $\varphi_n(x)$  gegeben. Er betrachtet dann die Annäherung  $\max |f(x) - \varphi_n(x)|$  und untersucht deren Minimum für gewisse Klassen der  $\varphi_n$ , z. B. für Linienzüge, die dem Kurvenbogen ein- oder umschrieben sind usw. Die entsprechenden Betrachtungen werden sodann für den Näherungs-

ausdruck  $\int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx$  durchgeführt. Der Nachweis der Existenz und Einzigkeit der jeweils geforderten Linienzüge läßt sich mit elementaren Methoden erbringen; ein Verfahren zu ihrer wirklichen Berechnung wird nicht mitgeteilt.

W. Hahn.

**Rymarenko, B. A.:** Über die kleinste Abweichung von Null eines zyklisch monotonen Polynoms, dessen zwei höchste Koeffizienten vorgegeben sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 179—182 (1952) [Russisch].

Eine Funktion  $f(x)$  heißt zyklisch monoton von der Ordnung  $m > 1$ , wenn sie im Intervall  $[0,1]$  Ableitungen mit konstantem Vorzeichen bis zur Ordnung  $m$  besitzt und wenn  $f^{(k)}(x) f^{(k+2)}(x) \leq 0$  für  $0 \leq k \leq m-2$  ist. Verf. stellt das im Titel genannte Polynom in geschlossener Form dar, ebenso den Zahlenwert der kleinsten Abweichung, und zwar mit Hilfe der Eulerschen Polynome und Zahlen (und verwandter Bildungen). Benutzt werden Ergebnisse von S. Bernstein (dies. Zbl. 39, 69).

W. Hahn.

**Džrbašjan, M. M.:** Über das Wachstum der Ableitungen von Polynomen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 5—8 (1952) [Russisch].

Es sei eine Folge von Polynomen  $Q_n(x)$  der Grade  $n = 1, 2, \dots$  durch die Bedingung  $|Q_n(x)| \leq \exp(p(x))$  beschränkt;  $p(x)$  sei auf der reellen Achse stetig und differenzierbar, und es sei  $\lim x p'(x) = \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ .  $x = g(y)$  sei die Umkehrfunktion zu  $p(x)$ . Dann kann man die Ableitung  $Q'_n(x)$  ebenfalls abschätzen,

und zwar ist  $\max_{-R \leq x \leq +R} |Q'_n(x)| \leq A_1(R)$  bzw.  $\leq A_2(R) \int_1^n \frac{dy}{g(y)}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),

je nachdem  $\int \frac{p(x)}{x^2} dx$  konvergiert oder nicht.

W. Hahn.

**Džrbašjan, M. M.:** Über die gewogene beste Annäherung durch Polynome auf der reellen Achse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 1123—1126 (1952) [Russisch].

Unter der gewogenen besten Annäherung einer stetigen Funktion  $f(x)$  durch Polynome  $n$ -ten Grades  $Q_n(x)$  versteht man die Bildung

$$E_n[f; p(x)] = \inf_{Q_n} \left\{ \max_{-\infty < x < +\infty} e^{-p(x)} |f(x) - Q_n(x)| \right\};$$

die Gewichtsfunktion genügt den Bedingungen des vorigen Referats. Verf. beweist: Ist  $f(x)$  bis zur  $r$ -ten Ableitung einschl. auf der reellen Achse beschränkt und ist  $q > 1$ ,  $c > 0$ , dann ist

$$E_n[f; c|x|^q] \leq \text{konst. } n^{-(1-q^{-1})r} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ferner beweist Verf. unter Bezugnahme auf die oben besprochene Note einen Satz vom „Umkehrtyp“: Wenn für eine Funktion  $f(x)$  die Ungleichung

$$E_n[f; p(x)] \leq \text{konst.} \left( \int_1^n \frac{dy}{g(y)} \right)^{-1-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0, n = 1, 2, \dots)$$

gilt (das im vorigen Referat genannte Integral ist als divergent vorausgesetzt), dann ist  $f(x)$  mitsamt der ersten Ableitung in jedem endlichen Intervall  $(-R, R)$  stetig.

W. Hahn.

**Aruffo, Giulio:** Un'osservazione sull'approssimazione di una funzione continua per mezzo di una successione di funzioni razionali. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 44—47 (1952).

Soient  $f \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une fonction continue en  $E_n: 0 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) et à dérivée

$$f_{i_1 i_2 \dots i_n} = \partial^{i_1 + i_2 + \dots + i_n} f / (\partial x_1)^{i_1} (\partial x_2)^{i_2} \dots (\partial x_n)^{i_n}$$

continue;  $D_n$  un domaine à  $n$  dimensions strictement intérieur à  $E_n$ ;

$$f^{(m)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f^{[m]} / 1^{[m]}, \quad \text{où } f^{[m]}, 1^{[m]}$$

ce sont les polynômes d'approximation de Stieltjes des fonctions  $f$  et de la constante 1, respectivement. — L'A. présente une démonstration de la propriété suivante, énoncée par B. Segre (Forme differenziali e loro integrali, vol. I, Roma 1951, p. 186 et suiv.): Il y a, uniformément en  $D_n$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \{f^{(m)}\}_{i_1 i_2 \dots i_n} = f_{i_1 i_2 \dots i_n}$ .

— L'A. remarque que cela résulte, en particulier, de la propriété suivante: Si  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est continue en  $E_n$  et y possède des dérivées  $\varphi_{k_1 k_2 \dots k_n}$ , où  $k_r = 0, 1, \dots, i_r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ), la différence  $\{\varphi_{i_1 i_2 \dots i_n}^{[m]}\} - \{\varphi_{i_1 i_2 \dots i_n}\}^{[m]}$  tend vers zéro (pour  $m \rightarrow \infty$ ) uniformément en  $D_n$ , au moins de l'ordre d'une exponentielle.

A. Froda.

**Timan, A. F.:** Über die linearen Methoden der Approximation von Funktionen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 3 (49), 103—106 (1952) [Russisch].

Es seien  $a_k, b_k$  die Fourierkoeffizienten der Funktion  $f(x)$ ,  $\lambda_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) die Zahlen einer Dreiecksmatrix ( $\lambda_0^{(n)} = 1$ ). Bildet man jetzt den Ausdruck

$$U_n(f; x; \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \text{so entspricht jeder Matrix } (\lambda)$$

eine „lineare Methode“ der Annäherung, die durch Angabe von  $J_n(m, x, \lambda) = \sup_{f \in m} |f(x) - U_n(f; x; \lambda)|$  näher charakterisiert werden kann, wenn  $m$  eine gegebene

Funktionsklasse bedeutet. Verf. teilt ohne Beweise sechs Sätze mit, in denen einerseits Abschätzungen und asymptotische Ausdrücke für  $J_n$  bei festen  $\lambda_k^{(n)}$  gegeben werden, andererseits Bedingungen für die  $\lambda_k^{(n)}$  aufgestellt werden, wenn die Methode eine vorgegebene Ordnung der Annäherung haben soll.

W. Hahn.

**Lozinskij, S. M.:** Die Umkehrung der Sätze von Jackson. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 645—647 (1952) [Russisch].

Verf. teilt ohne Beweis vier Sätze mit, in denen aus der besten Annäherung  $E_n(f)$  einer reellen stetigen periodischen Funktion durch trigonometrische Polynome auf das asymptotische Verhalten des Stetigkeitsmoduls  $\omega_p(f, u)$  der Funktion geschlossen wird. (Für die Bezeichnungen vgl. z. B. Stečkin, dies. Zbl. 42, 300) Der einfachste der Sätze besagt etwa folgendes: Es lasse sich eine monoton wachsende Funktion  $\omega(u)$  so wählen, daß  $\lim_{u \rightarrow 0+} \frac{\omega(Ku)}{\omega(u)} < K^p$  mit  $K > 1$ ,  $p$  positiv

ganz ist. Dann ist die Beziehung  $E_n(f) = O[\omega(n^{-1})]$  notwendig und hinreichend für die Beziehung  $\omega_p(f, u) = O[\omega(u)]$ .

W. Hahn.

**Stečkin, S. B.:** Über die besten Annäherungen periodischer Funktionen durch trigonometrische Polynome. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 651—654 (1952) [Russisch].

Verf. beweist folgenden Satz (für die Bezeichnungen vgl. vorsteh. Referat): Es seien  $k$  und  $r$  ganze Zahlen und  $0 \leq r < \alpha$ ,  $k + r > \alpha$ . Notwendig und hinreichend dafür, daß  $E_n(f) \sim n^{-\alpha}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ist die Größenordnungsbeziehung  $\omega_k(f^{(r)}, \delta) \sim \delta^\alpha$ . Für  $r = 0$  findet sich der Satz in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 42, 300).

W. Hahn.

**Nikolaev, V. F.:** Über einige Interpolationsprozesse. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 441—444 (1952) [Russisch].

Given a continuous function  $f(x)$  over  $[0, \pi]$ , let  $J_n^m(x, f)$  denote the cosinus-polynomial of order  $n + m$ ,  $J_n^m = f$  for  $x_k^{n+1} \in [0, \pi]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ .  $J_n^m$  is called linear interpolation operation. An evaluation for  $||J_n^m||$  is given. There are indicated examples of suits of linear interpolation operations for which the ratio of the order of the polynomial to the number of points  $x_k^{n+1}$  can be arbitrary large.

J. Gorski.

Stečkin, S. B.: Die besten Annäherungen von Funktionen, die durch trigonometrische Lückenreihen darstellbar sind. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 147—149 (1952) [Russisch].

Stečkin, S. B.: Über die Approximation stetiger Funktionen durch Fouriersche Summen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4 (50), 139—140 (1952) [Russisch].

Natanson, I. P.: Über die Approximation mehrmals differenzierbarer periodischer Funktionen mit Hilfe singulärer Integrale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 337—339 (1952) [Russisch].

Ist  $\Phi_n(t)$  eine positive periodische Funktion mit  $\int_{-\pi}^{+\pi} \Phi_n(t) dt = 1$ , so gilt für den

Operator  $U_n[f; x] = \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \Phi_n(t - x) dt$ , wie Verf. früher gezeigt hat (dies. Zbl. 38, 216), die Abschätzung  $|U_n[f; x] - f(x)| \leq 3 \omega(\delta_n)$ . Dabei ist  $\omega(\delta)$  der Stetigkeitsmodul von  $f(t)$  und  $\delta_n = \int_0^\pi t \Phi_n(t) dt$  (es ist  $\delta_n \rightarrow 0$  vorauszusetzen). Verf.

beweist jetzt eine entsprechende Formel für die Iterationen dieses Operators; es ist, wenn  $f(t)$  eine stetige  $p$ -te Ableitung und den Stetigkeitsmodul  $\omega_p(\delta)$  besitzt,

$$\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \binom{p+1}{k} U_n^{(k)}[f; x] \leq 3^{p+1} \delta_n^p \omega_p(\delta_n).$$

Es wird angedeutet, wie man diese Formel auf zwei Veränderliche ausdehnen und zum Beweise der Jacksonschen Approximationssätze verwenden kann. W. Hahn.

Nikol'skij, S. M.: Quadraturformeln. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 181—196 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht wie in einer früheren Veröffentlichung (dies. Zbl. 36, 323) die Güte von Quadraturformeln. Er denkt sich das Integrationsintervall  $(a, b)$  in  $n$  gleiche Teile zerlegt und in jedem Teilintervall  $(\xi_k, \xi_{k+1})$   $m + 1$  Punkte  ${}_k x_0, \dots, {}_k x_m$  gegeben. Dabei sollen die Intervalle „ähnlich“ unterteilt sein, d. h. es ist jeweils  ${}_k x_t = \xi_k + x_t(\xi_{k+1} - \xi_k)$ . Zu jedem Intervall gehört eine Form  $L(\xi_k, \xi_{k+1}; f) = (\xi_{k+1} - \xi_k) \sum_{t=0}^m p_t f({}_k x_t)$ . Verf. betrachtet dann die Differenz

$$D = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{m-1} L(\xi_k, \xi_{k+1}; f)$$

und setzt über  $L$  voraus, daß die Quadraturformel für Polynome  $P$  mit Graden, die kleiner als  $r$  sind, genau ist:  $\int_0^1 P dx = L(0, 1; P)$ . Das Hauptergebnis der Arbeit

läßt sich dann folgendermaßen formulieren: Hat die Funktion  $f(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  Ableitungen bis zur Ordnung  $s$  und ist  $s \geq r$ , so gilt  $|D| \leq (b - a)^{r+1} n^{-r} K_r$ . Dabei ist  $K_r$  eine nur von  $r$  abhängende Konstante, und das Gleichheitszeichen kann wirklich auftreten. — Unter zusätzlichen Voraussetzungen über  $f(x)$  läßt sich das Ergebnis noch etwas modifizieren; ein entsprechender Satz

gilt für die zweidimensionale Quadraturformel, durch die das Integral  $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$  angenähert wird. — Die Beweise benutzen die Taylorentwicklung für  $f(x)$  und die Restgliedabschätzung.

W. Hahn.



**Bellman, Richard:** On approximate expressions for the exponential integral and the error function. *J. Math. Physics* **30**, 226—231 (1952).

If  $g(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx$ , the estimation

$$\left| g(y) - \sum_{k=1}^{n-1} f^{(k)}(0) y^{-(k+1)} \right| \leq \frac{\max_{0 \leq x < \infty} |f^{(n)}(x)|}{|y|^n \operatorname{Re}(y)}$$

is frequently used. The author proposes an other method which uses also a rational function  $y^{-1}$  to approximate  $g(y)$ , but gives a smaller error term. Thus for the exponential integral

$$\operatorname{Ei}(y) = \int_y^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = e^{-y} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{1+x} dx$$

this method yields ( $n \geq 1$ )

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{1+x} dx - \frac{R_n(y)}{Q_n(y)} \right| \leq \frac{n!}{2^{2n+1} |y|^n |Q_n(y)| \operatorname{Re} y},$$

where  $Q_n(y) = 1 + \sum_{i=1}^n a_i y^{-i}$ ,  $a_k = n! \frac{2^{n-k+1}}{[(n+1-k)!]^2} \prod_{l=1}^{n-k+1} \left( \frac{(n+1)^2 - l^2}{2l+1} \right)$ ,

$$R_n(y) = P_n(y) + \sum_{i=1}^n a_i y^{-i} P_{n-i}(y) - a_{n+1} + y^{-(n+1)}, P_k(y) = \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l l! y^{-(l+1)}.$$

A similar result is given for the error function

$$1 - \operatorname{Erf}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-y^2} e^{-1/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xy}}{(1+x)^{1/2}} dx.$$

*J. Horváth.*

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

**Tricomi, Francesco G.:** Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **12**, 227—233 (1952).

Nach einem einfachen und einleuchtenden Prinzip entwickelt Verf. ein Verfahren, für Funktionen, die außer von dem Argument auch noch von einem Parameter oder mehreren Parametern abhängen, allgemeine Beziehungen für die Ableitung dieser Funktionen nach dem Parameter zu gewinnen. *H. Buchholz.*

**Slater, L. J.:** General transformations of bilateral series. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. **3**, 73—80 (1952).

Nella prima parte della sua ricerca l'A. estende alcuni risultati di D. B. Sears (questo Zbl. **44**, 77). Passando poi alle così dette serie ipergeometriche bilaterali, se

$$\Gamma(a_1, a_2, \dots, a_M; b_1, b_2, \dots, b_N) \equiv \frac{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \dots \Gamma(a_M)}{\Gamma(b_1) \Gamma(b_2) \dots \Gamma(b_N)} e^{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_M)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_N)_n} x^n}$$

$(a)_n = a(a+1) \dots (a+n-1)$ ,  $(a)_0 = 1$  l'A. prova la seguente identità

$$\Gamma \left( \begin{matrix} 1+a_2-a_1, \dots, 1+a_M-a_1, a_1-a_2, \dots, a_1-a_M \\ 1+b_1-a_1, \dots, 1+b_M-a_1, a_1-c_1, \dots, a_1-c_M \end{matrix} \right) \\ \times {}_M H_M \left[ \begin{matrix} 1+c_1-a_1, \dots, 1+c_M-a_1 \\ 1+b_1-a_1, \dots, 1+b_M-a_1 \end{matrix} ; 1 \right] + \text{idem } (a_1; a_2, a_3, \dots, a_M) \equiv 0.$$

Da questa relazione, considerando l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \Gamma \left( \begin{matrix} a_1+s, \dots, a_M+s, 1-a_1-s, \dots, 1-a_M-s \\ b_1+s, \dots, b_M+s, 1-c_1-s, \dots, 1-c_M-s \end{matrix} \right) x^s ds$$

esteso ad un cerchio  $C$  di raggio sufficientemente grande, con la teoria dei residui, l'A. ricava una seconda identità.

G. Sansone.

**Jackson, Margaret:** Transformations of series of the type  ${}_3H_3$  with unit argument. J. London math. Soc. **27**, 116—123 (1952).

Verf. gewinnt aus einer früher von ihr angegebenen, eine Heinesche Reihe  ${}_3H_3$  durch zwei Reihen  ${}_3F_2$  ausdrückenden Formel  $\mathfrak{J}$  (dies. Zbl. **36**, 326; die in dortiger Bespr. verwendeten Bezeichnungen werden hierher übernommen) eine Verallgemeinerung der von Thomae [J. reine angew. Math. **87**, 26—73 (1879)] herrührenden zweigliedrigen Beziehung. Mit Hilfe von  $\mathfrak{J}$  verallgemeinert sie eine andere zweigliedrige Beziehung

$$(1) \quad {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} a, b, c; \\ e, f \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(e) \Gamma(e+f-a-b-c)}{\Gamma(e+f-a-b) \Gamma(e-c)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} f-a, f-b, c; \\ e+f-a-b, f \end{matrix} \right] \quad \text{zu}$$

$${}_3H_3 \left[ \begin{matrix} a, b, c; \\ d, e, f \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(1-b) \Gamma(d) \Gamma(e+f-b-1) \Gamma(\sigma) \Gamma(1+a-e) \Gamma(1+a-f)}{\Gamma(d-c) \Gamma(e-b) \Gamma(f-b) \Gamma(2+a-e-f) \Gamma(\sigma+c) \Gamma(a)}$$

$$\times {}_3H_3 \left[ \begin{matrix} e+f-a-1, e+f-b-1, c; \\ \sigma+c, e, f \end{matrix} \right]$$

$$+ \frac{\Gamma(1-b) \Gamma(1-c) \Gamma(d) \Gamma(e+f-b) \Gamma(1+b-e-f) \Gamma(1-a) \Gamma(1+a-e) \Gamma(1+a-f)}{\Gamma(1-e) \Gamma(1-f) \Gamma(1+a-b) \Gamma(1+a-c) \Gamma(d-a) \Gamma(e+f-a-b) \Gamma(1+a+b-e-f)}$$

$$\times {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f; \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \right].$$

Wiederum auf  $\mathfrak{J}$  sich stützend, verallgemeinert Verf. eine dreigliedrige Beziehung zu

$$\frac{\pi^2 \Gamma(2-d) \sin(e-f) \pi}{\{\Gamma(1-b) \Gamma(1-c)\}^2 \Gamma(1-a) \Gamma(1+b-d) \Gamma(1+c-d) \Gamma(d) \Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(\sigma)} {}_3H_3 \left[ \begin{matrix} a, b, c; \\ d, e, f \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{\sin(b+c) \pi \sin d \pi \sin f \pi - \sin(d+f) \pi \sin b \pi \sin c \pi}{\Gamma(f-a) \Gamma(e-b) \Gamma(e-c) \Gamma(2-e) \Gamma(1+f-b-c) \Gamma(d+e-a-1)}$$

$$\times {}_3H_3 \left[ \begin{matrix} 2+a-d-e, 1-b, 1-c; \\ 2-d, 2-e, 1+f-b-c \end{matrix} \right] - (e \rightarrow f).$$

Wenn man die in (1) auftretende Reihe  ${}_3F_2$  nach bekannter Formel in eine gleichwertige  ${}_3F_2$  umformt und diese nach (1) durch zwei  ${}_3H_3$  ausdrückt, erhält man eine Beziehung zwischen vier Reihen  ${}_3H_3$ . — Gestaltswandel durch Symmetriebetrachtungen: Man entferne z. B.  ${}_3F_2$  aus (1) und der aus (1) durch  $(b \rightarrow c)$  hervorgehenden Formel (2); dann entsteht eine Beziehung zwischen drei Reihen  ${}_3H_3$ . Man kann aber aus (1), (2) auch die beiden linksseitigen  ${}_3H_3$  wegschaffen. — Verf. äußert sich noch über Möglich- oder Unmöglichkeit zweier weiterer vermutbarer Beziehungen.

L. Koschmieder.

**Jackson, Margaret:** A note on the sum of a particular wellpoised  ${}_6H_6$  with argument  $-1$ . J. London math. Soc. **27**, 124—126 (1952).

Verf. verallgemeinert ein auf eine besondere ausgewogene  ${}_6H_6$ -Reihe bezüglichen Ergebnis von W. N. Bailey (dies. Zbl. **14**, 160) durch die Formel

$${}_6H_6 \left[ \begin{matrix} 1 + \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a + z, z + x, z - x, z + y, z - y; -1 \\ \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a + z, 1 + a - z - x, 1 + a - z + x, 1 + a - z - y, 1 + a - z + y \end{matrix} \right]$$

$$= \Gamma(1-z-y) \Gamma(1-z-x) \Gamma(1-z+y) \Gamma(1-z+x) \Gamma(z+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2}-a+z)$$

$$\times \Gamma(1+a+y-z) \Gamma(1+a+x-z) \Gamma(1+a-z-x) \Gamma(1+a-z-y)$$

$$\times [\cos x \pi \cos y \pi + \cos z \pi \cos(z-a) \pi]$$

$$: [2^{2a+1-4x} \pi \Gamma(1+a) \Gamma(1-a) \Gamma(1+a-2z) \Gamma(1+\frac{1}{2}a-z+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y)$$

$$\times \Gamma(1+\frac{1}{2}a-z-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y) \Gamma(1+\frac{1}{2}a-z-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y) \Gamma(1+\frac{1}{2}a-z+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y)].$$

Die Sonderfälle  $z = \frac{1}{2}$ ,  $x = a - z$  führen zu Formeln von Whipple [Proc. London math. Soc., II. Ser. **24**, 247—263 (1925/26)] für Reihen  ${}_6F_5$ . Jede der beiden Annahmen  $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a - z$ ,  $z = \frac{1}{2}a$  erniedrigt  ${}_6H_6$  zu einer  ${}_5H_5$ , der Wert  $x = \frac{1}{2}a - z$  sogar zu einer  ${}_4H_4$ . Wählt man in der für  ${}_4H_4$  gefundenen Formel  $y + z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a$ ,

so erhält man

$$\begin{aligned}
 {}_3H_3 \left[ \begin{matrix} \frac{1}{2} + a - z, 2z - \frac{1}{2}a, 2z - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}; -1 \\ z + \frac{1}{2}, 1 + \frac{3}{2}a - 2z, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}a - 2z \end{matrix} \right] \\
 = [\sin(z - \frac{1}{2}a)\pi \cos(z - \frac{1}{2}a)\pi + \cos z\pi \cos(z - a)\pi] \\
 \times \frac{\pi^{1/2} \Gamma(1/2 - a + z) \Gamma(2 + 3a - 4z) \Gamma(2 + a - 4z) \Gamma(z + 1/2)}{2^{5a-10z+5/2} \Gamma(5/4 + a - 2z) \Gamma(1 + a - 2z) \Gamma(3/4) \Gamma(3/2 + a - 2z)}.
 \end{aligned}$$

${}_4H_4$  läßt sich durch  $a = 2z - \frac{1}{2}$  auch auf  ${}_3H_3$  senken.

*L. Koschmieder.*

**Lakin, A.:** A hypergeometric identity related to Dougall's theorem. J. London math. Soc. **27**, 229—234 (1952).

Verf. beweist folgenden Satz: Wenn  $b + c + d + e = m$ ,  $a + f = -m$ , wo  $m$  eine positive ganze Zahl ist, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 {}_7F_6 \left[ \begin{matrix} 2a, a+1, a+b, a+c, a+d, a+e, a+f \\ a, 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e, 1+a-f \end{matrix}; 1 \right] \\
 = \frac{-\sigma_3 (1-b-e)_{m-1} (1-c-e)_{m-1} (1-d-e)_{m-1} (1+2a)_m}{(1+a-b)_m (1+a-c)_m (1+a-d)_m (1+a-e)_m},
 \end{aligned}$$

wo  $\sigma_3$  die elementare symmetrische Funktion dritter Ordnung der 6 Parameter  $a, b, c, d, e, f$  bedeutet. In der Funktion  ${}_7F_6$  übersteigt die Summe der Parameter im Nenner jene der Parameter im Zähler um 4. Die Beweismethode ist die gleiche, welche Verf. zusammen mit J. L. Burchnall (dies. Zbl. **40**, 34) beim Beweis des Dougallschen Satzes benutzt hat. Wenn die Identität einmal bewiesen ist, kann man sie auch zu einem induktiven Beweis des Dougallschen Satzes benutzen. Verf. gibt sodann eine Ausdehnung der oben bewiesenen Identität und benutzt dieselbe, um einen einfachen Beweis des grundsätzlichen Analogons des Saalschützenschen Satzes zu erhalten.

*M. J. O. Strutt.*

**Niblett, J. D.:** Some hypergeometric identities. Pacific J. Math. **2**, 219—225 (1952).

Die Arbeit enthält eine Verallgemeinerung einiger von T. W. Chaundy gegebenen hypergeometrischen Identitäten (dies. Zbl. **42**, 76). Der Beweis gelingt durch eine einfache Erweiterung des von Chaundy gegebenen Beweises.

*R. Gran Olsson.*

**Miller, J. C. P.:** A method for the determination of converging factors, applied to the asymptotic expansions for the parabolic cylinder functions. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 243—254 (1952).

Es handelt sich hier um die Methode der konvergenzerzeugenden Faktoren, die von J. R. Airey in einzelnen Fällen mit großem Erfolg angewendet worden ist, um die Konvergenz zu langsam konvergierender Reihen zu erhöhen oder die Genauigkeit asymptotischer Reihen zu verbessern. Die Methode Aireys ist hauptsächlich dann erfolgreich, wenn die Reihen alternierende Vorzeichen aufweisen. — In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie eine solche Entdeckung für den konvergenzerzeugenden Faktor  $C_n$  in dem Ausdruck  $R_n = u_n \cdot C_n$  gewonnen werden kann, wenn die durch die Reihe mit den Gliedern  $u_0, u_1, \dots, u_n$  und dem Restglied  $R_n$  definierte Funktion eine lineare Differentialgleichung befriedigt, während gleichzeitig  $u_n$  und damit auch  $C_n$  eine in  $n$  lineare Differenzengleichung erfüllen. Ist die Zahl der Vorzeichenwechsel in der Folge der  $u_n$  unendlich groß, so kann  $C_n$  entweder aus der Differentialgleichung oder aus der Differenzengleichung bestimmt werden. Haben die Terme  $u_n$  schließlich ein und dasselbe Vorzeichen, so sind für die Bestimmung von  $C_n$  sowohl die Differentialgleichung als auch die Differenzengleichung erforderlich. Die Methode wird am Beispiel der parabolischen Zylinderfunktion erläutert.

*K. Buchholz.*

**Campbell, Robert:** Sur un cas de confluence des fonctions de Mathieu associées. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 695—697 (1952).

Bei der Separation der dreidimensionalen Wellengleichung mit parabolischen



Koordinaten gelangt man zu einer Differentialgleichung, die als Verallgemeinerung der Weberschen Gleichung angesehen werden kann. Eine analoge Verallgemeinerung der Mathieschen Gleichung hat Verf. mehrfach untersucht (dies. Zbl. 29, 30; 31, 121; 36, 62; 40, 324). Durch Grenzübergang (Paraboloid in Ellipsoid) sind diese Gleichungen ineinander überführbar. Diese verallg. Webersche Gleichung ist durch ein Produkt aus Exponentialfunktion, Potenz und Laguerreschem Polynom lösbar. Daraus folgert Verf. (ohne Beweis): 1. Aus der Kenntnis der Nullstellen der Laguerreschen Polynome ergibt sich eine Abschätzung für die Nullstellen von Sphäroidfunktionen mit Hilfe der Nullstellen von Besselfunktionen. 2. Aus den Integralgleichungen der Sphäroidfunktionen (dies. Zbl. 40, 325) kann man Integralgleichungen für Laguerresche und Hermite'sche Polynome ableiten. *W. Haacke.*

**Ossicini, Alessandro:** Formula e serie di approssimazione asintotica delle funzioni ultrasferiche di seconda specie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 48—53 (1952).

Für die ultrasphärischen Funktionen zweiter Art  $Q_n^{(\lambda)}$  zeigt Verf. die Entwicklung

$$Q_n^{(\lambda)}(\cos \vartheta) = C_{n,\lambda} \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k a_{n,\lambda,k} \frac{\cos[(n+\lambda+k)\vartheta + (\pi/2)(k+1-\lambda)]}{(2 \sin \vartheta)^{k+\lambda}} + q_{n,\lambda,s},$$

$$C_{n,\lambda} = (-1)^{[\lambda-1/2]} \pi \Gamma(n+2\lambda)/\Gamma(\lambda) \Gamma(n+\lambda+1),$$

$$a_{n,\lambda,0} = 1, \quad a_{n,\lambda,k} = \frac{1}{2^{2k} k!} \prod_{r=1}^k \frac{(2r-1)^2 - (2\lambda-1)^2}{n+\lambda+r}, \quad |q_{n,\lambda,s}(\vartheta)| < 2^{\lambda+s} |C_{n,\lambda}| a_{n,\lambda,s},$$

wenn  $0 < \lambda < 1$ . Die Entwicklung ist bekannt (vgl. F. W. Hobson, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge 1931, S. 302). *K. Prachar.*

**Sextl, Theodor:** Zur Theorie der Laguerreschen Differentialgleichung. Acta phys. Austr. 5, 449—460 (1952).

Die Laguerresche Differentialgleichung  $x y'' + (1-x) y' + \lambda y = 0$  wird hier mittels der Methode des Laplace-Integrals behandelt. Es werden Systeme von linear unabhängigen Lösungen aufgestellt. Ferner werden Reihenentwicklungen und asymptotische Entwicklungen für die einzelnen Integrale angegeben. *K. Prachar.*

**Tricomi, Francesco G.:** La seconda soluzione di Laguerre. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 7, 1—4 (1952).

Es wird gezeigt, daß sich die zweite Lösung der Differentialgleichung der Laguerre-Polynome  $L_n^{(\mu)}(z)$  als die  $n$ -te Ableitung der mit  $e^{-z} z^{n+\mu}$  multiplizierten, unvollständigen  $I$ -Funktion schreiben läßt. Eine weitere besondere Darstellung dieser zweiten Lösung wird möglich, wenn die Ordnung  $\mu$  ganzzahlig ist.

*H. Buchholz.*

**Bagchi, Hari Das and Bhola Nath Mukherjee:** A note on the generalised Laguerre polynomial. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 35, 53—55 (1952).

Es sei  $f_n(z)$  eine Lösung der Rekursionsformel der Laguerreschen Polynome. Die Verff. leiten auf dem üblichen Wege für die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} h^n f_n(z)$  eine Differentialgleichung und daraus eine Darstellung in geschlossener Form ab. Die Spezialisierungen für die  $L_n^{(\alpha)}(z)$  sind längst bekannt. *W. Hahn.*

**Delerue, Paul:** Sur une généralisation à  $n$  variables des polynômes d'Abel-Laguerre. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 66, 13—20 (1952).

Die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome (L. P.) einer Veränderlichen haben in der Operatorenrechnung das Bild

$$x^\alpha L_m^\alpha(x) \supset [ \Gamma(m+\alpha+1)/m! ] p^{-\alpha} (1-p^{-1})^m.$$

Für  $\alpha = 0$  hatte sie P. Humbert (dies. Zbl. 14, 108) auf zwei Veränderliche so verallgemeinert, daß ihr Bild  $(1-p^{-1}-q^{-1})^m$  wurde. Entsprechend erklärt Verf. die L. P.  $L_m^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$  von  $n$  Veränderlichen durch den Ansatz

$$\prod_{k=1}^n x_k^{\alpha_k} L_m^{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x_1, \dots, x_n) \supset (m!)^{-n} \prod_{k=1}^n \Gamma(m+\alpha_k+1) p_k^{-\alpha_k} \left(1 - \sum_{h=1}^n p_h^{-1}\right)^m.$$

Sie genügen einem Gefüge partieller Differentialgleichungen, haben die Erzeugende

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m!)^{n-1} \left[ \prod_{k=1}^n \frac{x_k^{\alpha_k}}{\Gamma(m + \alpha_k + 1)} \right] L_m^{\alpha_1 \dots \alpha_n} (x_1, \dots, x_n) z^m \\ = e^z \prod_{k=1}^n \left( \frac{x_k}{z} \right)^{\alpha_k/2} J_{\alpha_k} (2 \sqrt{x_k z}),$$

befriedigen Rücklaufsformeln, lassen Verdoppelungen der Unabhängigen und des Zeigers zu und drücken sich für  $n = 2$  durch die L. P. einer Veränderlichen in der Gestalt aus

$$\frac{L_m^{\alpha, \beta}(x, y)}{[\Gamma(m + \alpha + 1) \Gamma(m + \beta + 1)]} = (m!)^{-1} \sum_{\mu} \sum_{\nu} (-1)^{m-\mu-\nu} [(m-\mu-\nu)!]^{-1} l_{\mu}^{\alpha}(x) l_{\nu}^{\beta}(y)$$

Es gibt eine Verallgemeinerung der Rodriguesschen Formel

$$L_m^{\alpha, \beta}(x, y) = \frac{e^{x+y}}{(m!)^2} x^{-\alpha} y^{-\beta} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_k^m \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} [x^{m+\alpha} y^{m+\beta} e^{-(x+y)}].$$

Um zu den bekannten Zusammenhängen der Hermiteschen Polynome (H. P.)  $h_m(x)$  mit den  $l_m^{1/2}(x^2)$  und zu ihrer Erzeugung ein Seitenstück zu gewinnen, verallgemeinert Verf. die Abbildung

$$\frac{h_{2m}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \supset \left[ \frac{(2m)!}{m!} \right] \sqrt{\pi p} (p^{-1} - 1)^m$$

zu

$$\frac{H_{2m}(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})}{\sqrt{x_1, \dots, x_n}} \supset \left[ \frac{(2m)!}{m!} \right] \pi^{n/2} \sqrt{\prod_{k=1}^n p_k} \left( \sum_{h=1}^n p_h^{-1} - 1 \right)^m;$$

entsprechend bei ungeradem Zeiger. Dann gilt z. B.

$$\prod_{k=1}^n x_k L_m^{1/2, \dots, 1/2}(x_1^2, \dots, x_n^2) = \frac{(-1)^m}{2^{(2m+1)n}} \frac{[(2m+1)!]^{n-1}}{(m!)^{2n-1}} H_{2m+1}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+1)!]^{-1} H_{2m+1}(x_1, \dots, x_n) = e \sin 2x_1 \dots \sin 2x_n.$$

Die so eingeführten  $H_l$  sind nicht die bekannten H. P. mehrerer Veränderlichen (vgl. P. Appell-J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite*, Paris 1926, p. 367—387). Sie drücken sich vielmehr durch die  $h_m$  mit je einer Veränderlichen  $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ ,  $x_1 + \dots + x_{n-1} - x_n$ ,  $x_1 + \dots + x_{n-2} - x_{n-1} + x_n$  usw. aus, so daß z. B.

$$4H_{2m}(x, y, z) = h_{2m}(x+y+z) + h_{2m}(x+y-z) + h_{2m}(x-y+z) + h_{2m}(-x+y+z).$$

Auf die von E. Feldheim [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. ser. 12, 42—54 (1943)] als L. P. zweier Veränderlichen eingeführten Gebilde, die von zwei Zeigern  $m$  und  $n$ , aber nur von einem Parameter  $\alpha$  abhängen, nimmt Verf. nicht Bezug.

L. Koschmieder.

Szasz, Otto: On the relative extrema of the Hermite orthogonal functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 129—134 (1952).

Sei  $H_n(x)$  das  $n$ -te Hermite'sche Polynom und  $\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) / (2^n n!)^{1/2}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Seien  $\mu_{0n}, \mu_{1n}, \mu_{2n}, \dots$  die sukzessiven Maxima von  $|\varphi_n(x)|$ , wenn  $x$  von  $+\infty$  nach Null abnimmt. Verf. zeigt  $\mu_{r, n+1} < \mu_{rn}$ ,  $n \geq r \geq 0$ . Die analogen Resultate für Legendresche, Laguerresche und ultrasphärische Polynome wurden von Szegő, Todd und dem Verf. bewiesen.

K. Prachar.

Bagehi, Hari Das and Phatik Chand Chatterjee: Linear difference equations associated with certain special functions. J. Indian math. Soc., n. Ser. 16, 37—40 (1952).

Die gemeinsamen Lösungen der Funktionalgleichung  $f_{n-1}(z) - f_{n+1}(z) = 2f'_n(z)$  und der (inhomogenen) Differenzengleichung für das  $n$ -te Neumannsche Polynom

$O_n(z)$  haben die Gestalt  $f_n(z) = n z^{-1}(A J_n(z) + B Y_n(z)) + O_n(z)$ . Das Entsprechende gilt für die Schläflischen Polynome. — Verff. betrachten nur den ziemlich trivialen Fall ganzzahliger  $n$ .  
W. Hahn.

## Funktionentheorie:

● **Bieberbach, L.: Einführung in die Funktionentheorie.** 2. Neubearb. Aufl. Bielefeld: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch 1952. 220 S. DM 12,60.

In der deutschen Lehrbuchliteratur der letzten 30 Jahre zur klassischen Funktionentheorie nehmen die Bücher von Verf. (Lehrbuch der Funktionentheorie I, erschienen 1921 und in neuen Auflagen 1923, 1927, 1930, 1934; Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1927, 2. Auflage 1931; sowie „Funktionentheorie“, erschienen in Teubners technischen Leitfäden 1921) eine stark hervorgehobene Stellung ein. Sie zeichnen sich nicht nur wie alle Bieberbachschen Lehrbücher und Leitfäden durch ihren überquellenden Inhalt und ihren vielfältigen Anschluß an die neueren Originalarbeiten aus, sondern in ihnen kommt auch wesentlich zur Geltung, daß Verf. selbst sich auf diesem Gebiete Zeit seines Lebens als Forscher betätigt hat. Das betrifft insbesondere die konforme Abbildung in Theorie und Praxis. Der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes hat in den Büchern von Bieberbach seine erste und zugleich wohl auch eine endgültige lehrbuchhafte Darstellung, die ganz im Komplexen verläuft, erhalten. Mag der letztgenannte Auszug der Bieberbachschen Funktionentheorie zu knapp und manche Formulierung zu eilig hingeworfen sein, so daß Konrad Knopp in seiner Besprechung 1925 (Jahrbuch Fortschritte Math. 48, 313) es bezweifeln mußte, daß Verf. sein Ziel „in möglichst leicht verständlicher Form eine Einführung in den Gedankenkreis der modernen Funktionentheorie zu geben“ in diesem Leitfaden erreicht hätte, so steht es doch mit dieser Neuausgabe ganz anders. Sie ist über doppelt so umfangreich als der bisherige Leitfaden, ohne irgendwo eine Verlängerung des behandelten Stoffgebietes angestrebt zu haben. Schon die ersten Seiten der Neuauflage verraten, daß Verf. nicht nur seine Originalität, sein großes Geschick, kurze Beweise zu liefern, und sein umfangreiches Wissen für die vollständige Neubearbeitung eingesetzt hat. Die vorliegende Darstellung ist darüber hinaus in den Einzelheiten genau abgewogen und zeigt die Reife eines bei der wissenschaftlichen Arbeit und der schriftstellerischen Tätigkeit ergrauten Mannes. Demgegenüber verschlägt es nichts, daß auch jetzt noch einige Wünsche offen bleiben. Sie betreffen die Klärung grundsätzlicher Begriffe (1. den Begriff der singulären Stelle sowie die Begriffe regulär und analytisch in ihrem Verhältnis zueinander, 2. den unendlichfernen Punkt) sowie den Anschluß an die übrige Literatur in den Bezeichnungen (Bereich und Gebiet).

H. Behnke.

**Vakselj, Antoine: Contribution à la géométrie d'une fonction analytique.** C. r. Acad. Sci., Paris 234, 797—799 (1952).

Soit  $t = f(z)$  une fonction analytique et  $S$  une transformation linéaire  $t = (az + b)/(cz + d)$ . La comparaison des deux premiers termes des développements de Taylor autour du point  $z_0$  de la fonction  $f(s)$  et de la transformation  $S$  donne une famille de transformations linéaires „tangentes“. De même façon l'A. introduit une notion de la transformation linéaire „osculatrice“ en comparant les trois premiers termes des développements de Taylor. En utilisant les invariants des transformations linéaires l'A. obtient des formules complètement analogues à celles de Frenet pour une courbe gauche.

J. Gorski.

**Heller, I.: Contributions to the theory of divergent series.** Pacific J. Math. 2, 153—177 (1952).

Verf. betrachtet Matrixtransformation  $C = (c_{kn})$ , durch die eine Reihe  $\sum u_n$  in eine Reihe  $\sum v_k$  mit  $v_k = \sum_n c_{kn} u_n$  übergeführt wird, und untersucht die Frage, wann ein derartiges Verfahren mit dem Verfahren der analytischen Fortsetzung verträglich ist.

Zunächst wird die Klasse  $\mathcal{G}_{aa}$  der Matrizen bestimmt, welche jede analytische Reihe  $\sum u_n$  (d. h. eine Reihe mit  $|u_n| \leq M^{n+1}$  für passendes  $M$ ) in eine analytische Reihe überführen. Genau dann gehört  $C$  zu  $\mathcal{G}_{aa}$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $M_\varepsilon > 0$  gibt, so daß  $|c_{kn}| \leq \varepsilon^n M_\varepsilon^k$  ( $k, n = 1, 2, \dots$ ) ist. Eine Reihe  $\sum u_n$  heißt summierbar durch das Verfahren (P t) der analytischen Fortsetzung, wenn der Punkt  $z = +1$  im offenen Mittag-Lefflerschen Stern der Funktion  $f(z) = \sum u_n z^n$  liegt [summierbar zum Werte  $f(1)$ ]. Es sei  $\mathcal{G}$  ein (offenes) Gebiet, das den Punkt  $z = 0$  enthält und in der von  $+1$  nach rechts längs der reellen Achse geschlitzten Ebene liegt. Ferner habe für jedes  $R > 0$  der in  $|z| < R$  gelegene Teil von  $\mathcal{G}$  einen rektifizierbaren Rand. Ist  $F(z)$



eine bei  $z = 0$  reguläre Funktion mit dem Stern  $\mathfrak{F}^*$ , so sei  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(F, \mathfrak{G})$  der durch  $\mathfrak{G}$  erzeugte Stern (d. h.  $\mathfrak{F}$  besteht aus den Punkten  $\bigcap_{s \in \mathfrak{G}} s \cdot \mathfrak{G}$ , wo  $\mathfrak{G}$  der Rand von  $\mathfrak{F}^*$  ist und  $s \cdot \mathfrak{G}$  durch

$\bigcup_{g \in \mathfrak{G}} s g$  erklärt ist). Eine Matrix  $C$  gehört zur Klasse  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$ , wenn sie jede Reihe  $\sum u_n z^n$  [wo  $\sum u_n$  analytisch ist und  $F(z)$  die analytische Fortsetzung dieser Potenzreihe im Stern ist] für jedes  $z \in \mathfrak{F}$  in eine  $(P)$  summierbare Reihe mit der Summe  $F(z)$  überführt. Es sei  $g$  eine einfache geschlossene rektifizierbare Kurve, die in  $\mathfrak{G}$  liegt und den Nullpunkt enthält und  $J$  ein (offenes) Gebiet der  $y$ -Ebene, welches das Intervall  $0 \leq y \leq 1$  enthält. Ferner sei die Funktion  $G(z, y)$  erklärt als analytische Fortsetzung der Funktion  $\sum_k y^k \sum_n c_{kn} z^n$  bezüglich  $y$  bei festem  $z$  in den

Hauptstern;  $C$  ist dabei eine gegebene Transformation. Dann gilt der folgende Satz: Eine Transformation  $C$  gehört zu  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$ , wenn (I)  $C$  zu  $\mathfrak{C}_{aa}$  gehört, (II) zu jedem  $g$  ein  $J$  existiert, so daß  $G(z, y)$  (a) für jedes feste  $z \in g$  eine reguläre Funktion in  $y$ ,  $y \in J$  ist, (b) eine stetige Funktion der beiden Variablen  $z \in g$ ,  $y \in J$  ist und (III)  $G(z, 1) = (1 - z)^{-1}$ ,  $z \in \mathfrak{G}$  ist. — Verf. zeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen durch Vorgabe einer Funktion  $G(z, y)$  ein Verfahren  $C \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{G}}$  definiert ist. Verschiedene Spezialfälle werden behandelt. Ferner werden die Überlegungen auf Transformationen übertragen, durch welche Folgen in Folgen übergeführt werden.

A. Peyerimhoff.

Ullman, J. L.: Hankel determinants whose elements are sections of a Taylor series. II. Duke math. J. 19, 155—164 (1952).

Eine gleichbetitelte Arbeit (dies. Zbl. 43, 296) wird, wie angekündigt, fortgesetzt. Es sollen  $f(z)$  und  $s_n(z)$  dieselbe Bedeutung wie früher besitzen, dagegen soll im Gegensatz zu früher jetzt  $p \geq 1$  und  $S_{n,p}(z)$  die Determinante  $(s_{n+i+j-2}(z))$  mit  $i, j = 1, 2, \dots, p$  sein. Der folgende (für  $p = 1$  auf A. Hurwitz zurückgehende) Satz wird bewiesen. Sei  $p$  fest und  $\sigma$  ein Kreis der  $z$ -Ebene mit dem Mittelpunkt  $z = 0$ , sei weiter  $f(z)$  regulär im Äußern von  $\sigma$ , abgesehen von Polen mit der gesamten Vielfachheit  $p - 1$ , und sei  $f(z)$  regulär in den Punkten von  $\sigma$  selbst. Ist dann  $z = \gamma$  eine im Äußern von  $\sigma$  gelegene Nullstelle von  $f(z)$  der Ordnung  $k \geq 0$ , so gibt es eine Zahl  $\eta > 0$  und eine Nummer  $N$ , so daß für  $n > N$  die in  $|z - \gamma| < \eta$  gelegenen Nullstellen von  $S_{n,p}(z)$  die gesamte Vielfachheit  $k$  besitzen. Ist dagegen  $z = \gamma$  eine im Äußern von  $\sigma$  gelegene Polstelle von  $f(z)$ , so gibt es eine Zahl  $\eta > 0$  und eine Nummer  $N$ , so daß für  $n > N$  in  $|z - \gamma| < \eta$  keine Nullstelle von  $S_{n,p}(z)$  liegt. Hilfsmittel beim Beweis ist eine Verallgemeinerung einer schon in der früheren Arbeit benützten Hadamardschen Formel. Verf. verweist noch auf den Zusammenhang mit einer Arbeit von G. Pólya [Math. Z. 12, 36—60 (1922)].

W. Meyer-König.

Wielandt, Helmut: Zur Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes. Math. Z. 56, 206—207 (1952).

Verf. gibt den bisher kürzesten Beweis des Littlewoodschen Satzes, nach welchem „aus  $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu} x^{\nu} \rightarrow s$ ,  $(x \rightarrow 1)$  und  $u_n = O(1/n)$  folgt  $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu} = s$ “, indem er die Methode des Ref. unmittelbar auf  $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu} x^{\nu}$  anwendet und dabei zeigt, daß die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

durch Polynome  $p_1(x)$  und  $p_2(x)$  derart approximiert werden kann, daß  $p_1(x) \leq f(x) \leq p_2(x)$ ,  $(0 < x < 1)$  gilt und  $\frac{p_2(x) - p_1(x)}{x(1-x)} = q(x)$  ein Polynom mit  $\int_0^1 q(x) dx < \varepsilon$  ist.

J. Karamata.

Swinerton-Dyer, H. P. F.: On a conjecture of Hardy and Littlewood. J. London math. Soc. 27, 16—21 (1952).

Let  $a$  be a positive integer,  $a > 2$ ,  $0 < \lambda < 1$  and  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{an} / (1 - z^{2an})$

regular in the unit circle. The object of this paper is to show that (1)  $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta > A_\lambda \left(\log \frac{1}{1-r}\right)^2$  for every fixed  $\lambda$  and all  $r$  near enough to 1, where  $A_\lambda = (a \cdot \ln a)^{-\lambda}$ . This is the answer to the suggestion of Hardy and Littlewood (this Zbl. 3, 202) that the integral on the left of (1) is unbounded. J. Gorski.

**Roussel, André:** Une généralisation des développements de Taylor. Acta math. 87, 147—173 (1952).

Ausführungen zu den drei Comptes rendus-Noten des Verf., s. dies. Zbl. 29, 257 und 33, 360. G. Aumann.

**Macintyre, A. J. and Sheila Scott Macintyre:** Theorems on the convergence and asymptotic validity of Abel's series. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A III 63, 222—231 (1952).

Der komplexwertigen, für reelle  $x \geq 0$  definierten und unendlich oft differenzierbaren Funktion  $F(x)$  wird die Abelsche Reihe (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} z(z-n)^{n-1} F^{(n)}(n)/n!$  ( $z$  komplex) zugeordnet. Es handelt sich dann um die Konvergenz von (1) und um den Zusammenhang der etwaigen Reihensumme mit  $F(x)$ . Vgl. W. Gontcharoff, dies. Zbl. 13, 161; A. Gelfond, dies. Zbl. 20, 311; S. Schmidli, dies. Zbl. 27, 215; R. C. Buck, dies. Zbl. 33, 364. Verff. geben folgende neue Beiträge, bei denen  $b(\theta)$  eine näher angegebene stetige positive Funktion (Stützfunktion) ist. I. In allen Punkten von  $|\arg z| \leq 3\pi/4$  sei  $F(z)$  regulär und  $|F(re^{i\theta})| \leq K r^{-\varepsilon} e^{b(\theta)}$  ( $K, \varepsilon$  positive Konstante); dann konvergiert (1) gleichmäßig in jedem beschränkten  $z$ -Bereich. II. Für  $|\arg z| \leq 3\pi/4$  und  $\Re z \geq -h$  sei  $F(z)$  regulär und  $|F(re^{i\theta})| \leq K r^{-\gamma} e^{b(\theta)}$  ( $h > 0, K > 0, \gamma > 1$  Konstante); dann ist, wenn die nach I vorhandene Summe von (1) mit  $A(z)$  bezeichnet wird,  $|F(z) - A(z)| = O((x \log x)^{-h})$  für  $0 < x = \Re z \rightarrow \infty$ . Der Beweis von I ist direkt, bei II werden Eigenschaften der Laplace-Transformation von in einem Winkelraum regulären Funktionen (vgl. A. J. Macintyre, dies. Zbl. 20, 377) herangezogen. I und II gelten analog, wenn in kleineren Winkelräumen gewisse schärfere Bedingungen erfüllt sind.

W. Meyer-König.

**Blambert, Maurice:** Sur la composition des singularités des séries de Dirichlet générales. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 179—180 (1952).

Verf. gibt Resultate seiner weiteren Untersuchungen über die Singularitäten der Hadamardschen Komposition zweier Dirichletscher Reihen bekannt (vgl. dies. Zbl. 37, 180).

A. Pfluger.

**Lepson, Benjamin:** On hyper-Dirichlet series and on related questions of the general theory of functions. Trans. Amer. math. Soc. 72, 18—45 (1952).

This paper is concerned with convergence properties of series of the form (1)  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) e^{-\lambda_n z}$ ,  $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1 < \dots$ , where  $P_n$  is a polynomial of degree  $\mu_n$  and  $\mu_n/\lambda_n \rightarrow 0$ . Series of this type appear as formal solutions of infinite differential equations with constant coefficients. — In the first section, some auxiliary results on sequences of polynomials are derived. The notion of capacity is here of fundamental importance. In the second section, different kinds of convergence of (1) are discussed. The following results are typical. There is a number  $A$  such that (1) converges absolutely for  $\Re\{z\} > A$  while it diverges absolutely for  $\Re\{z\} < A$  except on a set of outer capacity zero. A corresponding result holds for termwise boundedness and for ordinary convergence. In the half-plane of convergence, the series represents an analytic function  $f(z)$ . If  $f = 0$ , then (1) vanishes identically.

L. Carleson.

**Wiebelitz, Rudolf:** Über approximative Funktionalgleichungen der Potenzen der Riemannschen Zetafunktion. Math. Nachr. 6, 263—270 (1952).

Für die  $k$ -te Potenz der Riemannschen Zetafunktion  $\zeta(s)$  mit  $s = \sigma + it$  wird unter der Voraussetzung  $\zeta(1/2 + it) = O(|t|^c)$ ,  $0 < c < 1/6$ , die folgende approximative Funktionalgleichung bewiesen:

$$\zeta^k(s) = \sum_{n \leq x} d_k(n) n^{-s} + \chi^k(s) \sum_{n \leq y} d_k(n) n^{s-1} - R_x(s) - \chi^k(s) R_y(s) + O\text{-Glieder}$$

$$\left( k \geq 3, \quad x \cdot y = \left( \frac{|t|}{2\pi} \right)^k, \quad x > A, \quad y > A \text{ (pos. Konst.)}, \quad -1/2 \leq \sigma \leq 3/2 \right).$$

$d_k(n)$  ist die Anzahl der Darstellungen von  $n$  als ein Produkt von  $k$  (pos. ganzen) Faktoren.  $\chi(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{1}{2} \pi s \Gamma(1-s)$ .  $R_x(s)$  und  $R_y(s)$  stellen gewisse Summen über  $\log^v x$  bzw.  $\log^v y$  dar mit Koeffizienten, die aus einer Laurententwicklung von  $\zeta^k(s)$  gewonnen werden. Die  $O$ -Glieder werden zunächst allgemein, dann spezialisiert für  $k = 3, 4 \leq k \leq 12$  und  $k \geq 13$  angegeben. — Der Beweis der obigen Funktionalgleichung wird nach Bereitstellung der notwendigen Sätze unter der Einschränkung  $1/2 \leq \sigma \leq 3/2$ ,  $t > 0$ , die am Schlusse wieder aufgehoben werden kann, geführt. — Die Arbeit stellt eine Erweiterung der von Hardy und Littlewood für  $\zeta(s)$  und  $\zeta^2(s)$  angegebenen approximativen Funktionalgleichungen [Proc. London math. soc., II. Ser. 29, 81—97 (1929)] dar. — Als eine Anwendung wird (ohne Herleitung) die Abschätzung von  $\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k} dt$  angegeben. *H. Unger.*

**Nassif, M.:** Zeros of simple sets of polynomials. Duke math. J. 19, 107—113 (1951).

Es sei  $\{p_n(z)\}$  eine einfache Polynombasis (vgl. z. B. Whittaker, Sur les séries de base de polynomes quelconques, Paris 1949; dies. Zbl. 38, 228); die Nullstellen der  $p_n(z)$  haben höchstens den Betrag eins. Dann läßt sich, wie Verf. früher [Proc. math. phys. Soc. Egypt 2, 1—6 (1944)] gezeigt hat, jede ganze Funktion durch die Basis darstellen, sofern ihre Wachstumsordnung höchstens eins ist und ihr Typ eine gewisse Zahl  $\rho$  nicht überschreitet. Verf. zeigt, daß  $1,351 < \rho < 1,378$  gilt, und verbessert damit die frühere Abschätzung erheblich. Sind die Nullstellen alle reell, so ist sogar  $\rho = 4/\pi$ . Benutzt werden Eigenschaften der sog. Gontcharoff-schen Polynome [N. Levinson, Duke math. J. 11, 729—733 (1944)]. *W. Hahn.*

**Davis, Philip und Henry Pollak:** On the zeros of total sets of polynomials. Trans. Amer. math. Soc. 72, 82—103 (1952).

Sei  $B$  ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der  $z$ -Ebene und  $L_B$  eine Klasse in  $B$  analytischer Funktionen, für die jeder Randpunkt von  $B$  Häufungspunkt (H.P.) singulärer Stellen von Funktionen aus  $L_B$  ist. (Also etwa  $L_B$  die Menge aller in  $B$  regulären Funktionen oder eine analytische Funktion, die  $B$  als Existenzgebiet hat.) Eine Folge von Polynomen  $p_n(z)$  von genau  $n$ -tem Grad ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) heißt total über  $L_B$ , wenn die Nullstellen der  $p_n(z)$  beschränkt sind und jedes  $f(z) \in L_B$  in  $B$  eine Darstellung  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n p_n(z)$  zuläßt. —

Die Verf. bringen die Lage der Nullstellen der  $p_n(z)$  und deren H.P. in Zusammenhang mit geometrischen Eigenschaften von  $B$ . Der zentrale Satz lautet: (1) Wenn  $z_b$  und  $z_{b'}$  zwei verschiedene Randpunkte von  $B$  sind, dann liegt in jeder der Halbebenen  $|z - z_b| \leq |z - z_{b'}|$ ,  $|z - z_b| \geq |z - z_{b'}|$  mindestens ein H.P. von Nullstellen von Polynomen, die über einer Klasse  $L_B$  total sind. Dieser Satz wird in mannigfacher Weise angewandt: (a) Hat die Menge der Nullstellen der  $p_n(z)$  nur einen H.P.  $z_0$ , so ist  $B$  notwendig ein Kreisgebiet mit  $z_0$  als Mittelpunkt. (b) Hat die Menge der Nullstellen der  $p_n(z)$  nur endlich viele H.P.  $z_1, \dots, z_p$ , jeder von positiver Stärke

$q_1, \dots, q_p$  [so daß also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N(z_i, \varepsilon_i, n) = q_i > 0$  ( $i = 1, \dots, p$ ) ist, wenn  $N$  die Anzahl der in  $|z - z_i| < \varepsilon_i$  gelegenen Nullstellen des Polynoms  $p_n(z)$  bei genügend kleinem  $\varepsilon_i$  bedeutet], dann ist  $B$  eine Lemniskate der Form  $\prod_{i=1}^p |z - z_i|^{q_i} = \frac{1}{M}$  ( $0 < M < \infty$ ). (c) Ist  $B$  konvex und hat der Rand von  $B$  an der Stelle  $z_b$  eine Ecke mit Winkel  $< \pi/2$ , dann ist  $z_b$  ein H.P. von Nullstellen derjenigen Polynome, die bez.  $B$  (oder bez. des Randes von  $B$ ) ein ON-System bilden. Dieses (von  $B$  abhängige) System von Polynomen besitzt auch die merkwürdige Eigenschaft, daß sich seine Nullstellen nicht stetig zu verschieben brauchen, wenn  $B$  stetig deformiert wird. — Sodann



wird (1) auf die zu  $B$  gehörigen Faberschen Polynome angewandt. Sei  $z = \psi(w) = w + a_0 + a_1/w + \dots$  in  $|w| > a$  ( $a > 0$ ) regulär und bilde dieses Gebiet schlicht auf das Äußere von  $B$  ab. Besitzt  $B$  eine analytische Berandung, so ist  $\psi(w)$  sogar für  $|w| > r$  regulär für gewisse  $r < a$ . Ist  $r_e = \inf r$ , so findet man (2)  $r_e \geq d^*/4$ , wobei  $d^*$  eine geometrische Größe des Gebiets  $B$  ist. Weiter werden Verzerrungssätze vom Typ Golusins [Uspechi mat. Nauk 6, 26—89 (1939), übersetzt als „Interior problems of the theory of schlicht functions“, Office of Naval Research, Washington 1947] behandelt. Schließlich wird der Fall untersucht, daß  $B$  mehrfach zusammenhängt, insbesondere ein Kreisring ist. Die Verf. weisen auf die Möglichkeit der Anwendung auf Überkonvergenzfragen und verwandte Probleme hin. — Zwei Unstimmigkeiten: Für Satz 2 lassen sich leicht Gegenbeispiele finden; seine Folgerungen sind jedoch richtig, wie man direkt aus (1) herleitet. In einer zu (2) gegebenen Verschärfung [Gl. (42)] ist  $m$  zu ersetzen durch  $m^* = \max_{z \in B} \min \text{dist}(z, \text{bdry } B)$ . D. Gaier.

**Davis, Philip:** An application of doubly orthogonal functions to a problem of approximation in two regions. Trans. Amer. math. Soc. 72, 104—137 (1952).

Seien  $B$  und  $G$  zwei beschränkte Gebiete der komplexen  $z$ -Ebene und  $G \subset B$ . Mit  $L^2(G)$  sei die Klasse der  $G$  eindeutigen und regulären Funktionen  $f(z)$  mit endlicher Norm  $\|f\|_G$  bezeichnet  $\left( \|f\|_G^2 = \iint_G |f(z)|^2 db \right)$ ; entsprechend  $L^2(B)$ . Nach Bergman (dies. Zbl. 40, 190)

gibt es dann ein System von Funktionen  $\{\Phi_n(z)\}$  aus  $L^2(B)$ , für die  $\iint_G \Phi_n(z) \Phi_m(z) db = \delta_{mn}$  und gleichzeitig  $\iint_B \Phi_n(z) \Phi_m(z) db = k_n \delta_{mn}$  gilt ( $m, n = 0, 1, \dots$ ) ( $k_n$  gewisse Konstante);

$\{\Phi_n(z)\}$  heißt zweifach orthogonal bez.  $G$  und  $B$ . — Verf. benützt dieses System  $\{\Phi_n(z)\}$  zur Behandlung des folgenden Problems aus der Theorie der Approximation im Komplexen: Zu einer gegebenen Funktion  $f(z) \in L^2(G)$  soll eine Funktion  $f_M(z) \in L^2(B)$  bestimmt werden, so daß  $\|f_M\|_B \leq M$  ist bei vorgegebenem  $M$  und gleichzeitig  $\|f - f_M\|_G$  ein Minimum wird. Entwickelt man  $f(z)$  und  $f_M(z)$  nach dem System  $\{\Phi_n(z)\}$ , so wird dieses Problem reduziert auf ein Extremalproblem im Hilbertschen Raume der Zahlenfolgen mit konvergenter Quadratsumme, das eine eindeutige Lösung besitzt. Die „Funktion bester Approximation“  $f_M(z)$  wird so mit Hilfe des Systems  $\{\Phi_n(z)\}$  dargestellt. Es gelingt aber auch,  $f_M(z)$  direkt (ohne  $\{\Phi_n(z)\}$  zu kennen) über den lösenden Kern einer gewissen Fredholmschen Integralgleichung auszu-drücken. Für  $M \rightarrow \infty$  strebt  $f_M(z)$  gegen  $f(z)$  gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von  $G$ . Diese Tatsache läßt die Deutung zu, daß jedes  $f(z) \in L^2(G)$  als  $E$ -Limes einer Folge von Funktionen aus  $L^2(B)$  dargestellt werden kann, wobei die Methode ( $E$ ) nur von  $B$  und  $G$  abhängt. Sodann wird die Klasse von Funktionen bester Approximation untersucht und insbesondere festgestellt, wann eine Funktion  $g(z) \in L^2(B)$  dazu gehört. Weiter wird die Frage beantwortet, wann eine Funktion aus  $L^2(G)$  eine analytische Fortsetzung in  $B$  hat, die zu  $L^2(B)$  gehört. Schließlich gibt Verf. Beispiele einfacher Gebiete  $B$  und  $G$ , für die die Lösung des Approximations-problems leicht angebar ist, und deutet eine mögliche Verallgemeinerung der hier behandelten Fragen an. D. Gaier.

**Tonjan, V. A.:** Über die asymptotische Approximation stetiger Funktionen auf Mengen, die die Ebene zerlegen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 187—190 (1952) [Russisch].

Sei  $E$  eine abgeschlossene und nirgends dichte Menge in der komplexen  $z$ -Ebene und  $f(z)$  eine in  $E$  stetige Funktion. M. V. Keldyš und M. A. Lavrentiev (dies. Zbl. 21, 335) haben die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer ganzen Funktion  $G(z)$  mit  $|f(z) - G(z)| < \varepsilon(|z|)$ ,  $z \in E$ , angegeben, wo  $\varepsilon(r)$ ,  $\rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ , eine beliebige stetige Funktion ist. Eine notwendige Bedingung hierzu ist, daß  $E$  die Ebene nicht zerlegt. — Verf. untersucht den Fall, daß  $E$  die Ebene zerlegt, und gibt eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer meromorphen Funktion  $H(z)$  derart, daß  $|f(z) - H(z)| < \varepsilon(|z|)$ ,  $z \in E$ , wo  $\varepsilon(r) > 0$  für  $r \rightarrow \infty$  beliebig schnell gegen Null konvergiert. Hinreichend ist, daß  $E$  so beschaffen ist, daß ein beliebiger Kreis vom Radius  $\delta$  ein außerhalb  $E$  gelegenes Kontinuum enthält, dessen Durchmesser  $r(\delta)$  unabhängig vom Mittelpunkt des Kreises, der Bedingung  $\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{r(\delta)} \leq k < \infty$  genügt. V. Paatero.

**Mandelbrojt, S.:** Quelques théorèmes de composition. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 79—90 (1952).

Comme généralisation d'un théorème démontré en collaboration avec H. D. Brunk (ce Zbl. 42, 297) l'A. déduit d'abord le résultat suivant. Hypothèses: (1)  $F(z)$  et  $\Phi(z)$  ( $z = x + iy$ )

sont holomorphes pour  $x > 0$  et continues pour  $x \geq 0$ . (2) Il existe  $\delta > 0$  tel que  $|F(z)| = O(|z|^\delta)$ ,  $|\Phi(z)| = O(|z|^\delta)$ , lorsque  $z \rightarrow 0$ . (3)  $\log M_n$  et  $\log M'_n$  étant des fonctions convexes de  $n$ ,  $\{a_v\}$  et  $\{b_v\}$  étant complexes on a  $\left| F(z) - \sum_{v=1}^n a_v z^{-v} \right| < M_n |z|^{-n}$ ,  $\left| \Phi(z) - \sum_{v=1}^n b_v z^{-v} \right| < M'_n |z|^{-n}$  ( $x > 0$ ,  $n \geq 1$ ). (4) Soit  $\{v_n\}$  une suite d'entiers positifs contenant tous les entiers impairs.  $N(t) = \sum_{v_n < t} 1$  ( $t > 0$ ),  $D(t) = N(t)/t$ ,  $D_0(t) = \text{borne } D(x)$ ,  $D_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} D_0(t) > 1/2$ . Posons

$C(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} [n\sigma - \log(M_n M'_n)]$ . Soit  $a_{v_n} b_{v_n} = 0$  ( $n \geq 1$ ),  $a_{2v-1} = b_{2v-1} = 0$  ( $v \geq 1$ ),

$\int_0^\infty C(\sigma) \exp \left[ - \int_0^\sigma [2 D_0(C(\tau) - 1)]^{-1} d\tau \right] d\sigma = \infty$ . Conclusion: L'une des fonctions  $F(z)$ ,  $\Phi(z)$  est identiquement nulle. Si  $F(z) \equiv 0$ , on a aussi  $a_v = 0$  ( $v \geq 1$ ), si  $\Phi(z) \equiv 0$ , on a aussi  $b_v = 0$  ( $v \geq 1$ ). — La démonstration de ce théorème est basée sur les mêmes lemmes que le cas particulier (correspondant au cas  $v_n = n$ ) cité plus haut et sur un cas particulier de „l'inégalité fondamentale“ de l'A. [Ann. sci. Ecole norm. sup., III. Sér. 63, 351–378 (1946)]. — Ensuite l'auteur construit, en utilisant le théorème R' de ce dernier mémoire et une idée qui lui a déjà servi pour démontrer entre autres le réciproque du théorème de Müntz [voir son livre qui doit paraître dans la Collection Borel], des fonctions  $\Phi(z) \not\equiv 0$  et obtient les deux théorèmes suivants. Hypothèses communes: Soit  $F(z)$  ( $z = x + iy$ ) holomorphe pour  $x > 0$ , continue pour  $x \geq 0$ ,

$|F(z)| = O(|z|^\delta)$  lorsque  $z \rightarrow 0$  ( $\delta > 0$ ).  $|F(z) - \sum_{v=1}^n a_v z^{-v}| \leq M_n |z|^{-n}$ , où  $\log M_n$  est fonction

convexe de  $n$  et les  $a_v$  sont complexes.  $\{v_n\}$  est une suite d'entiers positifs contenant tous les impairs, telle que  $D_0 > 1/2$ ,  $D_0(t)$  et  $D_0$  étant définis comme plus haut. A.  $\{q_n\}$  est une suite d'entiers pairs avec  $\sum_{n=1}^\infty q_n^{-1} < \infty$ . Pour tout  $m$  dans  $\{v_n\}$ , sauf, peut-être, pour les  $m$  dans  $\{q_n\}$ ,

on a  $a_m = 0$ . En posant  $C(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} (n\sigma - \log M_n)$  on a

$$(*) \quad \int_0^\infty C(\sigma) \exp \left[ - \int_0^\sigma [2 D_0(C(\tau) - 1)]^{-1} d\tau \right] d\sigma = \infty.$$

Conclusion:  $F(z) \equiv 0$ ,  $a_v = 0$  ( $v \geq 1$ ). B.  $\{q_n\}$  est une suite croissante d'entiers pairs. Pour tout  $m$  dans  $\{v_n\}$ , sauf, peut-être, pour  $m$  appartenant à la suite d'entiers complémentaire à  $\{q_n\}$ , on a  $a_m = 0$ . En posant  $C(\sigma) = \text{borne}_{n \geq 1} (n\sigma - \log(q_1 q_2 \dots q_n M_n))$  on a (\*). Même conclusion que pour A.

J. Horváth.

Chang, Shih-Hsun: On a theorem of S. Bernstein. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 87–92 (1952).

Sei  $F(z) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{\alpha_n}\right) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$  ( $\alpha_n > 0$ ) eine ganze Funktion und

$\sigma^{(m)} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{1/m}$ ,  $S^{(m)} = \sum_{n=1}^\infty a_n^{1/nm}$  gesetzt ( $m \geq 2$ ). Verf. beweist den

Zusammenhang  $S^{(m)} \leq c(m) \sigma^{(m)}$  mit  $c(m) = \pi e [m \sin(\pi/m)]^{-1}$  und verschärft damit ein Resultat von S. Bernstein (Leçons sur les propriétés extrémales etc., Paris 1926, S. 198–204), der für  $c(2)$  den Wert  $e(\sqrt{3} + \pi/4)$  angegeben hatte. Die Beweisführung ist teilweise in Anlehnung an die Bernsteinsche, jedoch erheblich vereinfacht. Da die Fredholmische Determinante gewisser Integralgleichungen die für  $F(z)$  angenommene Form hat, läßt sich das gewonnene Resultat für solche Fälle anwenden.

D. Gaier.

Epstein, Bernard and Joseph Lehner: On Ritt's representation of analytic functions as infinite products. J. London math. Soc. 27, 30–37 (1952).

Von J. F. Ritt stammt der folgende Satz [Math. Z. 32, 1–3 (1930)]: Sei  $f(z)$  in einer Umgebung von  $z = 0$  regulär,  $f(0) = 1$  und  $\frac{f'(z)}{f(z)} = - \sum_{n=1}^\infty c_n z^{n-1}$  ge-

setzt. Dann läßt  $f(z)$  in  $|z| < \varrho / \sqrt[n]{|c_n|}$  eine eindeutige Produktdarstellung  $\prod_{n=1}^\infty (1 - a_n z^n)$  zu, wobei  $\varrho$  eine universelle, positive Konstante ist. — Ritt hatte

$\varrho > \frac{1}{6}$  festgestellt; die Verff. beweisen jetzt, daß 1 der genaue Wert der Konstanten  $\varrho$  ist.

D. Gaier.

**Waadeland, Haakon:** On some transcendental equations. I. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 5, 16—19 (1952).

La Note contient la démonstration, par le calcul, de l'inexistence d'un point racine de  $\cos z \cdot \cos z = \pm 1$  en dehors des axes, réel et imaginaire, du plan de Gauss.

*A. Froda.*

**Bagchi, Hari Das and Phatik Chand Chatterjee:** Note on a second functional equation, connected with the function  $\wp(z)$ . Amer. math. Monthly 59, 91—92 (1952).

**Röhl, Helmut:** Funktionenklassen auf geschlossenen Riemannschen Flächen. Math. Nachr. 6, 355—384 (1952).

Verf. behandelt die arithmetischen Eigenschaften gewisser Funktionenklassen im Anschluß an die Untersuchungen von R. König, über dessen Resultate hinaus jedoch auch Funktionen vom Typ  $A(z) \exp J(z)$  [ $A(z)$  algebraische Funktion,  $J(z)$  beliebiges Abelsches Integral] herangezogen werden. Die Verallgemeinerung betrifft also im wesentlichen die Zulassung von Funktionen mit endlich vielen Unbestimmtheitsstellen exponentiellen Charakters. Die Ergebnisse und Beweismethoden schließen sich eng an die Theorie der algebraischen Funktionen an. — Die Arbeit gliedert sich in neun Paragraphen. § 1 behandelt die Definition der Klasse und deren Eigenschaften, sowie mehrere Sätze über Klassenbasen. § 2 bringt die Definition der Ordnungszahl einer Klassenfunktion in einem Punkte und anschließend die Aufstellung einer Idealbasis in endlich vielen Schritten. Es folgt der Kroneckersche Diskriminantensatz sowie die sinngemäße Übertragung der Begriffe Determinantenteiler, Elementarteiler usw., für die auch die üblichen Beziehungen gelten. In § 3 werden die komplementäre Klasse und die komplementären Basen untersucht. § 4 enthält Bemerkungen über Differentiale. In § 5 werden darauf die Divisorenklassen behandelt und in § 6 die Verzweigungsdivisoren einer Schar aufgestellt. Weitere Ergebnisse dieses Paragraphen finden ihre Anwendung in § 8, in dem die Weierstrasspunkte sehr eingehend behandelt werden. Zuvor werden in § 7 Anzahltheoreme (Riemann-Rochscher Satz) und daran anschließende Sätze bewiesen. Den Abschluß der Arbeit bildet eine Parallele zu den birationalen Transformationen.

*H.-J. Kowalsky.*

**Röhl, Helmut:** Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. II. Math. Ann. 124, 187—218 (1952).

Während der erste Teil der Arbeit (dies. Zbl. 43, 299) sich mit den arithmetischen Eigenschaften der dort definierten multiplikativen Klassen beschäftigte, werden jetzt die Integrale über Klassenfunktionen behandelt. Diese Untersuchungen, die weitgehend Parallelen zu der Theorie der Abelschen Integrale aufweisen, stützen sich in erster Linie auf die Aufstellung von Wegbasen. Über Bekanntes hinaus wird insbesondere die lineare Unabhängigkeit der angegebenen Wegbasen nachgewiesen. Aus einem im ersten Teil hergeleiteten Vertauschungstheorem werden Periodenrelationen zwischen den Perioden der Klasse und denen der komplementären Klasse gewonnen und daraus Folgerungen gezogen. Das Verständnis der teilweise recht umfangreichen Rechnungen und Fallunterscheidungen wird durch zahlreiche Figuren unterstützt.

*H.-J. Kowalsky.*

**Nikol'skij, S. M.:** Einige Ungleichungen für ganze Funktionen endlicher Ordnung und ihre Anwendungen in der Theorie der differenzierbaren Funktionen mehrerer Veränderlicher. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 142—144 (1952) [Russisch].

**Mejman, N. N.:** Vergleichssätze für analytische Funktionen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 149—150 (1952) [Russisch].

**Dugué, D.:** Fonctions fuchsienues et familles normales. J. Math. pur. appl., IX. Sér. 31, 19—35 (1952).

Suivant une méthode classique (Picard, Montel) mais en utilisant les fonctions fuchsienues (au lieu de la fonction modulaire ou des fonctions de Schwarz), l'A. démontre la non-existence de fonctions méromorphes dans tout le plan et présentant: soit 2 valeurs exceptionnelles et 1 valeur régulière d'ordre 2; soit 1 valeur exceptionnelle et 3 valeurs régulières d'ordre 2; soit 5 valeurs régulières d'ordre 2. Ces résultats sont bien connus. L'A. en déduit une nouvelle démonstration du théorème de Picard sur l'uniformisation des relations algébriques. Il étudie enfin les fonctions  $\varphi(z)$  analytiques, uniformes, prenant une infinité de fois toute valeur. Il montre que si une telle fonction est dépourvue de valeur asymptotique et de



valeur d'ordre de multiplicité supérieur à 2, il existe au moins 4 valeurs  $\alpha$  telles que  $\varphi(z) = \alpha$  ait des racines doubles; si une telle fonction est dépourvue de valeur multiple, elle présente au moins 3 valeurs asymptotiques sauf dans des cas très particuliers.

*J. Dufresnoy.*

**Dugué, Daniel:** Vers un théorème de Picard global. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 69, 65—81 (1952).

Picard's second theorem, that a uniform function takes every value with two possible exceptions, in the neighbourhood of an isolated essential singularity, gives  $2n$  as the maximum possible number of exceptional values of a uniform function having  $n$  isolated essential singularities. The author shows that  $2n$  may be replaced by  $n + 1$  and that this bound is certainly attained for  $n = 2$  and for  $n = 3$ . His main theorem is as follows: Let  $\Phi(z)$  be uniform in the whole plane, meromorphic in the neighbourhood of the origin and of infinity, having these two points as essential singularities and having, possibly, other singularities also. Then  $\Phi(z)$  has less than four Picard exceptional values at the origin and at infinity. — Extensions proved include the replacement of „exceptional Picard“ by „exceptional Borel“, and the result: Let  $E_1, E_2$  be the sets of exceptional points in the neighbourhoods of disjoint lines  $L_1, L_2$  respectively, and let  $C$  be  $E_1 \cap E_2$ . Then at least one of the sets  $E_1 - C, E_2 - C$  contains a single point at most. — Some of the results were stated by the author (this Zbl. 42, 86; 43, 298), a correction is made, and problems are raised concerning Julia exceptional values. *N. A. Bowen.*

**Collingwood, E. F. and M. L. Cartwright:** Boundary theorems for a function meromorphic in the unit circle. Acta math. 87, 83—146 (1952).

Let  $w = f(z)$  be meromorphic in the unit circle  $|z| < 1$ . The purpose of this paper is to investigate the behaviour of  $f(z)$  near the circumference  $|z| = 1$  in detail and to establish a systematic theory of the sets  $C, R$  and  $\Gamma$  (stated below) and their mutual relations for the unit circle both in the large and in the small. The central idea of the authors' method is derived from Iversen's theory of the inverse function. It consists in the analytic continuation of an inverse element along a suitable path. This paper is divided into three Parts and Appendix. — In Part I some boundary theorems in the large are obtained as applications of an elegant theorem. To explain this main theorem in the large, it is necessary to state some definitions and notations. The cluster set  $C(f)$  is the set of values  $a$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$  for some

sequence  $\{z_n\}$  where  $|z_n| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = 1$ . Obviously  $C(f)$  is closed and connected. The range

of values  $R(f)$  is the set of values  $a$  for which  $f(z_n) = a$  in a similar sequence  $\{z_n\}$ . The asymptotic set  $\Gamma(f)$  is the set of asymptotic values  $a$  such that  $\lim_{t \rightarrow 1} f(z(t)) = a$  on a continuous path  $z = z(t)$

$0 < t < 1$ , where  $\lim_{t \rightarrow 1} |z(t)| = 1$ . The limiting set (which is called the „end“ of the curve  $z = z(t)$ )

on  $|z| = 1$  is either a single point or a closed arc. In general, the closure of a set  $E$  is denoted by  $\bar{E}$ , the complement by  $\complement E$  and the frontier by  $\mathfrak{F} E$ . The authors prove the following main theorem. Theorem I. If  $f(z)$  is meromorphic in  $|z| < 1$ , then the following relations are satisfied: (i) If  $\Gamma(f)$  is unrestricted, then  $\mathfrak{F} R(f) \cup \mathfrak{F} C(f) = \complement R(f) \cap C(f) \subseteq \bar{\Gamma}(f)$ ; (ii) if  $\Gamma(f)$  is of linear measure zero, then  $\complement R(f) \subseteq \Gamma(f)$ . It follows from (i) that in the general case  $\complement R(f) \cap C(f) \subseteq \Gamma(f)$ ; this result is best possible in the sense that  $\Gamma(f)$  cannot be replaced by  $\Gamma(f)$  as the authors show by an interesting example. The main theorem may be regarded as the analogue of Iversen's theorem which states that for a function meromorphic in the finite plane  $|z| < \infty$  an excluded value is an asymptotic value. By (ii), if  $\Gamma(f)$  is finite or enumerable, then so is  $\complement R(f)$ . In particular, if  $f(z)$  has no asymptotic value, then  $\complement R(f)$  is void as was proved in a different way by the reviewer (this Zbl. 21, 239). To prove Theorem I the following lemmas are needed: (1) If  $\complement C(f)$  is not void, then  $\Gamma(f)$  is of positive linear measure.

(2) If  $a \in \complement \bar{\Gamma}(f)$ , then either (i)  $a \in \complement C(f)$ ; or (ii)  $a$  is an interior point of  $R(f)$ . (3) If  $a \in \complement \Gamma(f)$  and  $U(a, \varepsilon) \cap \Gamma(f)$  is of linear measure zero for some  $\varepsilon > 0$ , where  $U(a, \varepsilon)$  denotes the  $\varepsilon$ -neighbourhood of  $a$ , then either (i)  $a \in \complement C(f)$ ; or (ii)  $U(a, \varepsilon) \subseteq R(f)$  and  $a \in R(f)$ . — In part II the authors establish a system of boundary theorems in the small corresponding to the boundary theorems in the large proved in Part I. Let  $e^{i\theta}$  be any point of the circumference  $|z| = 1$ . The cluster set  $C(f, e^{i\theta})$  is the set of  $a$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = a$  for some sequence  $\{z_n\}$  where  $|z_n| < 1$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = e^{i\theta}$ . The range of values  $R(f, e^{i\theta})$  is the set of values  $a$  for which  $f(z_n) = a$  in a similar sequence. It is clear that  $C(f, e^{i\theta})$  is not void and either a single point or a continuum. The cluster set  $C_B(f, e^{i\theta})$  at  $e^{i\theta}$  with respect to the boundary is defined as  $C_B(f, e^{i\theta}) = \bigcap_{\eta} C(f, 0 < |\theta' - \theta| < \eta)$  where  $C(f, 0 < |\theta' - \theta| < \eta) = \bigcup_{0 < |\theta' - \theta| < \eta} C(f, e^{i\theta'})$ .  $a \in \Gamma(f, \theta_1 < \theta < \theta_2)$  means that there is an asymptotic path on which  $f(z)$  tends to  $a$  and whose end is contained in the arc  $z = e^{i\theta}$ ,  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ . The intersection  $\chi(f, e^{i\theta}) = \bigcap_{\eta} \Gamma(f, |\theta' - \theta| < \eta)$  plays a similar role in the theory in the small to that of  $\Gamma(f)$  in the theory in the large. It is obvious that  $\chi(f, e^{i\theta}) \subseteq \chi(f, e^{i\theta}) \subseteq \chi^*(f, e^{i\theta}) \subseteq C(f, e^{i\theta})$ , where  $\chi^*(f, e^{i\theta}) = \bigcap_{\eta} \bar{\Gamma}(f, |\theta' - \theta| < \eta)$ . Let there be two sequences  $\{z_n^{(1)}\}$  and  $\{z_n^{(2)}\}$  such that  $|z_n^{(1)}| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(1)} = e^{i\theta_1}$ ,  $|z_n^{(2)}| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(2)} = e^{i\theta_2}$ , where  $\theta_1 \neq \theta_2$ . Suppose that there is a sequence of continuous curves  $\gamma_n$  joining  $z_n^{(1)}$  and  $z_n^{(2)}$  and contained in an annulus  $1 - \varepsilon_n < |z| < 1$ , where  $\varepsilon_n > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ , such that  $|f(z) - a| < \eta_n$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$  for all  $z$  on  $\gamma_n$ . Then, by definition,  $a \in \Phi(f, e^{i\theta})$  for any  $\theta$  satisfying  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ . The authors prove the following main theorem in the small. Theorem II. If  $f(z)$  is meromorphic in  $|z| < 1$ , then for any  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ , the following relations are satisfied: (i) If  $\chi(f, e^{i\theta})$  is unrestricted  $\S R(f, e^{i\theta}) \cup \S C(f, e^{i\theta}) = \mathbb{C} \bar{R}(f, e^{i\theta}) \cap C(f, e^{i\theta}) \subseteq \chi^*(f, e^{i\theta}) \cup \Phi(f, e^{i\theta})$ ; (ii) If  $\Gamma(f, |\theta' - \theta| < \eta)$  is of linear measure zero for some  $\eta > 0$ ,  $\mathbb{C} R(f, e^{i\theta}) \subseteq \chi(f, e^{i\theta}) \cup \Phi(f, e^{i\theta})$  and if, further,  $\mathbb{C} R(f, e^{i\theta})$  contains more than two values,  $\Phi(f, e^{i\theta})$  is void and  $\mathbb{C} R(f, e^{i\theta}) \subseteq \chi(f, e^{i\theta})$ . The result (i) of Theorem II is also best possible in the sense that the set  $\chi^*(f, e^{i\theta})$  cannot be replaced by  $\chi(f, e^{i\theta})$ , as is shown by the same example as in the large. Theorem II implies a well-known Gross-Iversen's theorem: If  $f(z)$  is meromorphic in  $|z| < 1$ , then for any value of  $\theta$ , we have  $\mathbb{C} R(f, e^{i\theta}) \cap C(f, e^{i\theta}) \cap \mathbb{C} C_B(f, e^{i\theta}) \subseteq \Gamma_P(f, e^{i\theta})$ , where  $\Gamma_P(f, e^{i\theta})$  is the set of asymptotic values  $a$  such that  $\lim_{t \rightarrow 1} f(z(t)) = a$  on a continuous

path  $z = z(t)$ ,  $0 < t < 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} z(t) = e^{i\theta}$ . Theorem II also gives an extension of another Gross-Iversen's theorem. The authors prove: If  $f(z)$  is meromorphic in  $|z| < 1$ , then for any value of  $\theta$ , the set  $\mathbb{C} R(f, e^{i\theta}) \cap C(f, e^{i\theta}) \cap \mathbb{C} \Psi^*(f, e^{i\theta})$  contains at most two values, where  $\Psi^*(f, e^{i\theta}) = \bigcap_{\eta} \bar{\Gamma}(f, 0 < |\theta' - \theta| < \eta)$ . Also, if this set contains two values, then  $\mathbb{C} R(f, e^{i\theta})$

contains no other values [it is immediate that  $\Psi^*(f, e^{i\theta}) \subseteq C_B(f, e^{i\theta})$ ]. Furthermore many corollaries follow from Theorem II. In particular, two of them are stated as follows: A necessary and sufficient condition for  $\mathbb{C} R(f, e^{i\theta}) \subseteq \chi^*(f, e^{i\theta}) \cup \Phi(f, e^{i\theta})$  is that  $\mathbb{C} C(f, e^{i\theta})$  should be empty. A component of the open set  $\mathbb{C} \chi^*(f, e^{i\theta})$  is either a component of  $\mathbb{C} C(f, e^{i\theta})$  or is interior to  $C(f, e^{i\theta})$  [Cf. M. Ohtsuka, this Zbl. 40, 328]. — In Part III the classification and distribution of singularities of  $f(z)$  on the unit circle are studied. Denote by  $F$  the set of Fatou points on  $|z| = 1$  at which  $f(z)$  has a unique asymptotic value to which it tends uniformly in any angle at the point and contained in  $|z| < 1$ ; and by  $P$  the set of Picard points on  $|z| = 1$  in every neighbourhood of which, in  $|z| < 1$ ,  $f(z)$  takes all values with at most two exceptions.  $F'$  is the derived set of  $F$ . The principal theorem in Part III states: If  $f(z)$  is meromorphic in  $|z| < 1$ , then every point of the circumference  $|z| = 1$  belongs either to  $P$  or to  $F'$ . This theorem belongs to a type of results proved by Plessner [J. reine angew. Math. 158, 219—227 (1927)] and Littlewood [see M. L. Cartwright, this Zbl. 13, 69]. — All theorems in the three Parts can be extended by the conformal mapping to Jordan domains, those of Part I and Part II without restriction, and those of Part III subject to restrictions upon the boundary. These generalizations are dealt with in the Appendix. Finally it is necessary to add that this paper supersedes a paper by Cartwright of 1935 cited above which unfortunately contains an oversight.

K. Noshiro.

Valiron, Georges: Sur une classe de fonctions algébroides d'ordre nul. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. 1, 63—70 (1952).

Sei  $u(z)$  die durch die Gleichung  $A_\nu(z) w^\nu + A_{\nu-1}(z) w^{\nu-1} + \dots + A_0(z) = 0$  definierte algebraische Funktion, wo die Koeffizienten  $A_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{j,n} z^n$  ( $j = 0, 1, \dots, \nu$ ) ganze Funktionen sind, und sei  $T(r, u)$  die charakteristische Funktion von  $u(z)$ . Verf. beweist, daß, wenn  $T(r, u) = O[(\log r)^2]$  und  $A_\nu(z)$  ein kanoni-

sches Produkt ist,  $T(r, u)$  sich asymptotisch durch die Zahlen  $|c_{j,n}|$  darstellen läßt. Das Resultat wird auf alle Algebroiden nullter Ordnung erweitert, welche nur hinreichend regulär sind. Wenn  $u(z)$  eine ganze Algebroid und  $U(z)$  der größte von den Werten  $|u(z)|$  ist, so ist, unter einer Zusatzbedingung,  $\log U(z) \geq [1 - o(1)] \cdot T(r, u)$ , mit Ausnahme einer gewissen Menge von Werten  $z$ . V. Paatero.

**Davis, Philip and Henry Pollak: On an equivalent definition of the transfinite diameter.** Proc. Amer. math. Soc. **3**, 152—155 (1952).

Es sei  $B$  ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet in der  $z$ -Ebene. Dann wird der transfinite Durchmesser  $a$  (statt  $1/a$  im Text) von  $B$ , oder besser von  $\bar{B}$ , dadurch charakterisiert, daß das Einheitskreisäußere  $|\zeta| > 1$  sich durch eine Funktion der Form

$$z = a\zeta + a_0 + a_1/\zeta + \dots, \quad a > 0,$$

auf das Äußere von  $B$  schlicht und konform abbilden läßt. — Eine übliche Definition des transfiniten Durchmessers von  $B$  lautet im allgemeinen wie folgt. Es sei  $T_n(z)$  dasjenige Polynom (das sogenannte Tschebyscheffsche Polynom), welches die Größe  $\max_{z \in B} |F_n(z)|$  zum Minimum macht; zulässige Vergleichsfunktionen

$F_n(z)$  sind hierbei alle Polynome  $n$ -ten Grades mit dem Anfangskoeffizienten 1. Bezeichnet man das Maximum mit  $M_n$ , dann wird der transfinite Durchmesser von  $B$  definiert durch  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^{1/n}$ . — Verff. zeigen, daß ein ähnliches Resultat

auch gültig bleibt, wenn die  $L^\infty$ -Norm durch die  $L^p$ -Norm mit einem beliebigen  $p \geq 2$  ersetzt wird, vorausgesetzt, daß  $B$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, welches durch eine Jordan-Kurve berandet ist. Es sei nämlich  $Q_n^{(p)}(z)$  dasjenige Polynom, welches die  $L^p$ -Norm  $\left( \int_B |Q_n(z)|^p dx dy \right)^{1/p}$  ( $z = x + iy$ ) zum

Minimum macht unter allen Polynomen  $n$ -ten Grades mit dem Anfangskoeffizienten 1. Dann gilt die Limesgleichung  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n^{(p)})^{1/n} = a$ , worin  $\lambda_n^{(p)}$  die  $L^p$ -Norm von  $Q_n^{(p)}(z)$

bedeutet.

Y. Komatu.

**Meschkowski, Herbert: Über die konforme Abbildung gewisser Bereiche von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche. II.** Math. Ann. **124**, 178—181 (1952).

In Teil I (dies. Zbl. **43**, 82) ist der Beweis gegeben worden, daß die konforme Abbildung von Bereichen von unendlich hohem Zusammenhang auf Vollkreisbereiche in gewissen Fällen möglich ist. Im II Teil zeigt Verf., daß in gewissen Fällen eine Abbildung eines Bereiches mit ausgedehnter (nicht punktförmiger) Häufungskomponente auf einen Kreisbereich — der als einzige Häufungskomponente einen Punkt hat — möglich ist. Da Grötzsch gezeigt hat, daß man Bereiche von unendlichem Zusammenhang unter sehr allgemeinen Voraussetzungen auf Kreisschlitzbereiche abbilden kann, beschränkt sich Verf. auf die Abbildung solcher Bereiche auf Vollkreisbereiche.

J. Gorski.

**Bernardi, S. D.: Two theorems on schlicht functions.** Duke math. J. **19**, 5—21 (1952).

Verf. betrachtet die Klasse der in  $|z| < 1$  regulären und schlichten analytischen Funktionen  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$  und leitet zwei Sätze darüber her. Der erste Satz betrifft die sogen. Bieberbachsche Vermutung und lautet: die Abschätzung  $|a_4| < 4,0891$ , sogar genauer  $|a_4| < 4,0890827152$ , gilt für jede Funktion der Klasse. Dies ist eine Präzisierung der früher gewonnenen Abschätzung  $|a_4| < 4,16$  von B. Friedman [Duke math. J. **13**, 171—177 (1946)]. Der Beweisgang, welcher wesentlich auf einer Ungleichung von H. Prawitz [Ark. Mat. Astron. Fys. **20**, Nr. 6, 1—12 (1927/8)] beruht, verläuft zwar ganz elementar, aber doch ziemlich mühsam.



Der zweite Satz bezieht sich auf eine spezielle Teilklasse der oben betrachteten allgemeinen Klasse. Es sei  $K(N^{1/2}i)$  der imaginär-quadratische Körper, welcher aus dem rationalen Körper durch Adjunktion einer Wurzel der Gleichung  $x^2 + N = 0$  hervorgeht, wo  $N (\geq 1)$  eine keinen quadratischen Faktor enthaltende ganze rationale Zahl bedeutet. Ferner sei  $S(K(N^{1/2}i))$  die Teilklasse, welche aus den Funktionen mit lauter ganz-algebraischen Koeffizienten von  $K(N^{1/2}i)$  besteht. Verf. zählt dann im zweiten Satz alle möglichen Gestalten der zu  $S(K(N^{1/2}i))$  gehörigen endlich vielen Funktionen explizit auf. Dies ist eine Verallgemeinerung eines gleichfalls von Friedman erlangten Resultats (ibid.) über diejenige engere Teilklasse, welche aus den Funktionen mit lauter ganzrationalen Koeffizienten besteht. Zum Schluß wird noch bemerkt, daß der zweite Satz auch für die weitere Klasse der im Mittel univalenten Funktionen gültig bleibt. Die Abhandlung enthält einige Druckfehler und ungeschickte Ausdrücke.

Y. Komatu.

**Erwe, Friedrich:** Über die Schlichtheitschranken gewisser Funktionenfamilien. Math. Z. **56**, 57—64 (1952).

Es sei (1)  $f(z) = z + a_1/z + \dots$ , gültig für  $|z| > 1$ . Es gibt Zahlen  $\rho \geq 1$  der Eigenschaft, daß  $f(z)$  in  $|z| > \rho$  schlicht ist. Die untere Grenze  $\rho(f)$  dieser Zahlen heißt der Schlichtheitsradius von  $f(z)$ . Ist  $\mathfrak{F}$  eine Familie von Funktionen der Form (1) so wird die Schlichtheitschranke  $S\{\mathfrak{F}\}$  der Familie  $\mathfrak{F}$  durch  $S\{\mathfrak{F}\} = \inf_{f \in \mathfrak{F}} \rho(f)$

erklärt. Verf. bestimmt für die Familien  $\mathfrak{F}_{k,a}$ , die durch die Bedingungen  $\sum_{j=1}^{\infty} j |a_j|^k \leq a$ ,  $k > 0$  und  $a > 0$ , festgelegt werden, Schlichtheitschranken und Schrankenfunktionen ( $= f(z) \in \mathfrak{F}$  mit  $\rho(f) = S\{\mathfrak{F}\}$ ). Die Untersuchung stützt sich auf die Höldersehe Ungleichung und die folgende Tatsache: Für die Familie  $\mathfrak{F}_r$ , gegeben durch  $\sum_{j=1}^{\infty} j |a_j|/r^{j+1} \leq 1$ ,  $r$  fest  $> 1$ , ist  $S\{\mathfrak{F}_r\} = r$ . Die Bedingungen,

$\sum_{j=1}^{\infty} j |a_j|/r^{j+1} = 1$  und  $a_j = |a_j| \cdot \varepsilon^{j+1}$  für alle  $j$ , charakterisieren die Schrankenfunktionen. Für die Familie  $\mathfrak{F}_{k,a}$ :  $f(z) = z + b_2 z^2 + \dots$ , gültig für  $|z| < 1$  und  $\sum_{j=1}^{\infty} j |b_j|^k \leq a$  wird die entsprechende Frage behandelt.

H. Wittich.

**Heins, Maurice:** Riemann surfaces of infinite genus. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 296—317 (1952).

Riemann surfaces  $F$  of parabolic type with one boundary component are studied. Several new results are obtained, essentially as follows. Let  $\Omega$  be an end, i. e., a subregion of  $F$  with a compact complement. Consider the class  $P_{\Omega}$  of non-negative harmonic functions on  $\Omega$ , vanishing on the relative boundary  $\gamma$  of  $\Omega$ . The harmonic dimension  $n$  of the ideal boundary  $\Gamma$  of  $F$  is defined as the minimal number of elements of  $P_{\Omega}$  generating  $P_{\Omega}$  by linear combinations. A surface with a prescribed finite  $n$  is constructed. This gives the first known subclassification of parabolic surfaces. The problem of the existence of a surface with  $n = \infty$  remains open. The harmonic dimension is expressed in terms of R. S. Martin (this Zbl. **25**, 333), used earlier by Kjellberg for classification of boundary points of plane regions (this Zbl. **40**, 55). To this end, the harmonic minimal functions in  $P_{\Omega}$  are normalized so as to have the period 1 for the conjugate functions along  $\gamma$ . Then the number of normalized minimal functions equals  $n$ . Every bounded harmonic function on  $\Omega$  has a limit at  $\Gamma$  if and only if  $n = 1$ . This condition is also sufficient in order that every function of class  $P_{\Omega}$  has the limit  $\infty$ . The modular condition  $\Pi \sigma_n \rightarrow \infty$ , proved by the reviewer to be sufficient for the parabolic type (this Zbl. **35**, 50) is sufficient even for  $n = 1$ . — For a meromorphic function  $f$  on  $\Omega$  with a limit at  $\Gamma$  the local degree  $d(f)$  of  $f$  at  $\Gamma$  is defined as follows. Let  $\Omega_0$  be the given end,  $\Omega$  a generic subend,  $N(\Omega)$  the maximum number of times that  $f$  assumes any of its values in  $\Omega$ . Then  $d(f)$  is defined as  $\min_{\Omega} N(\Omega)$ . It is shown that either  $f$  has a limit and is then  $(1, d(f))$  on some subend or else the set of limits is the extended plane and  $f$  assumes every value infinitely often except a set of capacity zero. It was shown by Remoundos [Mém. Sci. Math. **23** Paris (1927)] and Ullrich (this Zbl. **3**, 212) that an algebroid function belonging to an  $n$ -sheeted covering surface of the finite plane omits at most  $2n$  values. The author constructs an (admitted) surface  $F$  with non-constant analytic functions omitting a countably infinite number of values. He further shows the existence of ends  $\Omega$  with the Picard

property: every meromorphic function on  $\Omega$  takes on all values infinitely often except two. This is a sharpening of a theorem of Myrberg (this Zbl. **34**, 52), according to which there are ends not admitting bounded analytic functions. — The author proves further that all bounded analytic functions on  $\Omega$  have limits at  $\Gamma$ . Every such function can be represented on some end as the composition of a bounded analytic function of minimal local degree and an analytic function about the limit of the former function at  $\Gamma$ . In the proof, use is made of the Schur algorithm.

L. Sario.

**Garabedian, P. R.:** A Green's function in the theory of functions of several complex variables. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 19—33 (1952).

Un précédent travail [J. Analyse math. **1**, 59—80 (1951)] exposait la méthode de l'A. qui tend à introduire la structure analytique complexe par les conditions aux limites de certains problèmes variationnels. — Les variables  $z_j, \bar{z}_j$ , ( $z_j = x_j + i y_j$ ) étant utilisées, on note  $\alpha_j = a_j + i b_j$  la normale  $(a_j, b_j)$  à la frontière  $C$  d'un domaine  $D$ ;  $\partial/\partial \bar{z}_j = 0$  sont les conditions d'analyticité;  $A(D)$  est la classe des  $f(z_1, \dots, z_n)$  analytiques dans  $D + C$ . — A toute fonction  $p$  à valeurs complexes définie sur  $C$ , correspond  $\beta(z_k, \bar{z}_k)$ , unique, dans  $D$ , avec

$$(1) \quad \sum_j \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}_j} \alpha_j = p \text{ sur } C,$$

et  $\Delta \beta \in A(D)$ ,  $(\beta \bar{f}) = \int_D \beta f d\tau = 0$  pour toute  $f \in A(D)$ .  $\beta$  est caractérisé par la

condition de minimiser  $\|\Delta \beta\|^2 = (\Delta \beta, \Delta \bar{\beta})$  parmi les solutions de (1). Un théorème de décomposition orthogonale vient préciser ce résultat: une fonction  $B$ , dérivable dans  $D + C$ , s'écrit: (2)  $B = \beta + \gamma + f$ , avec  $(\Delta \beta, \Delta \bar{\gamma}) = (\beta \bar{f}) = (\gamma f) = 0$ ;  $f$  minimise  $\|B - f\|$  dans  $A(D)$ ;  $\beta$  minimise  $\|\Delta B - \Delta \beta\|$  avec  $\Delta \beta \in A(D)$ ;  $\gamma$  minimise  $\|\Delta B - \Delta \gamma\|$  sous la condition  $\sum_j \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{z}_j} \alpha_j = 0$  sur  $C$ . La fonction de

Green  $\theta(z, t)$  est définie par  $\sum_j \frac{\partial \theta}{\partial \bar{z}_j} \bar{\alpha}_j = 0$  sur  $C$ ,  $\frac{\partial}{\partial z_j} \Delta \theta = 0$ , et  $(\theta f) = 0$  pour tout  $f \in A(D)$ , et par l'existence de la singularité classique pour  $z = t$ :  $\theta = \sigma_n r^{-2n+2} + \dots$ ,  $r$  étant la distance euclidienne entre  $\bar{z}$  et  $t$ . On a  $\beta(t) = \int_C \theta(z, t) p(z) d\sigma$ ;  $\gamma(t) =$

$-\int_C \theta(z, t) q(z) d\sigma$ ; avec  $p = \sum_j \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}_j} \alpha_j$ ,  $q = \Delta \beta$ . Le noyau de Bergman est alors donné par  $k(z, t) = \Delta_z \theta(z, t)$ . — L'orthogonalisation sur  $C$  donne des résultats analogues avec le noyau de Szegö. — Autant que la fonction de Green  $\theta$ , la décomposition (2) semble de grand intérêt, séparant par étapes les variables  $z_j$ , et  $\bar{z}_j$ .

P. Lelong.

**Tchen-yang, Vincent Ou:** Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1524—1526 (1952).

Für die hypergeometrische Funktion zweier komplexer Variablen:

$$F(x, y) = \int u^\alpha (u-1)^\beta (u-x)^\gamma (u-y)^\delta du, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ reell,}$$

werden die folgenden Ergebnisse mitgeteilt: Sie genügt einem gewissen System von drei linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung, welches als Lösungen drei linear unabhängige Zweige  $z_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , besitzt. Faßt man die  $z_i$  als projektive Koordinaten eines Raumes  $R$  von zwei komplexen Dimensionen auf, so wird durch die drei Zweige  $z_i(x, y)$  eine ein-mehrdeutige Abbildung des komplexen  $(x, y)$ -Raumes in den Raum  $R$  vermittelt. Dem 2-dimensionalen reellen  $(x, y)$ -Teilraum entspricht dabei eine Kette 2-dimensionaler Flächenstücke, von denen je vier passend gewählte alle übrigen bestimmen. Mittels eines Symmetrieverfahrens, analog dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip bei einer Veränderlichen, gewinnt man die analytische Fortsetzung der Abbildung und damit die Monodromiegruppe des Differentialgleichungssystems. Diese Gruppe besteht aus denjenigen projektiven Transformationen des Raumes  $R$ , die sich beim Umlauf längs geschlossener Wege

aus den Zweigen  $z_i$  durch reguläre Fortsetzung ergeben. Die Monodromiegruppe läßt eine gewisse Hermitesche Form invariant, deren elliptischer oder hyperbolischer Charakter durch die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  bestimmt ist. *F. Sommer.*

**Kriszten, Adolf:** Hyperkomplexe und pseudo-analytische Funktionen. *Commentarii math. Helvet.* **26**, 6—35 (1952).

Wie in der klassischen Funktionentheorie läßt sich für Funktionen  $w = f(z)$ , deren Argumente und Werte Elemente eines hyperkomplexen Systems über dem Körper der reellen Zahlen sind, der Begriff der Analytizität in verschiedener Weise einführen. G. Scheffers und andere Autoren gehen von der Forderung nach der Existenz einer richtungsunabhängigen Ableitung von  $f(z)$  aus, während R. Fueter und seine Schule das Bestehen eines Integralsatzes für Integrale auf Hyperflächen verlangen. Anders als im klassischen Falle sind diese beiden Definitionsmöglichkeiten in beliebigen Algebren nicht äquivalent. Die Schefferssche Definition führt nur in kommutativen Algebren zu brauchbaren Ergebnissen, dagegen läßt sich die von Fueter (zunächst nur für Quaternionenfunktionen) gegebene Definition auch in beliebigen Algebren sinnvoll verwenden. — In der vorliegenden Arbeit werden die Theorien beider Richtungen in eine umfassende Theorie der analytischen hyperkomplexen Funktionen eingeordnet. Als wesentliches Hilfsmittel wird der Kalkül der alternierenden Differentialformen herangezogen. Die Funktion  $f(z)$  ist links- bzw. rechts-analytisch im Sinne von Scheffers (S-analytisch), wenn  $d(dz f(z)) = 0$  bzw.  $d(f(z) dz) = 0$  gilt;  $f(z)$  ist links- bzw. rechts-analytisch im Sinne von Fueter (F-analytisch), wenn  $\delta(dz f(z)) = 0$  bzw.  $\delta(f(z) dz) = 0$  ist. Von hier aus gelangt Verf. auf sehr durchsichtige Weise zu wesentlichen Sätzen beider Theorien. Im Falle der F-analytischen Funktionen zeigt sich, daß für Flächen beliebiger Dimension Integralsätze gelten, die in Teilen bisher nur für die Algebra der Quaternionen und gewisse Cliffordsche Algebren bewiesen worden waren. Verf. untersucht ferner den Zusammenhang mit den harmonischen Differentialen und weist nach, daß die Definitionen der S- und F-Analytizität nur in der klassischen Funktionentheorie äquivalent sind. — In einem weiteren Abschnitt werden sodann andere Verallgemeinerungen der analytischen Funktionen, die sog. pseudo-analytischen Funktionen, betrachtet, die sich ergeben, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen durch ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten ersetzt werden. Verallgemeinerungen dieser Art sind von St. Bergman, Bers, Gelbart u. a. untersucht worden. Es gelingt Verf. auch hier, die Ergebnisse der verschiedenen Autoren einheitlich zusammenzufassen, die Beweise durchsichtig zu gestalten und neue Resultate zu gewinnen. *K. Stein.*

## **Modulfunktionen:**

**Bochner, S.:** Algebraic and linear dependence of automorphic functions in several variables. *J. Indian math. Soc., n. Ser.* **16**, 1—6 (1952).

$V_{2k}$  sei ein kompakter Raum von  $k$  komplexen Dimensionen,  $V$  sein (nicht kompakter) universeller Überlagerungsraum,  $G$  die Fundamentalgruppe.  $P$  sei ein Punkt aus  $V$  und  $f(P)$  eine in  $V$  holomorphe Funktion. Dann nennt Verf.  $f(P)$  automorph, wenn es zu jeder Abbildung  $a$  aus  $G$  eine in  $V$  holomorphe Funktion  $\eta_a(P)$  gibt, so daß  $f(aP) = \eta_a(P) f(P)$  ist. Dieser Begriff der automorphen Funktion ist weiter als der gewöhnliche, welcher für  $\eta_a$  nur eine Potenz der zu  $a$  gehörigen Funktionaldeterminante zuläßt. Aber schon Jacobi hat Funktionen mit allgemeineren Faktoren  $\eta$  betrachtet. Über die zum selben System von Faktoren gehörigen automorphen Funktionen beweist Verf. folgende beiden Sätze, auf deren große Verschiedenheit er ausdrücklich hinweist: Zwischen je  $k + 2$  von ihnen besteht eine algebraische Abhängigkeit und alle zusammen bilden einen Modul mit endlicher Basis. *G. Lochs.*

**Grosswald, Emil:** On the genus of the fundamental region of some subgroups of the modular group. *Amer. J. Math.* **74**, 86—88 (1952).

Mit einer einheitlichen Methode wird das Geschlecht der Fundamentalbereiche der Kongruenzuntergruppen  $\Gamma_0(p)$ ,  $\Gamma_0^0(p)$ ,  $\Gamma(p)$ , wo  $p$  eine Primzahl ist, berechnet. Neu ist die Formel für das Geschlecht von  $\Gamma_0(p)$ , nämlich  $[p/12] + r(r^2 - 25)/24$ , worin  $r \equiv p(12)$ ,  $|r| \leq 5$  ist. *G. Lochs.*

**Simons, William H.:** The Fourier coefficients of the modular function  $\lambda(\tau)$ . *Canadian J. Math.* **4**, 67—80 (1952).



Verf. bestimmt die Koeffizienten in der Entwicklung  $\lambda(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m$ , wo  $q = e^{\pi i \tau}$  und die Funktion  $\lambda(\tau)$  durch

$$\lambda(\tau) = \left[ \frac{\theta_2(0|\tau)}{\theta_3(0|\tau)} \right]^4, \quad \theta_2(0|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{(n+1/2)^2}, \quad \theta_3(0|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}$$

definiert ist. Sie gehört zur Hauptkongruenzgruppe der Stufe 2. Das Resultat lautet

$$(I) \quad a_m = \frac{\pi}{8\sqrt{m}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \equiv 2 \pmod{4}}}^{\infty} \frac{A_k(m)}{k} I_1\left(\frac{4\pi\sqrt{m}}{k}\right),$$

wo  $A_k(m) = \sum_{h \bmod k}' e^{-(2\pi i/k)(mh+h')} [h \ h' \equiv -1 \pmod{k}]$  (Summation über ein reduziertes Restsystem mod  $k$ ) und  $I_1$  die Besselsche Funktion erster Ordnung mit rein imaginärem Argument ist. Verf. betrachtet ebenfalls die Entwicklung

$$\frac{1}{\lambda(\tau)} = \frac{1}{16q} + b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m q^m.$$

Man erhält die zu (I) analoge Formel für  $b_m$ , indem man in (I) die Summationsbedingung  $k \equiv 2 \pmod{4}$  durch  $k \equiv 0 \pmod{4}$  ersetzt. Verf. beweist die Formeln in derselben Weise (mit der Hardy-Littlewoodschen Methode) wie Rademacher die entsprechende Formel für die absolute Invariante  $J(\tau)$  der vollen Modulgruppe bewiesen hat (dies. Zbl. 18, 246).

H. D. Kloosterman.

## Gewöhnliche Differentialgleichungen:

• Watzlawek, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Wien: Franz Deuticke 1952. 68 S. DM. 9.—

Das Bändchen enthält, nach den einzelnen Typen übersichtlich geordnet, rund 350 durchgerechnete Beispiele von Differentialgleichungen 1. — 4. Ordnung, die fast alle zu den elementar integrierbaren gehören, eine Tabelle wichtiger unbestimmter Integrale und ein Schrifttumsverzeichnis. Sein Ziel ist, dem Benutzer zu „einer gewissen Fertigkeit in der Auflösung der wichtigsten Differentialgleichungstypen“ zu verhelfen. Dieses Ziel kann als durchaus nützlich bezeichnet werden. Wenn sich auch solche Sammlungen durchgerechneter Beispiele bereits mehrfach in anerkannten Werken finden, so sind sie dort doch i. a. nur einem kleineren Leserkreis zugänglich. Auf möglichste „Fehlerfreiheit“ wurde nach dem Vorwort „größte Sorgfalt“ verwendet. Dies mag für die Durchrechnung der einzelnen Beispiele zutreffen. Leider weist das Werk aber neben manchen kleineren Versehen (z. B. unvollständigen Angaben in den Überschriften) eine Reihe von schwererwiegenden Fehlern auf, die seiner Brauchbarkeit gerade in der Hand des Anfängers sehr ernsthaften Abbruch tun werden. Davon seien hier nur die folgenden genannt: Im Beispiel 41 wird  $y = C x^{3/2} - 1/2 C$  als Gleichung eines Rotationsparaboloides bezeichnet. In Nr. 1, 248 wird die lineare homogene DGL mit — wie ausdrücklich gesagt wird — variablen Koeffizienten  $y'' + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = 0$  durch den Ansatz  $y = e^{\lambda x}$  mit der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + f(x) \cdot \lambda + g(x) = 0$  behandelt und anschließend sogar die Richtigkeit dieses „Verfahrens“ durch eine fehlerhafte Probe nachgewiesen, bei der  $f(x)$  und  $g(x)$  wie Konstante behandelt werden! Das bei den anschließenden Beispielen verwendete Verfahren (Angabe eines Partikulärintegrals, für das die Methode der Ermittlung nicht verwerten wird, und Bestimmung des zweiten, das mit dem ersten ein Fundamentalsystem bildet, mit Hilfe einer Quadratur) bleibt dafür ohne Erläuterung. Die Schreibweise  $\int M \partial x$  bei den exakten Differentialgleichungen und beim integrierenden Faktor ist inkorrekt. Beim integrierenden Faktor werden nur die Fälle  $\mu = \mu(x)$ ,  $\mu = \mu(y)$ , nicht  $\mu = \mu(x, y)$  behandelt. Die angegebene allgemeine Lösung der Riccati'schen Gleichung auf S. 13 bleibt ohne Angabe der Bedeutung von  $\Phi(x)$ ,  $\Psi(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  sinnlos, da sie auch ohne Beziehung zu den in den folgenden Beispielen angewandten Verfahren ist. — Im übrigen wird bei dem Anfänger, der nur ein solches Bändchen zur Hand hat, durch die gekünstelte Wahl der Beispiele zu leicht der Eindruck erweckt, daß die meisten Differentialgleichungen „elementar“ integrierbar sind, besonders auch, da außer der Integration durch Reihen keine Methode zur Behandlung der nicht elementar integrierbaren Typen (nicht einmal die Picard-Iteration) vorkommt. Hier wären zum mindesten entsprechende Hinweise im Vorwort nötig, zumal Verf. „möglichst ohne Hilfe größerer Werke, durch den angezeigten Lösungsweg allein, zum Verständnis der Lösungsmethoden“ führen will.

F. Reutter.

● **Hoheisel, Guido:** *Aufgabensammlung zu den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.* (Sammlung Götschen Band 1059.) Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1952. 124 S. DM 2,40.

Questo volumetto che si collega a due altri dello stesso A., il primo sulle equazioni differenziali ordinarie (questo Zbl. 42, 322) e il secondo sulle equazioni alle derivate parziali (Sammlung Götschen, Bd. 1003, 3. Aufl., Berlin 1951), si compone di tre capitoli dedicati rispettivamente alle equazioni differenziali del primo ordine, a quelle di ordine superiore e ad alcuni problemi sulle equazioni alle derivate parziali. — Nel primo capitolo opportuni esempi illustrano i metodi di integrazione basati sull'impiego del fattore integrante; segue la risoluzione delle equazioni dei tipi di Jacobi e di Riccati, lo studio degli integrali singolari collegati al  $p$  e al  $c$  discriminante e i procedimenti di integrazione fondati sulle trasformazioni di contatto. Chiude questo capitolo il teorema di unicità di Nagumo-Perron e la classificazione di Poincaré dei punti singolari. — Nel capitolo secondo sono applicati i metodi operazionali e matriciali per la risoluzione delle equazioni lineari di ordine superiore e sono esaminate 132 questioni, parte di natura applicativa e parte teorica, relative ai teoremi di esistenza e di oscillazione. — Delle 124 pagine del volumetto le ultime 12 del terzo capitolo contengono la risoluzione di 30 problemi su alcune equazioni pfaffiane, su particolari tipi di equazioni e di sistemi del primo ordine, in due o più variabili, integrati col metodo delle caratteristiche, e sulle equazioni di Monge. — I non specialisti potranno trarre dalla lettura di questo volume utili orientamenti ed ammaestramenti, gli specialisti vi troveranno invece un'ottima raccolta di problemi diretta ad illustrare efficacemente alcuni capitoli della teoria delle equazioni differenziali. G. Sansone.

**Mendès, Marcel:** *Sur les équations se ramenant à la forme canonique.* C. r. Acad. Sci., Paris 235, 408—409 (1952).

Verallgemeinerung eines Satzes von Meffroy, nach dem sich gewisse vier gewöhnliche Differentialgleichungen in vier Abhängigen durch eine lineare, homogene Transformation auf die kanonische Form bringen lassen. G. Hamel.

**Bulgakov, B. V.:** *Über die Gleichwertigkeit und Verträglichkeit von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.* Priklad. Mat. Mech. 16, 15—22 (1952) [Russisch].

Un système différentiel est écrit sous la forme (\*)  $f(D)y = w(t)$  où  $f(D)$  est une matrice  $(m \times n)$  dont les éléments sont des polynômes en  $D = d/dt$  et  $w(t)$  une matrice  $(m \times 1)$ ; il peut s'écrire aussi

$$f(D), w(t) \parallel \times \parallel \begin{matrix} y \\ -1 \end{matrix} \parallel = 0$$

où  $\parallel f(D), w(t) \parallel$  est la matrice-opérateur  $\parallel f(D) \parallel$  complétée par une colonne égale à  $\parallel w(t) \parallel$ . L'A. étudie les relations d'équivalence pour la matrice  $\parallel f, w \parallel$  qui sont définies par l'équivalence des systèmes différentiels correspondants. Il indique une forme canonique pour ces classes d'équivalence, et en déduit le théorème: pour que le système (\*) possède une solution, il faut et il suffit que les matrices  $\parallel f(D) \parallel$  et  $\parallel f(D), w(t) \parallel$  aient même rang. Un exemple est donné. Ch. Blanc.

**Kolodner, I. I.:** *On the applicability of a certain formula in the theory of linear differential equations.* Amer. math. Monthly 59, 168—170 (1952).

Es sei  $y_1 = u(x)$  eine Lösung von  $(p y')' + q y = 0$ ,  $p(x)$  positiv und stetig differenzierbar und  $q(x)$  stetig für  $a < x < b$ . Dann ist bekanntlich (1)  $y_2 =$

$$u(x) \int_{\alpha}^x \frac{d\xi}{p(\xi) u^2(\xi)} \quad (a < \alpha < b) \quad \text{eine zweite, von } y_1 \text{ linear unabhängige Lösung.}$$

Doch darf  $u(x)$  in  $(a, b)$  nicht verschwinden, sonst divergiert das Integral. Verf. gibt eine modifizierte Formel an, die auch in diesem Falle gültig bleibt. Es seien  $x_1, x_2, \dots$  und  $x'_1, x'_2, \dots$  die sich gegenseitig trennenden Nullstellen von  $u(x)$  und  $u'(x)$  in  $(a, b)$ , z. B.  $\alpha < x_1 < \beta < x'_1 < x_2$ . Man integriert nun (1) partiell

$$\text{und erhält } y_2(x) = -\frac{1}{p(x) u'(x)} + \frac{u(x)}{p(x) u'(x) u'(\alpha)} + u(x) \int_{\alpha}^x \frac{q(\xi) d\xi}{[p(\xi) u'(\xi)]^2}, \text{ eine Formel,}$$

die mit (1) für  $\alpha < x < x_1$  übereinstimmt, aber sogar für  $\alpha < x < x'_1$  gilt. Um über  $x'_1$  hinwegzukommen, spalte man in letzterer Formel das Integral rechter Hand

in zwei Teilintegrale von  $\alpha$  bis  $\beta$  und von  $\beta$  bis  $x$  ( $x'_1 < x < x_2$ ), und bringe das zweite Teilintegral durch partielle Integration wieder auf die Form (1) zurück. Die Rechnung ergibt einen Ausdruck, der bis  $x < x_2$  gilt und den man als den endlichen Bestandteil (E. B.) im Hadamardschen Sinne des divergenten Integrals in (1) bezeichnen kann. Dazu führt auch folgende Überlegung: Betrachtet man  $y_2$  als eine Distribution im Sinne von L. Schwartz, so gilt (1) ohne Einschränkung in  $(a, b)$ ;

dieser Distribution entspricht aber die Funktion  $u(x) \cdot \left( \text{E. B.} \int_{\alpha}^x \frac{d\xi}{p(\xi) u^2(\xi)} \right)$ .

R. Ullrich.

**Gurevič, V. B.:** Differentialgleichungen vom Typus der linearen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 199—202 (1952) [Russisch].

L'équation différentielle  $y' + p(x)y = \varphi(x)\psi(y/u)$  où  $u(x)$ , intégrale particulière de l'équation  $u' + p(x)u = 0$ , est supposée donnée, s'intègre par quadratures, en posant  $y = u \cdot v$ ,  $v$  étant une nouvelle fonction inconnue. De même l'équation (\*)  $y'' + p(x)y' + q(x)y = \varphi(x) \cdot F[(y/u)'; w]$ , si l'on connaît  $u$ , intégrale particulière de l'équation (\*\*)  $u'' + p(x)u' + q(x)u = 0$  et si  $u w' + [2u' + p(x)u]w = 0$ ; ici encore, il suffit de poser  $y = u \cdot v$ . L'équation (\*) peut du reste s'écrire aussi  $y'' + p(x)y' + q(x)y = \varphi(x) \cdot F[(y/u)'; (u_1/u)']$  où  $u$  et  $u_1$  sont deux intégrales particulières linéairement indépendantes de (\*\*).

Ch. Blanc.

**Pipes, Louis A.:** The reversion method for solving nonlinear differential equations. J. appl. Phys. 23, 202—207 (1952).

Für die Funktion  $y(t)$  sei eine nichtlineare Differentialgleichung der Form  $a_1 y + a_2 y^2 + \dots + a_s y^s + \dots = k \Phi(t)$  vorgelegt, wo  $k$  eine Konstante,  $\Phi(t)$  eine gegebene Funktion von  $t$  und die  $a_i$  im allgemeinen gegebene Funktionen des Operators  $D = d/dt$  sind. Die Lösung wird in der Form  $y = A_1 k + A_2 k^2 + \dots$  angesetzt und die  $A_i$  erscheinen bei dieser symbolischen und beim Verf. nicht näher begründeten Methode als Funktionen von  $D$ , sind also aus Differentialgleichungen zu ermitteln. Diese Differentialgleichungen sind linear und werden in den meisten der 7 Beispiele des Verf. mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst. L. Collatz.

**Fulton, Curtis M.:** The non-Euclidean projectile. Math. Mag. 25, 143—146 (1952).

Verf. zeigt, daß die Bahn eines geworfenen Punktes im hyperbolischen Raum im allgemeinen eine Parabel ist oder eine Abstandskurve. — Es seien durch einen Punkt  $O$  drei zueinander senkrechte Achsen gegeben und die Richtungswinkel eines Vektors  $OP$  seien  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ . Dann sind  $\sinh OP \cos \alpha$ , usw. die Weierstrasskoordinaten des Punktes  $P$ . Es werden nun Grenzflächenkoordinaten eingeführt mittels  $e^{-x} = \cosh OP - \sinh OP \cos \alpha$ ,  $e^{-x} y = \sinh OP \cos \beta$ ,  $e^{-x} z = \sinh OP \cos \gamma$ . Dann bezeichnet  $x = \text{konst.}$  eine Schar von Grenzflächen, während  $y = \text{konst.}$  und  $z = \text{konst.}$  Scharen von Ebenen bestimmen. Die Gravitationsbeschleunigung wird senkrecht zur Fläche  $x = \text{konst.}$  angenommen und ihre Größe als  $g e^{2x}$ , wobei  $g$  eine Konstante bezeichnet. Die Bewegungsgleichungen eines Punktes sind:  $\ddot{x} + e^{-2x}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) = g e^{2x}$ ,  $e^{-x}(\ddot{y} - 2\dot{x}\dot{y}) = 0$ ,  $e^{-x}(\ddot{z} - 2\dot{x}\dot{z}) = 0$ . Diese Gleichungen können leicht integriert werden und je nach den Voraussetzungen über die Integrationskonstanten findet man die verschiedenen Bahntypen.

J. C. H. Gerretsen.

**Wittich, Hans:** Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. 124, 277—288 (1952).

Verf. geht aus von der linearen homogenen Differentialgleichung (D. Gl.)

$$(1) \quad w^{(m)} + a_{m-1}(z) w^{(m-1)} + \dots + a_1(z) w' + a_0(z) w = 0,$$

deren Koeffizienten  $a_\mu(z) = A_\mu z^{\alpha_\mu} + \dots$  Polynome vom Grade  $\alpha_\mu$  sind. (1) läßt sich in die



## Frobeniussche Normalform

$$(2) \quad z^m w^{(m)} + z^{m-1} c_{m-1}(z) w^{(m-1)} + \dots + z c_1(z) w' + c_0(z) w = 0$$

überführen, wobei  $c_j(z) = z^{m-j} a_j(z) = A_j z^{g_j} + \dots$  ein Polynom vom Grade  $g_j = m + \alpha_j - j$  ist, und mit  $g = \max_{j=0}^m g_j$  wird  $c_j(z) = c_{j0} + c_{j1}z + \dots + c_{jg}z^g$ . Unter Verwendung der Wiman-

Valironschen Beziehung für die transzendente Funktion  $w$  ist  $w^{(j)}(\zeta) = (n(r)/\zeta)^j w(\zeta) (1 + \varepsilon_j(\zeta))$ ,  $n(r) = \text{Zentralindex}$ , wobei  $\varepsilon_j(\zeta) \rightarrow 0$  für  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Mit der Substitution  $\zeta = 1/x$  und  $y = 1/n(r)$  geht (2) über in (3):  $x^g + A_{m-1} x^{g-m-1} y + \dots + A_0 x^{g-g_0} y^m = 0$ . (3) stellt eine algebraische Funktion  $y = y(x)$  dar, deren Zweige sich aus den Punkten  $Q_j = (u = j, v = g - g_{m-j}, j = 0, 1, \dots, m)$ , des zugehörigen Puiseux-Diagramms in der  $(u, v)$ -Ebene bestimmen. Verf. beweist, daß die Ordnung  $\lambda$  einer ganzen transzendenten Lösung von (2) mit einer der  $Q$ -Zahlen  $(v_j - v_{j+1})/(u_{j+1} - u_j)$ , gebildet aus den Eckpunktskoordinaten des Diagramms, zusammenfällt, wobei höchstens  $v_j - v_{j+1}$  linear unabhängige Lösungen dieser Ordnung  $\lambda$  existieren. Für die Ordnungen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  der Lösungen  $w_1(z), \dots, w_m(z)$  der D. Gl. (1) gilt,

vorausgesetzt daß alle Lösungen ganz transzendent sind,  $m \leq \sum_{j=1}^m \lambda_j$ . Das Gleichheitszeichen

gilt für konstante Koeffizienten von (1). Die Riccatische D. Gl. (4)  $w' = a(z) + b(z)w + w^2$  mit  $a(z) = a_0 z^\alpha + \dots$ ,  $b(z) = b_0 z^\beta + \dots$  kann durch Transformation in eine Gleichung der Form (1)  $u'' - b(z)u' + a(z)u = 0$  übergeführt werden. Dies erlaubt dem Verf. Schlüsse für die transzendenten Lösungen von (4) zu ziehen, die i. a. jeden beliebigen Wert unendlich oft annehmen. Ausnahmewerte sind solche  $c$ , die einer Bedingung  $D(z) - a(z) + c b(z) + c^2 \equiv 0$  genügen. Für die Lösungen von  $w' = a(z) + w^2$  mit  $\alpha = 2\mu + 1$ , die stets transzendent sind, ist die Ordnung  $\lambda = 3/2 + \mu$ . Sind die Koeffizienten in (1) rational, so geht für ihre Lösungen die Ungleichung des zweiten Hauptsatzes von Nevanlinna in eine Gleichheit über und für die defekten Funktionswerte folgt  $\delta(c) = 0$  für alle  $c \neq 0, \infty$ . *H. P. Künzi.*

**Anastassiadis, Jean:** Sur les solutions entières de quelques équations différentielles. Bull. Sci. math., II. Sér. **76**, 57—64 (1952).

Verf. beweist einfache, bekannte Tatsachen über Ordnung und Typus von  $f_1(z) + f_2(z)$ ,  $f_1(z) \cdot f_2(z)$ , wenn die ganzen Funktionen  $f_j(z)$  von endlicher Ordnung und vom Normaltypus sind, und benützt sie zum Nachweis dafür, daß gewisse Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen keine ganzen transzendenten Lösungen endlicher Ordnung vom Normaltypus zulassen. Da nur Funktionen endlicher Ordnung betrachtet werden, ist die Behauptung, daß ein Resultat des Ref. über die ganzen Lösungen von  $w^{(n)} + P_1(z)w^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(z)w' = f(w)$  so bewiesen sei, irrig. *H. Wittich.*

**Lewis, Daniel C.:** Inequalities for complex linear differential systems of the second order. Proc. nat. Acad. Sci. USA **38**, 63—66 (1952).

Verf. leitet Ungleichungen her für die Lösungen des Systems  $dw/dt = \alpha w + \beta u$ ,  $du/dt = \gamma w + \delta u$  mit  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  als komplexwertigen Funktionen der reellen Variablen  $t$ . Dabei wird  $\Delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma \neq 0$  vorausgesetzt und überdies  $\gamma \neq 0$ . Später wird der Fall  $\alpha = \delta$  behandelt, welcher große Vereinfachungen nach sich zieht. Die gewonnenen Abschätzungen sind die besten ihrer Art und besonders brauchbar im Falle, daß die Ableitungen der  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  numerisch klein bleiben, insbesondere im Falle konstanter  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Aus den Abschätzungen gewinnt Verf. auch Kriterien für die Beschränktheit der Lösungen. *M. Pinl.*

**Miller, J. C. P.:** On the choice of standard solutions to Weber's equation. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 428—435 (1952).

In einer älteren Arbeit (dies. Zbl. **40**, 336) hat Verf. die Grundsätze festgelegt, nach denen ein Paar von Standardlösungen für eine homogene, lineare Differentialgleichung (D. Gl.) zweiter Ordnung aufgestellt werden sollte. Diese Grundsätze werden in der vorliegenden Arbeit vom Verf. auf die bekannte Webersche D. Gl.  $y'' - (a \pm z^2/4)y = 0$  angewendet. In der bisher üblichen Bezeichnungsweise ist eine Lösung dieser D. Gl. die Funktion  $D_{-a-1/2}(z)$ . Nach der Arbeit Millers wäre nach den von ihm aufgestellten Grundsätzen ein geeignetes Lösungspaar der Real- und Imaginärteil der Funktion  $\exp(-i(\gamma'_2/2 + \pi/8)) \cdot D_{i a - 1/2}(z \cdot e^{\pi i/4})$ , worin

$\gamma_2$  eine geeignet ausgewählte Konstante ist. Die beiden wesentlichen Eigenschaften dieses Lösungspaares sind: 1. für  $z = x - i \infty$  haben beide Lösungen gleiche Beträge und differieren in der Phase um  $\pi/2$ ; 2. für  $z = x + i \infty$  differieren sie wiederum in der Phase um  $\pi/2$ , ihre Beträge stehen aber jetzt in dem größtmöglichen Verhältnis. — Wegen anderer Eigenschaften der Standardlösungen wird auf die Originalarbeit verwiesen.

H. Buchholz.

**Taam, Choy-Tak:** Oscillation theorems. Amer. J. Math. 74, 317—324 (1952).

L'A. étudie la distribution des zéros de la solution de  $d^2W/dz^2 + Q(z)W = 0$  où  $Q(z)$  est une fonction analytique de la variable complexe  $z$ . Pour cela, il transforme l'équation en un système de deux équations à variables réelles auquel satisfait le module et l'argument ou la partie réelle et la partie imaginaire de  $W$  et applique la méthode de comparaison de Sturm.

M. Hukuhara.

**Mohr, Ernst:** Über das Sturm-Liouvillesche Eigenwertproblem. Math. Nachr. 7, 305—322 (1952).

Verf. will den Fredholmschen Gedanken, eine lineare Differentialgleichung als Grenzfall linearer Gleichungssysteme aufzufassen, übertragen auf Sturm-Liouvillesche Randwertaufgaben:  $-(p y')' + (q - \lambda r) y = f$  mit den Randbedingungen

$$\alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \gamma y(1) + \delta y'(1) = 0.$$

Das Intervall  $\langle 0,1 \rangle$  wird in  $n$  Teile der Länge  $h$  geteilt und den zugehörigen Differenzgleichungen eine Extremumaufgabe zugeordnet. Zuerst wird der homogene Fall  $f = 0$ , dann der inhomogene Fall  $f \neq 0$  mit den Unterfällen,  $\lambda$  kein Eigenwert und  $\lambda$  Eigenwert, behandelt. Es wird jeweils die Lösung der Differenzgleichungen aufgestellt. Diese fällt für allgemeines  $n$  sehr kompliziert aus, und es erweist sich dabei eine Reihe abkürzender Bezeichnungen als sehr zweckmäßig. Nun wird der etwas mühsame Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  durchgeführt und gezeigt, daß die Lösungen der Differenzgleichungen in die der Differentialgleichungsaufgabe übergehen. Verf. schreibt: „Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  ist ... ähnlich wie in der Fredholmschen Theorie streng zu begründen, so daß es hier genügt, wenn wir ihn rein formal ausführen und an den erhaltenen unendlichen Reihen unmittelbar die gewünschten Lösungseigenschaften ablesen.“

L. Collatz.

**Bautin, N. N.:** Über die Anzahl der Grenzzyklen, die bei Veränderung der Koeffizienten aus einem Gleichgewichtszustand vom Typus eines Strudels oder eines Wirbels entstehen. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 181—196 (1952) [Russisch].

Soit le système différentiel (\*)  $dx_i/dt = \sum_k a_{ik} x_k + \sum_{k,l} a_{ikl} x_k x_l$  ( $i, k, l = 1, 2$ ) avec  $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ . L'A. donne la démonstration du théorème suivant (énoncé déjà publié par lui, v. ce Zbl. 23, 36): si le système (\*) possède à l'origine un foyer ou un centre, un système „voisin“ possède au plus 3 cycles limites autour de l'origine, cette limite pouvant être effectivement atteinte. Le terme de „voisin“ doit s'entendre ici dans l'espace euclidien  $E^{10}$  relatif aux 10 coefficients du système (\*). Le fait que les seconds membres sont des polynômes du 2<sup>e</sup> degré au plus joue un rôle essentiel dans la démonstration.

Ch. Blanc.

**Stebakov, S. A.:** Eine qualitative Untersuchung des Systems  $\dot{x} = P(x, y)$ ,  $\dot{y} = Q(x, y)$  mit Hilfe der Isoklinen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 677—680 (1952) [Russisch].

L'A. étudie le comportement de courbes intégrales relativement à des courbes (qu'il appelle courbes canoniques) qui ne sont en aucun de leurs points tangentes à une courbe intégrale; il s'agit donc de considérations voisines de celles qui conduisent à la notion d'indice de Poincaré, mais ici les courbes canoniques sont en général ouvertes. L'A. montre que dans le voisinage d'un point singulier isolé, une courbe intégrale fermée ne peut couper un arc de courbe canonique limité par un arc simple d'isocline issu du point singulier.

Ch. Blanc.

Tichonov, A. N.: Systeme von Differentialgleichungen, die einen kleinen Parameter bei den Ableitungen enthalten. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 140—142 (1952) [Russisch].

Gradštejn, I. S.: Differentialgleichungen, in deren Faktoren bei den Ableitungen verschiedene Potenzen eines kleinen Parameters eingehen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 5—8 (1952) [Russisch].

In generalisation of previous work [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 985—986 (1952); this Zbl. 44, 92] the author now compares the vector-system

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & dx/dt = f(x, y, z, t), \quad 0 = h(x, y, z, t), \quad 0 = g(x, y, z, t), \\ \text{(B)} \quad & dX/dt = f(X, Y, Z, t), \quad \eta dY/dt = h(X, Y, Z, t), \\ & \eta^{1+\alpha} dZ/dt = g(X, Y, Z, t), \quad (\alpha > 0). \end{aligned}$$

As previously, the conditions for a solution of (B) to tend to a solution of (A) as  $\eta \rightarrow +0$  relate to the non-vanishing of certain functional determinants and the stability of an auxiliary system. The criteria for stability according to Ljapunov's two methods are explained.

Fr. V. Atkinson.

Coddington, Earl A. and Norman Levinson: A boundary value problem for a nonlinear differential equation with a small parameter. Proc. Amer. math. Soc. 3, 73—81 (1952).

Verff. untersuchen das Verhalten der Lösung  $y(x, \varepsilon)$  der Differentialgleichung (1)  $\varepsilon y'' + f(x, y) y' + g(x, y) = 0$  für die Randbedingungen (2)  $y(0, \varepsilon) = y_0$ ,  $y(1, \varepsilon) = y_1$  ( $\varepsilon > 0$ , kleiner Parameter) im Zusammenhang mit der Lösung  $u(x)$  der Gleichung (3)  $f(x, u) u' + g(x, u) = 0$  mit  $u(1) = y_1$ . Folgendes wird bewiesen: Es möge (1) in  $0 \leq x \leq 1$  eine Lösung  $u(x)$  mit  $u(1) = y_1$  und  $u(0) = u_0 \geq y_0$  besitzen, ferner sollen  $f$  und  $g$  im Bereich  $R$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $|y - u(x)| \leq a$  ( $a > 0$ ) gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen, und es soll dort  $f > k$  ( $k > 0$ ) gelten. Dann existiert für alle genügend kleinen Werte von  $\varepsilon > 0$  in  $R$  eine Lösung  $y(x, \varepsilon)$  der Randwertaufgabe (1), (2); es gilt  $y(x, \varepsilon) \rightarrow u(x)$ ,  $y'(x, \varepsilon) \rightarrow u'(x)$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$ , gleichmäßig für alle  $x$  in  $0 < \delta \leq x \leq 1$ . Diese Lösung ist die einzige im Bereich  $R_0$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $|y - u(x)| \leq a_1$  ( $0 < a_1 < a$ ).

K. Maruhn.

Weidenhammer, F.: Resonanzlösungen inhomogener Mathiescher Systeme. Z. angew. Math. Mech. 32, 154—156 (1952).

In dem Differentialgleichungssystem

$$\omega^2 \ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m + \varepsilon \cos s \sum_{n=1}^N F_{mn} v_n = \varepsilon H_m \cos s \quad (m = 1, 2, \dots, N),$$

welches in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung der inhomogenen Mathieschen Gleichung darstellt, haben die periodischen Koeffizienten und die Störglieder die gleiche Periode  $2\pi$ ; es sind  $F_{mn}$ ,  $H_m$  Konstanten,  $\omega_m$  die Eigenfrequenzen,  $\omega$  und  $\varepsilon < 1$  Parameter. Mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten und von Fourieransätzen wie bei der Mathieschen Gleichung ergibt sich: die partikulären Lösungen des Systems sind im allgemeinen periodisch der Periode  $2\pi$ . Für gewisse Parameter  $\omega, \varepsilon$  kann es jedoch Resonanzlösungen geben; bei ihnen wächst die Amplitude mit der Zeit  $t$  unbegrenzt an, das Wachstum der Amplitude ist durch  $t^n$  mit ganzzahligem  $n \geq 2$  gegeben. Resonanzlösungen treten nur für solche Paare  $\omega, \varepsilon$  auf, für welche die zum System gehörigen homogenen Gleichungen periodische und gerade Lösungen besitzen. Das kann nur auf jeweils einer der beiden Grenzkurven der Instabilitätsbereiche erster Art und gerader Ordnung eintreten.

L. Collatz.

Vinograd, R. E.: Über ein Kriterium der Instabilität im Sinne von Ljapunov für die Lösungen eines linearen Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 201—204 (1952) [Russisch].



Let  $\dot{y} = A(t) y$  be a system of differential equations;  $\lambda_i(t)$  are the characteristic roots of  $B(t) = (A + A^*)/2$ . If  $\sup_t \int_0^t \sup_i \{\lambda_i(t)\} dt = -\sup_t \int_0^t \inf_i \{\lambda_i(t)\} dt = \infty$ ,  $\sup_t \int_0^t \text{Tr} [A(t)] dt < \infty$ , the instability of the solutions cannot be ascertained by means of the criteria of Wazewski (this Zbl. 36, 57), Wintner (this Zbl. 37, 63) or Antosiewicz (this Zbl. 43, 310), nor by means of the theorem of Liouville. In this case, new sufficient conditions are stated, based on a more detailed investigation of the behavior of the  $\lambda_i(t)$ . The statements are rather involved; no proofs are given.

J. L. Massera.

**Gavrilov, N. I.:** Über die Stabilität nach Ljapunov von Systemen linearer Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 425—428 (1952) [Russisch].

Consider the system  $\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n P_{ik}(t) x_k$ ; let  $u_i(t) = \exp \left[ \int_0^t \text{Re } P_{ii}(t) dt \right]$ ,  $b_{ii} = 1$ ,  $b_{ik}(t) = -u_i(t) \cdot \int_0^t \{|P_{ik}(t)|/u_i(t)\} dt$  ( $i \neq k$ ), and  $D_n(t_1, \dots, t_n)$  be the determinant with elements  $b_{ik}(t_i)$ . If there is a  $T$  such that for any choice of the  $t_i \geq T$  we have:  $D_n(t_1, \dots, t_n) > 0$ , all diagonal minors of  $D_n$  are  $\geq 0$ , the functions  $u_i A_{ik}/D_n$  are bounded, then the solution  $x = 0$  of the system is stable ( $A_{ik}$  are the algebraic complements of  $b_{ik}(t_i)$  in  $D_n$ ). This sufficient condition is weaker than several previously known ones.

J. L. Massera.

**Coddington, E. A.:** The stability of infinite differential systems associated with vortex streets. J. Math. Physics 30, 171—199 (1952).

Vorgelegt ist ein unendliches System linearer Differentialgleichungen des Typs (1)  $\frac{d\zeta_n}{dt} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{nm} \zeta_m$ ; die  $A_{nm}$  ( $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) sind quadratische Matrizen von  $k$  mal  $k$  konstanten Elementen der speziellen Struktur  $A_{nm} = A_{n-m}$ , die  $\zeta_n$  sind Vektoren im  $k$ -dimensionalen Raum. Es sei weiter  $A$  die unendliche Matrix der  $A_{nm}$  und  $\zeta$  der Vektor mit den  $\zeta_n$  als Komponenten. Dann erscheint (1) in der Gestalt (2)  $d\zeta/dt = A \zeta$ . Unter der Annahme, daß die Elemente der Matrizen als Fourierkoeffizienten stetiger Funktionen über einem Intervall  $0 \leq \mu \leq 1$  aufgefaßt werden können, konstruiert Verf. die (einzige) Lösung von (2) mit den Anfangswerten  $\zeta^0 = (\zeta_n^0)$   $\left[ i = 1, \dots, k; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \|\zeta^0\| = \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^k |\zeta_n^0|^2 \right)^{1/2} < \infty \right]$

und studiert das Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ . Hieraus ergeben sich notwendige sowie hinreichende Bedingungen für die Stabilität von (1) bzw. (2), wobei dieses System bezüglich der Menge aller Anfangswerte  $\zeta^0$  mit  $\|\zeta^0\| > \infty$  stabil genannt wird, wenn und nur wenn mit  $t \rightarrow \infty$  für alle Lösungen dieser Anfangswertprobleme  $\limsup \|\zeta\| < \infty$  gilt. — Diese Betrachtungen werden nunmehr auf Stabilitätsuntersuchungen an v. Kármánschen Wirbelstraßen angewendet, bei denen die Wirbel der einen Straße mit der Wirbelstärke  $\Gamma > 0$  in den Punkten  $(2nb + c, a)$  ( $n = 0, \pm 1, \dots$ ), die der anderen mit  $\Gamma < 0$  in den Punkten  $(2nb - c, -a)$  liegen. Wie sich zeigt, ist die Straße für  $q \neq \frac{1}{2}$  ( $q = c/b$ ) instabil, im Fall  $q = \frac{1}{2}$  erhält man als notwendige Bedingung für Stabilität die bekannte v. Kármánsche Relation  $\cosh \pi r = 2$  ( $r = a/b$ ). Diese Bedingung ist (im Sinne der obigen Definition) nicht hinreichend. Es wird dann eine Unterklasse zulässiger Anfangsbedingungen angegeben, in deren Rahmen der Fall  $q = \frac{1}{2}$  sicher Stabilität liefert. Im Anschluß werden die v. Kármánschen Ergebnisse mit den Resultaten des Verf. verglichen und diskutiert. — In entsprechender Weise behandelt Verf. schließlich noch zwei Typen von Wirbelanordnungen, die aus je vier Straßen bestehen. — Sämtliche Wirbelprobleme wurden in der üblichen Weise linearisiert.

K. Maruhn.

**Dubošin, G. N.:** Ein Stabilitätsproblem bei dauernd wirkenden Störungen. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1), 35—40 (1952) [Russisch].

The question of the dependence of the solution of  $\dot{z}_i = Z_i(t; z_1, \dots, z_k; \mu_1, \dots, \mu_r)$  with respect to the initial conditions  $z_1^0, \dots, z_k^0$  and the parameters  $\mu_1, \dots, \mu_r$  is reduced to the investigation of the (ordinary) stability of the solution  $x_1 = \dots =$

$x_n = 0$  ( $n = k + r$ ) of a system  $\dot{x}_j = X_j(x)$ , where  $x_i = z_i - \tilde{z}_i(t; \tilde{z}_1^0, \dots, \tilde{z}_k^0)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\tilde{z}_i$  being the solutions corresponding to the values  $\mu_h = \tilde{\mu}_h$ , and  $x_{k+h} = \mu_h - \tilde{\mu}_h$ ,  $h = 1, \dots, r$ ,  $X_i = Z_i(t, z, \mu) - Z_i(t, \tilde{z}, \tilde{\mu})$ ,  $X_{k+h} = 0$ .

*J. L. Massera.*

**Malkin, I. G.:** Zu einem Satz über die Stabilität einer Bewegung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **84**, 877—878 (1952) [Russisch].

Suppose  $X_s(t, x_1, \dots, x_n)$ ,  $X'_s(t, x_1, \dots, x_n)$  are functions vanishing identically when  $x_s = 0$ , the  $X_s$  being periodic in  $t$ , and assume that existence and uniqueness conditions are satisfied for both systems  $\dot{x}_s = X_s$  and  $\dot{x}_s = X_s + X'_s$ . If  $x_s = 0$  is an asymptotically stable solution of the first system and if  $X'_s \rightarrow 0$  uniformly as  $t \rightarrow \infty$ , then  $x_s = 0$  is also an asymptotically stable solution of the second system.

*J. L. Massera.*

**Erugin, N. P.:** Instabilitätssätze. Priklad. Mat. Mech. **16**, 355—361 (1952) [Russisch].

Several theorems on instability of systems  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $f(t, 0) = 0$ , are derived, of which the following one is typical: Suppose that functions  $V(t, x)$ ,  $T_1(T, x^0) > T$ ,  $a(x^0) > 0$ ,  $L(H, x^0) \leq a(x^0)$  exist such that  $V(T_1, x) \leq L(H, x^0)$  if  $|x| \leq H$ ;

if for any  $\varepsilon > 0$  there is an  $|x^0| \leq \varepsilon$  with the properties:  $V(T, x^0) > 0$ ,  $\int_{T_1}^{T_1+T} V' dt \geq$

$a(x^0)$  (integral taken along the trajectory through  $(T, x^0)$ ), then the solution  $x = 0$  is unstable. The reviewer is unable to understand certain remarks on the continuation of solutions which seem to be incorrect.

*J. L. Massera.*

**Dragilev, A. V.:** Periodische Lösungen der Differentialgleichung der nicht-linearen Schwingungen. Priklad. Mat. Mech. **16**, 85—88 (1952) [Russisch].

L'A. établit (par des considérations géométriques basées sur la théorie de Bendixson) le théorème suivant: l'équation (\*)  $x'' + f(x, x')x' + g(x) = 0$  possède au moins une intégrale périodique si les conditions suivantes sont simul-

tanément réalisées:  $xg(x) > 0$  pour  $x \neq 0$ ;  $\int_0^{+\infty} g(x) dx = \infty$ ;  $f(0, 0) < 0$ ; il existe un  $x_0 > 0$  avec  $f(x, v) \geq 0$  pour  $|x| \geq x_0$ ; il existe un  $M > 0$  tel que pour

$|x| \leq x_0$ ,  $f(x, v) \geq -M$  et un  $x_1 > x_0$  tel que  $\int_{x_0}^{x_1} f(x, v) dx \geq 4Mx_0 + \alpha$ ,  $\alpha > 0$ ,

$v$  étant une fonction donnée de  $x$ , positive et décroissante; enfin, des conditions de Lipschitz pour  $f$  et  $g$ . — Il établit en outre un théorème sur l'existence d'une intégrale périodique de (\*) dans le cas où l'équation  $x'' + f^*(x, x')x' + g(x) = 0$  possède une intégrale périodique, si  $f(0, 0) < 0$ ,  $xg(x) > 0$ ,  $f(x, v) \geq f^*(x, v)$ .

*Ch. Blanc.*

**Minorsky, Nicolas:** Sur l'interaction des oscillations non linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 292—294 (1952).

In der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + e(x^2 - 1)\dot{x} + [1 + (a - c)x^2] \cos 2t x = 0,$$

die die van der Polsche und Mathieusche als Spezialfälle enthält, seien  $a, c, e$  kleine Konstanten gleicher Größenordnung. Wie in früheren Arbeiten des Verf. [C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 2179 (1951)] wird die Gleichung durch ein System für zwei neue Variable  $\varrho, \varphi$  (mit neuen Konstanten  $A, C, E$ ) ersetzt

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\varrho}{4} [E(4 - \varrho) + (C\varrho - 2A) \sin 2\varphi], \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{4} (C\varrho - A) \cos 2\varphi$$

und aus der Art der singulären Punkte in üblicher Weise auf das Stabilitätsverhalten der periodischen Lösungen der Ausgangsgleichung geschlossen. Im  $A, C, E$ -Raum ergeben sich mehrere (durch Ungleichungen festgelegte) Teilbereiche mit stabilen

periodischen Lösungen. In einer Ebene mit  $A/C$  und  $E$  als Koordinaten lassen sich die Verhältnisse und die Erscheinung der Schwingungshysterese (hystérésis oscillatoire) veranschaulichen.

*L. Collatz.*

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Segre, Beniamino: Alcune applicazioni del calcolo esterno. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 234—239 (1952).

Aperçu sur un cours de l'A. publié ailleurs (Forme differenziali e loro integrali, vol. I. Roma 1951), en particulier sur les applications de l'algèbre extérieure qu'il contient (l'A. utilise plus souvent un langage géométrique que cette algèbre elle-même). Rappel de la définition donnée par l'A. des formes principales et du produit régressif. Application aux équations de la dynamique. Interprétation élégante des équations de Maxwell obtenue en posant  $f(x) = \sum_{j=1}^{j=3} (h_j - e_j i) u_j$ , ( $e_j$ ) (champ électrique, ( $h_j$ ) champ magnétique,  $x = i c t + \sum_{j=1}^{j=3} x^j u_j$ , et en exprimant que  $f(x)$  et  $f(x)$  sont fonctions monogènes du biquaternion  $x$ .

*P. Lelong.*

Conti, Roberto: Sul problema iniziale per i sistemi di equazioni alle derivate parziali della forma  $z_x^{(i)} - f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)})$ . I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. nat., VIII. Ser. 12, 61—65, 151—155 (1952).

I. Si enuncia un teorema di esistenza relativo al sistema di equazioni a derivate parziali del primo ordine

$$(1) \quad z_x^{(i)} = f^{(i)}(x, y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; z_y^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

dove le  $f^{(i)}$  sono definite e continue per  $0 \leq x \leq a$  e per tutti i valori reali di  $y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; q^{(i)}$ , e ammettono derivate  $f_y^{(i)}, f_{z^{(1)}}^{(i)}, \dots, f_{z^{(k)}}^{(i)}, f_{q^{(i)}}^{(i)}$  limitate e soddisfacenti uniformemente a una condizione di Lipschitz rispetto a  $y; z^{(1)}, \dots, z^{(k)}; q^{(i)}$ . Date  $k$  funzioni  $w^{(i)}(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), definite per  $-\infty < y < +\infty$ , aventi derivate prime e seconde continue e limitate, supponendo che  $a$  soddisfi una certa limitazione, esiste nella striscia  $0 \leq x \leq a$  un sistema di soluzioni della (1), che soddisfano le  $z^{(i)}(0, y) = w^{(i)}(y)$ . — II. Si espone la dimostrazione del teorema di esistenza enunciato in I; la dimostrazione sfrutta un procedimento, che è dovuto a E. Baiada [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. Ser. 12, 135—145 (1947)] e che si ispira ai metodi di L. Tonelli.

*M. Cinquini-Cibrario.*

Bechert, Karl: Lösungen und Lösungsverfahren für nichtlineare partielle Differentialgleichungen. Math. Nachr. 6, 271—292 (1952).

L'A. s'est proposé de rechercher l'intégrale générale d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Il considère l'équation du premier ordre (1)  $F(u; u_{x_1}, \dots, u_{x_n}; x_1, \dots, x_n) = 0$ ,  $u_{x_i} = \partial u / \partial x_i$ , où  $u$  est l'inconnue et  $x_1, \dots, x_n$  les variables indépendantes. On pose  $u_{x_i} = v_i$  avec  $\partial v_i / \partial x_k = \partial v_k / \partial x_i$  et on obtient en dérivant (1),

$$(2) \quad F_{x_k} + F_u v_k + \sum_i F_{v_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0.$$

L'A. considère alors les  $x_k$  comme des fonctions des  $v_i$  avec  $\partial(v)/\partial(x) \neq 0$ . Il montre que l'on a  $\partial x_i / \partial v_k = \partial x_k / \partial v_i$  et les  $n$  équations quasi-linéaires du premier ordre pour les  $x_j$ :

$$(3) \quad \sum_k (F_{x_k} + F_u v_k) \frac{\partial x_j}{\partial v_k} + F_{v_i} = 0;$$

les  $u, v_i, x_i$  sont évidemment liés par la relation  $F(u; v_i; x_i) = 0$  déduite de (1). Des équations (3), on déduit les équations des caractéristiques de (2) et (1). La méthode permet aussi de montrer que l'intégrale de (1) obtenue par la méthode des caractéristiques, peut s'exprimer à l'aide d'une seule fonction arbitraire. — Lorsque (1) ne dépend pas des variables indépendantes  $x_i$  et si  $F_u \neq 0$ , la méthode se simplifie et permet d'exprimer l'intégrale générale de (1)



à l'aide d'une fonction arbitraire et de quadratures. — Pour une équation (1) ne dépendant que de  $u_x, \dots, u_{x_n}$ , on posera  $u = w_1$ ,  $u_{x_i} = w_i$  ( $i \neq 1$ ), si  $\partial F / \partial u_{x_1} \neq 0$ ; par la même méthode, on exprime l'intégrale générale à l'aide d'une fonction arbitraire seulement. — Les types d'équations étudiées se rencontrent en Mécanique (équation de Hamilton-Jacobi) et en Optique géométrique (Eikonal). — L'A. étudie ensuite des équations de la théorie des fluides compressibles. En particulier, il ramène l'équation  $\sum u_{x_i x_i} = f(u)$  à l'équation du potentiel par une

transformation  $\Phi = f(u)$ . Pour l'équation (4)  $u_{xx} + [f(u)]_{yy} = 0$ , il montre la possibilité d'obtenir une intégrale dépendant d'une seule fonction arbitraire et correspondant à une onde progressive; pour une relation adiabatique entre la densité et la pression, l'équation (4) se ramène à une équation de Darboux. Généralisation à  $u_{xx} F + u_{yy} G + u_{xy} H = 0$  où  $F, G, H$  sont des fonctions de  $u_x$  et  $u_y$ .  
F. Bureau.

**Leray, Jean:** Les solutions élémentaires d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1112—1115 (1952).

Let  $a(\xi) = a(\xi_1, \dots, \xi_l)$  ( $l > 2$ ), be a polynomial of degree  $m$ . The open connected parts  $\Delta_\alpha$  of the set of real points  $\xi$  for which  $a(\xi + i\eta) \neq 0$  when  $\eta$  is real, are convex and the function  $d(\xi) = \sup_\eta |\alpha^{-1}(\xi + i\eta)|$  is bounded on compact subsets of  $\Delta_\alpha$ . The equation  $a(\partial/\partial x_1, \dots) u(x) = v(x)$  has a unique solution such that

$$\|u(x) \exp(-x \cdot \xi)\|_2 \leq d(\xi) \|v(x) \exp(-x \cdot \xi)\|_2 \quad (\xi \in \Delta_\alpha),$$

and the inverse Laplace transform of  $\alpha^{-1}(\xi + i\eta)$  is a distribution  $K_\alpha$ , the elementary solution of  $a$  with respect to  $\Delta_\alpha$ , such that  $u(x) = K_\alpha * v(x)$ . If there is one  $\Delta_\alpha$ , say  $\Delta_1$ , whose director cone  $F_1$  has a not empty interior (hyperbolic case), then there is another, say  $\Delta_2$ , such that  $F_2 = -F_1$  and if in addition the set  $W(a)$  of points  $\xi + i\eta$  such that  $a(\xi + i\eta) = 0$  has no singularities, the elementary solution  $K_\alpha$  with respect to  $\Delta_1$  vanishes outside the dual cone

$C_1$  of  $F_1$ , while outside  $-C_1$ :  $K_\alpha = (2\pi i)^{1-l} f\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots\right) \int_\Omega f^{-1}(\zeta) e^{\xi \cdot \zeta} \omega_\alpha(\zeta, d\zeta)$ ; here  $\Omega$  is

the part of  $W(a)$  whose real projection belongs to a vector  $\xi^*$  joining  $\Delta_2$  with  $\Delta_1$ ;  $\omega_\alpha(\zeta, d\zeta)$  is an exterior differential form such that  $da(\zeta) \cdot \omega_\alpha(\zeta, d\zeta) = d\zeta_1 \cdots d\zeta_l$ ; the orientation of  $\Omega$  is

such that  $i^{1-l} \sum \xi_k^* \frac{\partial a(\xi)}{\partial \zeta_k} \cdot \omega_\alpha(\zeta, d\zeta) > 0$ ;  $f$  is a polynomial of degree  $> l - m$  such that

some neighbourhood of  $\Omega$  is free of points of  $W(f)$ ; the integral does not depend on the choice of  $\xi^*$  and  $f$ . When  $a$  is homogeneous a similar formula for  $K_\alpha$  holds, which can be further reduced and leads to invariant forms of formulas given by Herglotz [Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, math.-phys. Kl. 78, 93—126, 287—318 (1926); 80, 69—114 (1928)] and Petrowsky [Mat. Sbornik, n. Ser. 17, 289—370 (1945)] and to a new formulation of the Petrowsky condition for a stable lacuna. Proofs are given in a lecture series by the author: Symbolic calculus with several variables, projections and boundary value problems for differential equations (Inst. for Adv. Study, Princeton N. J., 1951—52).  
L. Garding.

**Bochner, S.:** Partial differential equations and analytic continuations. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 227—230 (1952).

L'A. considère à la fois deux équations à coefficients constants du type:

$$p_1 + \dots + p_n \leq M \quad a_{p_1 \dots p_n} \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n} f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} = 0.$$

La première est de degré pair, à  $n$  variables et admet une fonction de Green analytique (hors  $O$ ) dont les dérivées d'ordre  $\geq r_0$  sont  $O(|x|^{-n-1})$  à l'infini. La seconde est à un nombre de variables  $m < n$ . Alors une fonction analytique solution des deux équations dans le voisinage  $U$  de la frontière connexe d'un domaine borné  $D$  se prolonge analytiquement dans  $D + U$ . Compléments si la frontière est assez régulière.  
M. Brelot.

**Fourès-Bruhat, Yvonne:** Théorème d'existence pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles à quatre variables. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 500—502 (1952).

L'A. schizza brevemente l'idea di un metodo di approssimazioni successive, per risolvere il problema di Cauchy relativo a un sistema di equazioni alle derivate parziali del tipo  $A^{\lambda\mu} \partial^2 W_s / \partial x_\lambda \partial x_\mu + f_s = 0$  nelle  $n$  funzioni incognite  $W_s$  delle quattro variabili  $x_\alpha$ , dove  $A^{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu$  è una forma quadratica di tipo iperbolico normale e le  $A^{\lambda\mu}, f_s$  sono date funzioni delle  $x_\alpha$ , delle  $W_t$  e delle derivate parziali prime di queste.  
G. Cimmino.

**Fourès-Bruhat, Yvonne:** Solution du problème de Cauchy pour des systèmes d'équations hyperboliques du second ordre non linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 585—587 (1952).

L'A. considère d'abord un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre linéaires à  $n$  variables  $x^\alpha$  et  $N$  fonctions inconnues  $u_s$  du type

$$A^{\lambda\mu} \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + B_s^{\lambda} \frac{\partial u_t}{\partial x^\lambda} + f_s = 0, \quad \begin{pmatrix} \lambda, \mu = 1, 2, \dots, n; \\ s = 1, 2, \dots, N \end{pmatrix}$$

où  $A^{\lambda\mu}$ ,  $B_s^{\lambda}$ ,  $f_s$  sont des fonctions des  $x^\alpha$  possédant des dérivées partielles continues et bornées jusqu'aux ordres  $n$ ,  $n-2$ ,  $n/2-1$ . On suppose que  $A^{\mu n}$  est positif et que pour  $x_n = 0$ , la forme quadratique  $A^{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu$  se réduit à une forme définie négative. — En utilisant une méthode voisine de celle qu'elle a employée pour  $n = 4$  (ce Zbl. 38, 255), l'A. ramène le problème de Cauchy à l'étude d'un système d'équations intégrales. — L'A. considère ensuite le système non linéaire à  $n$  variables  $x^\alpha$  et à  $N$  fonctions inconnues  $W_s$

$$(*) \quad A^{\lambda\mu} (W_T, W_{T\alpha}, x^\alpha) \frac{\partial^2 W_s}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + F_s(W_T, W_{T\alpha}, x^\alpha) = 0.$$

Sous des conditions convenables de régularité imposées à  $A^{\lambda\mu}$ ,  $f_s$  et aux données de Cauchy sur  $x^n = 0$ , le problème de Cauchy pour (\*) admet une solution  $n+1$  fois différentiable. Les résultats précédents généralisent à un nombre quelconque de variables les formules de résolution et les théorèmes d'existence donnés précédemment par l'A. pour  $n = 4$  [loc. cit.]. F. Bureau.

**Vallander, S. V.:** Über die Integration eines hyperbolischen Systems von zwei Gleichungen bei zwei unabhängigen Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 637—639 (1952) [Russisch].

Etant donnée l'équation du type hyperbolique

$$(1) \quad u_{\xi\eta} + A_1(\xi, \eta) u_\xi + B_1(\xi, \eta) u_\eta = 0,$$

l'A. détermine la forme des coefficients  $A_1$  et  $B_1$  de sorte que l'équation (1) admette l'intégrale générale de la forme

$$(2) \quad u = f_1(\xi, \eta) \Phi_1(\xi) + f_2(\xi, \eta) \Phi_2(\eta),$$

$\Phi_1$  et  $\Phi_2$  étant deux fonctions arbitraires de cette intégrale. L'A. en déduit la forme des coefficients  $A$  et  $B$  du système  $y_\eta = A(\xi, \eta) x_\eta$ ,  $y_\xi = B(\xi, \eta) x_\xi$ , lorsque la fonction  $x$  est de la forme (2). M. Krzyżański.

**Ingersoll, Benham-M.:** Problèmes pour les équations hyperboliques avec des conditions initiales sur les dérivées supérieures. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 693—694 (1952).

On considère l'équation  $* L(u) \equiv u_{xy} + a u_x + b u_y + c u = f$  et une courbe  $C: x = x(\tau)$ ,  $y = y(\tau)$ ,  $x'(\tau) y'(\tau) \neq 0$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ ;  $a, b, c, f$  et la courbe  $C$  satisfont à certaines conditions de dérivabilité. On pose  $u_{ij} = \partial^{i+j} u(x, y) / \partial x^i \partial y^j$ ,  $u_{ij}(\tau) = u_{ij}(x(\tau), y(\tau))$ . Dans le problème classique de Cauchy, on détermine une solution de  $*$  connaissant les valeurs de  $u_{00}(\tau)$  et  $u_{10}(\tau)$ . — L'A. envisage le problème plus général où sont données les fonctions  $u_{\mu\nu}(\tau)$  et  $u_{0\sigma}(\tau)$ . Pour que la solution soit déterminée, on doit ajouter certaines conditions supplémentaires. On suppose  $\mu \vee \varrho \neq 0$  et on a deux cas distincts suivant que  $(\mu - \varrho)(\nu - \sigma) \leq 0$  ou  $> 0$ . — La solution est en général unique dans un certain rectangle  $\Pi(C)$  si on donne outre  $u_{\mu\nu}$  et  $u_{0\sigma}$  sur  $C$ , les valeurs de  $u$  en  $N$  points dans  $X(C)$ ,  $N$  ne dépendant que de  $L(u)$  et de  $C$ . Cependant, il peut exister certaines configurations exceptionnelles des  $N$  points en lesquels on ne peut donner à  $u$  des valeurs arbitraires; ces configurations exceptionnelles constituent une variété à  $2N-1$  dimensions et sont analogues aux points conjugués de la théorie des équations de Sturm-Liouville. — L'A. met en évidence dans certains cas, l'existence de „courbes caractéristiques“ analogues

aux caractéristiques ordinaires, mais dépendant de  $a$ ,  $b$  et des ordres des dérivées données. — La Note énonce des résultats et ne donne aucune démonstration.

*F. Bureau.*

**Sobolev, S. L.:** Über ein neues Problem der mathematischen Physik. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 139—140 (1952) [Russisch].

**Quan, Pham Mau:** Sur une solution de l'équation d'ondes relative à un espace riemannien simplement harmonique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2329—2331 (1952).

Un espace simplement harmonique  $V_n$  est un espace riemannien pour lequel l'équation de Laplace associée  $\Delta u = 0$  admet la solution élémentaire  $s^{2-n}$ , où  $s$  désigne la distance géodésique. Il existe de tels espaces non triviaux pour  $n \geq 4$  si le  $ds^2$  n'est ni elliptique ni hyperbolique normal. L'A. appelle équation d'ondes relative à un  $V_n$  l'équation  $\partial^2 u / \partial t^2 - \Delta u = 0$ . Il montre que cette équation admet pour  $n$  impair ( $n - 3 = 2m$ ) une solution de la forme

$$u = s^{2-n} \sum (-1)^p \frac{C_m^p}{p! C_{2m}^p} s^p \Phi(s+t)$$

où  $\Phi$  désigne une fonction arbitraire, ainsi qu'une solution analogue en  $s-t$ . Un exemple est traité d'une manière détaillée à partir d'un espace simplement harmonique donné par A. G. Walker [J. London math. Soc. 20, 93—99 (1945)].

*A. Lichnerowicz.*

**Landis, E. M.:** Über die Eindeutigkeit der Lösung des Cauchyschen Problems für die parabolische Gleichung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 345—348 (1952) [Russisch].

L'A. démontre le théorème suivant: Si la fonction  $a(x, y)$  est bornée, non négative ou non positive dans le carré  $I = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$  et y satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à  $y$ , alors la seule solution de l'équation  $u_{xx} = a(x, y) u_y$  admettant les dérivées partielles des deux premiers ordres dans  $I$  et satisfaisant aux conditions de Cauchy  $u(0, y) = u_x(0, y) = 0$  pour  $0 \leq y \leq 1$ , est  $u(x, y) \equiv 0$ .

*M. Krzyżański.*

**Chalilov, Z. I.:** Über eine Methode zur Lösung gemischter Probleme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 659—662 (1952) [Russisch].

Die Differentialgleichung  $u_t = u_{xx} - c(t, x) u$  mit den Randbedingungen  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ ,  $u(0, x) = f(x)$  wird für  $t > 0$  durch den Ansatz  $u = \sum_1^\infty A_m(t) \sin mx$  gelöst. Die Substitution

$$A_m(t) = m^{-2} \int_0^t e^{-m^2(t-\tau)} \cdot \varphi_m(\tau) d\tau + a_m, \quad \left[ f(x) = \sum_1^\infty a_m \sin mx \right],$$

führt auf das System

$$\varphi_m(t) = \int_0^t K_{mn}(t, \tau) \varphi_n(\tau) d\tau + f_m(t),$$

wo

$$K_{mn} = -m^2 n^{-2} e^{-n^2(t-\tau)} \cdot 2\pi^{-1} \int_0^\pi c(t, \xi) \sin m\xi \sin n\xi d\xi.$$

Hinreichende Bedingungen für Lösbarkeit werden formuliert und auf Verallgemeinerungen wird hingewiesen.

*L. Gårding.*

**Kamynin, L. I.:** Ein Unterschied zwischen den Eindeutigkeitssätzen für die Wärmeleitungsgleichung und für Systeme von Differenzen-Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 13—16 (1952) [Russisch].

La recherche d'une solution de l'équation de la chaleur (1)  $u'_t = u''_{xx}$ , satisfaisant à la condition initiale  $u(x, 0) = \varphi(x)$ , se ramène, par l'application de la méthode des différences finies, au problème suivant: On cherche une solution du système infini d'équations différentielles ordinaires

$$(2) \quad \frac{du_n}{dt} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots,$$



satisfaisant à certaines conditions initiales pour  $t = 0$ . Tychonoff a démontré que la solution du problème relatif à l'équation (1) est unique dans la classe de fonctions  $u(x, t)$  auxquelles correspondent des nombres  $c$  et  $t_0$  tels que (3)  $\max_{0 \leq t \leq t_0} u(x, t) e^{-c x^2} \rightarrow 0$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ .

L'A. démontre que l'unicité de la solution du problème relatif au système (2) exige des hypothèses, concernant la croissance des  $u_n$  avec  $n$ , plus restrictives que celles qui résultent de la condition (3). Il en résulte qu'il est impossible d'appliquer la méthode des différences finies pour résoudre le problème relatif à l'équation (1), lorsque la fonction  $\varphi(x)$  satisfait à la condition  $\varphi(x) e^{-c x^2} \rightarrow 0$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ , sans satisfaire aux conditions assurant l'unicité de la solution du problème correspondant, relatif au système (2). L'A. donne un exemple effectif d'une telle fonction  $\varphi(x)$ . L'extension de la méthode des différences finies aux équations à plusieurs variables d'espace fait intervenir des autres complications. Quant à l'unicité du problème relatif à (1), le réf. trouve profitable de citer, outre le travail de Tychonoff, cité par l'A., ceux de Holmgren, qui a démontré qu'une solution  $u(x, t)$  de (1), satisfaisant aux conditions:  $u(x, 0) = 0$  et  $u(x, t) \leq M \exp K x^2 \log |x|$  pour  $0 \leq t \leq t_0$ , s'annule identiquement [Ark. Math. Astron. Fys. 18 (1924)], et de Täcklind, qui a résolu définitivement le problème, en donnant la condition nécessaire et suffisante pour l'unicité (ce Zbl. 14, 22).  
M. Krzyżański.

**Bureau, Florent:** Le problème de Cauchy et les séries de fonctions fondamentales. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 791—792 (1952).

La solution de l'équation:  $D(u) = \partial^2 u / \partial t^2 - L_x(u) = 0$ , où  $L_x$  est une expression auto-adjointe, avec conditions aux limites: a)  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $\partial u(x, 0) / \partial t = u_1(x)$ ,  $u_0, u_1$  étant des fonctions données régulières au sens de J. Hadamard dans  $(0, l)$ , b)  $u(0, t) = u(l, t) = 0$  quelque soit  $t \geq 0$  — est obtenue sous la forme:

$$(1) \quad u(x, t) = \sum_k a_k v_k(x) \cos \sqrt{\lambda_k} t + \sum_k \frac{b_k}{\sqrt{\lambda_k}} v_k(x) \sin \sqrt{\lambda_k} t,$$

$a_k, b_k$  constantes,  $v_k(x)$  et  $\lambda_k$  fonctions et valeurs propres du système  $L_x(v) + \lambda v = 0$ ,  $v(0) = v(l) = 0$ . — Le développement obtenu donne la solution du problème de Cauchy dans le triangle formé par l'axe  $t = 0$  et les caractéristiques passant par  $(0, 0)$  et  $(0, l)$ . — La fonction

$$H_s(x, y; t) = \sum_1^\infty \frac{v_k(x) v_k(y) \sin \sqrt{\lambda_k} t}{\lambda_k^{s+1/2}}$$

est analytique pour  $\Re s > 0$  et solution de l'équation pour  $\Re s$  assez grand. Elle permet de retrouver le développement (1) par l'étude du prolongement analytique

de  $\int_0^l u(y, t) \frac{\partial H_s}{\partial t}(x, y, 0) dy$  pour  $\Re s > -\frac{1}{2}$ . L'A. établit ainsi le lien cherché

entre la représentation des solutions par des intégrales définies portant sur les données et celle obtenue par les séries de solutions particulières. Une remarque de J. Hadamard souligne l'intérêt du résultat obtenu.

P. Lelong.

**Hellwig, Günter:** Bemerkungen zu der Satzgruppe von Hilbert über Systeme elliptischer Differentialgleichungen. Math. Z. 55, 276—283 (1952).

In this paper, the author disproves what might be called a conjecture of Hilbert about the following system of differential equations:  $\partial u / \partial x - \partial v / \partial y = p u + q v$ ,  $\partial u / \partial y + \partial v / \partial x = k u + l v$ , considered in a domain bounded by a curve sufficiently regular. The problem is to determine the functions  $u$  and  $v$  in the given domain,  $u$  satisfying on its boundary a condition of the Dirichlet type. Hilbert had stated that if the system of equations does not have any solution such that  $u = 0$  on the boundary, except the trivial solution  $u = v = 0$ , then there is necessarily one solution corresponding to any regular boundary value for  $u$ . He had stated also a proposition analogous to the one which obtains in the case of a linear, non homogeneous, problem, when the homogeneous problem has other than the trivial solution. The author remarks that this second conjecture lacks precision, the condition analogous to the orthogonality conditions of the linear problem not being explicitly stated. Moreover the second Hilbert conjecture does not mean much if the first one is incorrect, which is proved by the author, first in two particular cases, then in

the general case, by reducing the system to an integral equation and applying the known methods of Fredholm to it. The Dirichlet problem for the given system cannot therefore be set in the terms of Hilbert. The author announces at the end of his paper that he will shortly publish the right formulation of it. *C. Racine.*

**Olejník, O. A.:** Über elliptische Gleichungen 2-ter Ordnung. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 3 (49), 106—107 (1952) [Russisch].

**Hornich, Hans:** Zur Lösbarkeit von gewissen elliptischen Differentialgleichungen. *J. reine angew. Math.* 189, 204—206 (1952).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung

$$a^2 \left( r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{\nu} (\alpha_{\nu n} \cos \nu \varphi + \beta_{\nu n} \sin \nu \varphi),$$

wo die Summe nach  $\nu$  über die nichtnegativen Werte  $n, n-2, n-4, \dots$  zu erstrecken ist und die  $\alpha_{\nu n}, \beta_{\nu n}$  beschränkt sind. Gelöst wird die Gleichung durch die Reihe

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty} [A_{\nu}(r) \cos \nu \varphi + B_{\nu}(r) \sin \nu \varphi],$$

$$A_{\nu}(r) = \sum_{n=\nu, \nu+2, \dots}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu n} r^n}{a^2 n^2 - \nu^2} + C_{\nu} r^{\nu/a} + D_{\nu} r^{-\nu/a}$$

und entsprechend  $B_{\nu}(r)$ . Die Reihen sind bei irrationalem  $a$  im allgemeinen für  $r < 1$  konvergent. Wenn aber  $a$  einer speziellen Klasse Liouvillescher Zahlen angehört, können die Nenner  $a^2 n^2 - \nu^2$  für unendlich viele Paare  $n, \nu$  absolut so klein werden, daß keine Konvergenz mehr eintritt. Doch können die unangenehmen Glieder durch die Zusätze  $C_{\nu} r^{\nu/a}, D_{\nu} r^{-\nu/a}$  kompensiert werden, so daß man eine für  $0 < r < 1$  reguläre Lösung erhält, die aber für  $r = 0$  nicht mehr regulär ist.

*O. Perron.*

**Hornich, Hans:** Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen. *Math. Ann.* 124, 148—150 (1952).

Wenn man die Differentialgleichung  $\alpha x^r \frac{\partial^2 f}{(\log x)^r} - y^r \frac{\partial^2 f}{(\log y)^r} = \sum b_{nm} x^n y^m$  ( $n, m \geq 0$ ) durch den Ansatz  $f = \sum a_{nm} x^n y^m$  lösen will, so findet man  $a_{nm}(\alpha^r n^r - m^r) = b_{nm}$ . Daher hängt die Existenz einer solchen Lösung von der arithmetischen Natur von  $\alpha$  ab. Ist  $\alpha$  rational, so wird  $\alpha^r n^r - m^r$  für unendlich viele Wertepaare  $n, m$  verschwinden, und für diese muß dann  $b_{nm} = 0$  sein, damit eine solche Lösung existiert. Bei irrationalem  $\alpha$  ist die formale Lösungsreihe immer vorhanden und stellt eine wirkliche Lösung dar, soweit sie konvergiert. Wenn aber  $\alpha$  speziell eine Liouvillesche Zahl ist, dann wird  $|\alpha n - m|$  für gewisse  $n, m$  so klein, daß die Reihe nirgends konvergiert, es sei denn, daß die betreffenden  $b_{nm}$  einen ausgleichenden Kleinheitsgrad haben. Ähnliches gilt auch für eine etwas allgemeinere Differentialgleichung. Man vergleiche dazu noch eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 37, 192).

*O. Perron.*

**Višik, M. I.:** Über eine allgemeine Form von lösbaren Randwertaufgaben für die homogene und die inhomogene elliptische Differentialgleichung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 82, 181—184 (1952) [Russisch].

Continuing earlier work (this Zbl. 36, 198; this Zbl. 43, 95, 1. Referat) the author treats boundary value problems for the elliptic equation

$$L f = - \sum \partial(a_{ik} \partial f / \partial x_k) / \partial x_i + \sum b_i \partial f / \partial x_i + c f = h, \quad (c \geq 0),$$

in an open region  $D$  of  $n$ -dimensional space with smooth boundary  $\Gamma$ . The operator  $L$  is considered as a linear closed densely defined operator on  $H = L_2(D)$ . The boundary condition is assumed to have the form  $\gamma f = \varphi$ , where  $\gamma$  is a linear operator from  $H$  to a Banach space  $B$  of functions defined on  $\Gamma$  (e. g.  $B = L_p(\Gamma)$ ,  $p \geq 1$ ), such that  $\gamma f = 0$  when  $f$  vanishes outside a compact set of  $D$ . The boundary

value problem is said to be solvable (completely solvable) if it has a unique solution which is a continuous (completely continuous) function of  $h$  and  $\varphi$ . A proof is sketched that in this case  $\gamma$  has the form  $Q\gamma_1 - C\gamma_2$  where  $\gamma_1 f = f|_r$ ,  $\gamma_2 f = \sum a_{ik} \cos(\nu, x_i) \partial(f - u)/\partial x_i|_r$  ( $u$  is the solution of  $Lu = 0$ ,  $u|_r = f|_r$  and  $\nu$  the interior normal),  $C$  is a continuous (completely continuous) linear operator from  $\gamma_2 H$  to  $\gamma_1 H$  and  $Q^{-1}$  is a continuous (completely continuous) linear operator from  $B$  to  $\gamma_1 H$ . A second theorem deals with the connection under special circumstances between the solvability of the homogeneous case ( $h = 0$ ) and the inhomogeneous case ( $\varphi = 0$ ). L. Gårding.

**Olejník, O. A.:** Über die Eigenschaften der Lösungen gewisser Randwertaufgaben für Gleichungen vom elliptischen Typus. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 695—702 (1952) [Russisch].

The differential equation  $-\Delta u = f$  has in a region  $D$  with a smooth boundary the property (Keldych and Lavrentief, this Zbl. 17, 166) that if  $f \geq 0$  and  $u$  is not a constant and continuous in  $\bar{D}$  and attains its minimum in  $P$ , then  $\liminf (u(Q) - u(P))/|P - Q| > 0$ , ( $Q$  in  $D$  and tending to  $P$  along a straight line). This theorem is extended to the general elliptic equation  $-\sum a_{ik} u_{ik} + \sum b_i u_i + c u = f$ , ( $u_i = \partial u / \partial x_i$ ,  $c \geq 0$ ), and is used to prove various uniqueness theorems and estimates for solutions satisfying a boundary condition  $a(P) \partial u / \partial \gamma + b(P) u = \varphi(P)$ , ( $\gamma$  a direction from  $P$  into  $D$ ). L. Gårding.

**Ejdus, D. M.:** Über die stetige Abhängigkeit der Eigenfunktionen vom Gebiet. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 365—367 (1952) [Russisch].

Ein Beweis dafür, daß die Eigenfunktionen einer elliptischen Differentialgleichung zweiten Grades mit verschwindenden Randwerten stetig vom Gebiet abhängen, in dem Sinne, daß der Abstand zwischen der zum Gebiet  $\Omega_n$  gehörenden  $k$ -ten normierten Eigenfunktionen und dem Eigenraum des  $k$ -ten Eigenwerts des Gebietes  $\Omega$  mit wachsenden  $n$  gegen Null strebt (Metrik des Dirichletschen Integrals).

L. Gårding.

**Gilbarg, David:** The Phragmén-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations. J. rat. Mech. Analysis 1, 411—417 (1952).

In einem beliebigen, unbeschränkten Gebiet  $D$ , welches in einer Halbebene enthalten ist, wird der Ausdruck

$$(*) \quad L(u) \equiv a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y$$

betrachtet. Die Koeffizienten  $a, b, c, d, e$  seien beschränkte und stetige Funktionen von  $x, y$  in jedem endlichen Teilgebiet von  $D$ ; für  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$  sollen  $a, b, c$  beschränkt bleiben, während  $d, e$  wie  $O(r^{-1-\epsilon})$  gegen Null streben soll. Ferner sei (\*) „gleichmäßig“ elliptisch, d. h.  $a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 \geq \alpha(\lambda^2 + \mu^2)$  für jeden Punkt  $z = (x, y)$  aus  $D$  mit festem  $\alpha > 0$ . Verf. zeigt: Ist  $u(x, y) = u(z)$  eine Funktion, die in  $D$   $L(u) \leq 0$  erfüllt, deren untere Grenze nicht negativ ist, wenn  $z$  gegen einen Randpunkt strebt, und für die  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r)}{r} = 0$  [ $m(r) = \text{Minimum } u(z)$  für  $|z| = r$ ] ist, dann ist  $u \geq 0$  im ganzen Gebiet  $D$ . Mit diesem Satz kann das folgende interessante Ergebnis gewonnen werden, wobei wir die Voraussetzungen über die Koeffizienten unterdrücken: Sei (\*\*)  $a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = 0$  mit  $a, b, c$  Funktionen von  $x, y, u_x, u_y$  bezüglich einer Lösung  $u$  gleichmäßig elliptisch in  $D$  und sei  $v$  eine weitere Lösung [für die (\*\*) nicht notwendig elliptisch sein muß] mit  $v \geq u$  auf dem Rand von  $D$ , so ist  $v \geq u$  überall in  $D$ . Verf. schließt mit einer Anwendung auf die wirbelfreie, kompressible Unterschallströmung.

G. Hellwig.

**Hopf, Eberhard:** Remarks on the preceding paper by D. Gilbarg. J. rat. Mech. Analysis 1, 419—424 (1952).



Verf. überträgt den im vorangegangenen Referat besprochenen Satz von Gilbarg auf Lösungen „gleichmäßig elliptischer“ Differentialgleichungen der Form

$$L(u) \equiv a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

in  $n$  Veränderlichen  $x = (x_1, \dots, x_n)$  im Halbraum  $x_n > 0$ . G. Hellwig.

**Gilbarg, David:** Unsteady flows with free boundaries. Z. angew. Math. Phys. **3**, 34—42 (1952).

Verf. betrachtet ebene instationäre Strömungen mit einem endlichen Totwassergebiet hinter polygonalen Hindernissen; hierbei wird die (bei Geschwindigkeiten von zeitlich nicht zu starker Schwankung plausible) Annahme gemacht, daß die Berandung des Totwassers eine Stromlinie ist. Das Verfahren, das ausführlich für die Strömung hinter einer quergestellten Platte durchgeführt wird und auch hier im wesentlichen auf der konformen Abbildung in eine  $w$ -Ebene [ $w = w(z, t)$  das komplexe Geschwindigkeitspotential] beruht, zeigt gegenüber dem stationären Fall keine wesentlichen Komplikationen. Es folgen noch Betrachtungen über die Form des Totwassers und über Strömungen mit konstant bleibendem Totwasserraum.

Karl Maruhn.

**Nikol'skij, S. M.:** Zum Dirichletschen Problem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **83**, 23—25 (1952) [Russisch].

Die Dirichletsche Aufgabe, eine im Einheitskreise harmonische Funktion  $u(r, \theta)$  mit vorgegebenen Randwerten  $f(\theta)$  zu bestimmen, kann nicht im Falle jedes  $f(\theta)$  mittels der Methode von Riemann, das Dirichletsche Integral  $D(u)$  zum Minimum zu machen, gelöst werden, weil für gewisse  $f(\theta)$   $D(u)$  für alle Vergleichsfunktionen unbeschränkt sein kann. Verf. gibt einige notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß dieser Fall nicht eintritt. Zum Schluß formuliert Verf. analoge Sätze für den Halbraum  $x_n > 0$  des  $(x_1, \dots, x_n)$ -Raumes. Bezüglich der Bezeichnungen vgl. dies. Zbl. **43**, 56). 1. Die im Halbraum  $x_n > 0$  des  $(x_1, \dots, x_n)$ -Raumes harmonische Funktion  $u(x_1, \dots, x_n)$  genüge den Bedingungen:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (u(x_1, \dots, x_n))^2 dx_1 \dots dx_{n-1} \leq M \text{ für beliebiges } x_n > 0.$$

$$(2) \quad D(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_1^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 dx_1 \dots dx_n < \infty.$$

Dann gehört die Grenzfunktion (3)  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \lim_{x_n \rightarrow 0} u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ , die für fast alle  $(x_1, \dots, x_{n-1})$  bestimmt werden kann, zur Klasse  $H_2^{(1/2 \dots 1/2)}$ . 2. Es sei  $\varepsilon > 0$ . Die Funktion  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1})$  gehöre zur Klasse  $H_2^{(1/2 + \varepsilon \dots 1/2 + \varepsilon)}$ . Dann gibt es eine harmonische Funktion  $n(x_1, \dots, x_n)$  mit den Eigenschaften (1), (2), (3).

W. Thimm.

**Royden, H. L.:** On the regularity of boundary points in potential theory. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 82—86 (1952).

Le théorème établi peut s'énoncer: pour qu'un ensemble fermé  $E \subset R^3$  ne soit pas effilé en un de ses points  $O$ , il suffit qu'il contienne, au voisinage de  $O$ , un ensemble conique de sommet  $O$  dont la trace sur une sphère de centre  $O$  est de capacité logarithmique positive; cette généralisation de la condition de régularité de Poincaré (obtenue lorsque l'ensemble conique est un cône de révolution) est établie élémentairement, en construisant une fonction-barrière. Le rapporteur fait observer que c'est aussi une conséquence immédiate du critère de Wiener et de la remarque suivante: pour qu'un ensemble conique de sommet  $O$  soit de capacité nulle, il faut et il suffit que sa trace sur une sphère de centre  $O$  soit de capacité logarithmique nulle (cf. J. Deny et P. Lelong, ce Zbl. **33**, 64, p. 94 du travail). J. Deny.

**Kim, E. I.:** Über ein allgemeines Randwertproblem für eine harmonische Funktion. Priklad. Mat. Mech. **16**, 147—158 (1952) [Russisch].

Let  $\sigma$  be an open bounded region in the plane bounded by a simple contour  $L_0$  and let  $S$  be  $\sigma$  less a number of simple, not intersecting contours  $L_1, \dots, L_p$  inside  $L_0$ . The author wants to find a function  $u$ , harmonic in  $S$  and continuous in  $\sigma$ , such that  $(\partial u / \partial n)_i = H_q (\partial u / \partial n)_e + f_q(s)$  ( $q = 1, \dots, p$ ) on  $L_q$  and  $\sum_{m \geq k \geq j} \alpha_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = F(s)$  on  $L_0$ , where  $H_q$  is a number and  $\alpha_{kj}, f_q$  and  $F$  are given functions of the arc-length  $s$ . The problem is reduced to a system of integral equations by writing the function  $u$  as the real part of a polynomial (the origin is assumed to be inside  $L_0$  but outside  $L_1, \dots$ ) plus a simple layer potential with the kernel  $\Re \log(1 - zt^{-1})$  on  $L_1, \dots, L_p$  and  $\Re(i c^{-1}(s)(t - z)^{m-1} \log(1 - zt^{-1}))$  on  $L_0$ ,  $\left[ c(s) = \sum_{j=1}^m i^j a_{mj}(s) \right]$ .

L. Gårding.

Myrberg, Lauri: Bemerkungen zur Theorie der harmonischen Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 107, 8 S. (1952).

Der Rand  $\Gamma$  eines Gebietes  $G_z$  bestehe aus einer abgeschlossenen Punktmenge auf der reellen Achse. Ist  $\Gamma$  vom linearen Maße Null, so hat jede in  $G_z$  eindeutige, beschränkte harmonische Funktion  $u(z)$  die Eigenschaft  $u(x, y) = u(x, -y)$ , während es für pos. lin. Maß von  $\Gamma$  stets Funktionen  $u(z)$  gibt, die diese Symmetrieeigenschaft nicht haben. Hat  $u(z)$  ein endliches Dirichletintegral ( $D$ -beschränkt), so ist das Verschwinden der Spanne von  $G_z$  notwendig und hinreichend für  $u(z) = u(\bar{z})$ . Für in  $|z| < 1$  eind. harmonisches  $u(z)$  beweist Verf. folgende Fassung des Maximumprinzips: Ist  $u(z)$   $D$ -beschränkt und für fast alle  $\varphi$   $\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\varphi}) \leq M$  erfüllt, so gilt in  $|z| < 1$   $u(z) \leq M$ . Aus  $u = 0$  auf einer abzählbaren Menge  $\{E_n\}$  offener Bögen des Kreises  $|z| = 1$  kann auf  $u(z) = 0$  geschlossen werden, wenn die Spanne des Gebietes  $G$ , das von dem komplementären Teil  $\Gamma$  des Kreises  $|z| = 1$  berandet wird, verschwindet. Verschwindet die Normalableitung einer in  $|z| < 1$  positiven bzw.  $D$ -beschränkten harmonischen Funktion auf  $\{E_n\}$  und ist die Kapazität von  $\Gamma$  Null, so gilt  $u(z) \equiv c$ .

H. Wittich.

Tims, S. R.: Some maximal theorems for functions defined in a half-plane. J. London math. Soc. 27, 21–29 (1952).

In der Halbebene  $H[\sigma > 0]$  der  $s$ -Ebene ( $s = \sigma + it$ ) werden folgende Teilgebiete betrachtet:  $S(\alpha, \tau) = \bigcup_s [\text{arc}(s - i\tau) < \alpha, |t - \tau| < c]$  ( $\alpha < \pi/2$ ,  $\tau$  reell,  $c = \text{feste positive Zahl}$ ). Verf. zeigt: Ist  $u(\sigma, t)$  harmonisch in  $H$  und gilt für alle  $T > 0, \sigma > 0$  und ein  $p > 1$ :  $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |u(\sigma, t)|^p dt < 1$ , so folgt daraus für alle  $T > 0, \alpha < \frac{\pi}{2}$ :  $\frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_\alpha^p(\tau) d\tau < B$ , wobei  $U_\alpha(\tau) = \sup_{s \in S(\alpha, \tau)} u(s)$ . In dieser Abschätzung bedeutet  $B$  eine nur von  $\alpha$  und  $p$  abhängige Zahl. Analoge Resultate werden für subharmonische und für analytische Funktionen bewiesen. Die Fragestellung wurde durch klassische Ergebnisse von G. H. Hardy und J. E. Littlewood [Acta Math. 54, 81–116 (1929)] angeregt, welche entsprechende Probleme im Einheitskreis lösen.

A. Huber.

Allen, A. C.: Note on a theorem of Gabriel. J. London math. Soc. 27, 367–369 (1952).

Der fragliche Satz von R. M. Gabriel (dies. Zbl. 5, 294) lautet:  $U(t)$  sei im Intervall  $-\pi < t < \pi$  positiv und integrierbar,  $\Phi(x)$  sei für  $x \geq 0$  erklärt mit  $\Phi'(x) \geq 0$  und  $\Phi''(x) \geq 0$ ,  $u(r, \theta)$  bzw.  $u_1(r, \theta)$ ,  $0 \leq r < 1$ , seien die Poisson-Integrale von  $U(t)$  und  $U^*(t)$ , der „symmetrischen absteigenden Umschichtung“ („rearrangement“) [ $y = U^*(t)$  ist die Umkehrung von  $t = \frac{1}{2} m(\{x: f(x) > y\})$  für  $t > 0$ ,  $U^*(-t) = U^*(t)$  und  $U^*(t) = \frac{1}{2}(U^*(t+) + U^*(t-))$ ]. Dann ist

$\int_0^{2\pi} \Phi(u(r, \theta)) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \Phi(u_1(r, \theta)) d\theta$ . Verf. gibt einen vereinfachten Beweis unter Verwendung allgemeiner Sätze über Umschichtungen. *G. Aumann.*

**Segal, B. I.:** Räumliche Probleme der Potentialtheorie für zylindrische Bereiche. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **16**, 59—74 (1952) [Russisch].

The velocity potential of an ideal fluid, which flows into a finite or infinite cylinder through a number of symmetrically placed circular small holes in its base, is calculated explicitly and numerical results are given. *L. Gårding.*

**Chodzaev, L. Š.:** Das verallgemeinerte Newtonsche Potential einer unbeschränkten Masse. *Uspechi mat. Nauk* **7**, Nr. 4 (50), 137—138 (1952) [Russisch].

**Weinstein, Alexandre:** Sur le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson et l'équation des ondes. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 2584—2585 (1952).

Expression de la solution de l'équation  $\Delta u^k = u_{tt}^k + k t^{-1} u_t^k$ ,  $k$  réel quelconque, avec conditions  $u^k(x, 0) = f(x_1, \dots, x_m)$ ,  $u_t^k(x, 0) = 0$  (on appelle  $u^k$  une solution associée à un nombre  $k$ ), à partir des moyennes sphériques de  $u^k$  dans l'espace  $R^m(x_i)$ , si  $k > m - 1$ , ou, si  $k < m - 1$ , à partir de l'intégrale

$$\int_0^1 (t^2 - r^2)^{n-1} u^{k+2n}(x, r) r dr,$$

avec  $k + 2n > m - 1$ . La solution n'est unique que si  $k \geq 0$ . *P. Lelong.*

**Molčanov, A. M.:** Kriterien für die Diskretheit des Spektrums einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **83**, 17—18 (1952) [Russisch].

The differential equation (1)  $-\Delta \psi + q \psi = \lambda \psi$ , where  $\psi = \psi(x) = \psi(x_1, \dots, x_n)$ ,  $q(x)$  is real and bounded from below and defined in the whole real  $n$ -space, has a pure point-spectrum if and only if  $\int_D \int_F q(x) dx \rightarrow \infty$  when  $D$  runs through any sequence of similar, not intersecting cubes,  $F$  being an „inessential cut“ i. e. an arbitrary subset of  $D$  of capacity  $\leq D^{n-2}/(4n)^{4n}$ , which may vary with the position of  $D$  ( $n > 1$ ). If  $n = 1$ , the condition is the same but without the cuts. With respect to an open subset  $G$  of real  $n$ -space and vanishing boundary values, the equation  $-\Delta \psi = \lambda \psi$  has a pure point-spectrum if and only if, apart from inessential cuts,  $G$  contains no infinite sequence of similar, not intersecting cubes. For the difference equation corresponding to (1), the criterion for a pure point-spectrum is simply that  $q$  should tend to infinity at infinity. No proofs. *L. Gårding.*

**Müller, Claus:** Zur Methode der Strahlungskapazität von H. Weyl. *Math. Z.* **56**, 80—83 (1952).

Verf. beweist folgenden Existenzsatz für die Schwingungsgleichung (1)  $\Delta U + k^2 U = 0$ : Es zerfalle der dreidimensionale Euklidische Raum in das „Innere“  $V$  und das „Äußere“  $W$ ; die gemeinsame Grenze sei  $\Omega$ . Dann gibt es zu auf  $\Omega$  beliebig vorgegebenen stetigen Randwerten  $\gamma$  in  $W$  stets eine Lösung  $U$  von (1), die auf  $\Omega$  die Werte  $\gamma$  annimmt und den Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial U}{\partial n} + i k U \right) = 0$$

genügt. Der Beweis kommt gegenüber Weyl (dies. Zbl. **44**, 97) ohne die Theorie der Elementarteiler höheren Grades für lineare Integralgleichungen aus.

*K. Maruhn.*

**Weyl, Hermann:** Kapazität von Strahlungsfeldern. *Math. Z.* **55**, 187—198 (1952).

Referat s. dies. Zbl. **44**, 97.

**Henrici, Peter:** Bergmans Integraloperator erster Art und Riemannsche Funktion. *Z. angew. Math. Phys.* **3**, 228—232 (1952).



L'A. étudie la transformation de Bergman qui exprime une fonction  $u(x, y)$  au moyen de  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$ . Ainsi les solutions de (1):  $\Delta u + a \partial u / \partial x + b \partial u / \partial y + c u = 0$  (à coefficients analytiques) deviennent les solutions  $V(z, \bar{z})$  d'une équation de type hyperbolique dont la fonction de Riemann est la transformée du coefficient du logarithme dans la solution élémentaire de (1). *M. Brelot.*

**Germain, Paul:** Solutions élémentaires des équations régissant les écoulements des fluides compressibles. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1248—1250 (1952).

Risultati precedenti di P. Germain e R. Bader (questo Zbl. **39**, 104), concernenti la soluzione elementare dell'equazione di Tricomi, vengono estesi al caso dell'equazione  $u_{zz} + k(z) u_{xx} = 0$ , con  $k(z) z > 0$  per  $z \neq 0$ ; la soluzione elementare viene studiata attraverso la sua trasformata di Fourier, facendo uso della teoria delle distribuzioni di L. Schwartz. *G. Cimmino.*

**Sobolev, S. L.:** Das Cauchysche Problem für einen speziellen Fall von Systemen, die nicht zum Kowalewskischen Typus gehören. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **82**, 205—208 (1952) [Russisch].

On pose le problème de Cauchy pour le système suivant

$$(1) \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{v}, p) \equiv \partial \mathfrak{v} / \partial t - (\mathfrak{v} \times \mathfrak{f}) + \text{grad } p = \mathfrak{F}, \quad \text{div } \mathfrak{v} = \psi,$$

le vecteur  $\mathfrak{v}$  et la fonction scalaire  $p$  étant inconnus, et  $\mathfrak{f}$  désignant le verseur de l'axe des  $z$ . En éliminant les composants du vecteur  $\mathfrak{v}$ , on aboutit à l'équation de la forme (2)  $L p = \partial^2 \Delta p / \partial t^2 + \partial^2 p / \partial z^2 = f$ . L'A. construit la solution fondamentale de l'équation (2), et ensuite du système (1). On établit pour l'équation (2) et pour le système (1) les formules fondamentales, analogues à la formule de Green relative à l'équation de Laplace. En appliquant la solution fondamentale, on en déduit les formules résolvantes pour le problème de Cauchy relatif à l'équation (2), resp. au système (1). *M. Krzyżański.*

### Variationsrechnung:

**Morrey jr., Charles B.:** Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. Pacific J. Math. **2**, 25—53 (1952).

Des conditions N. et S. de semi-continuité inférieure, pour les intégrales multiples du type suivant  $I[z, D] = \int_D f(x, z, p) dx$ ,  $x = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $z = (z^1, \dots, z^N)$ ,  $p = (p_\alpha^i)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ;  $p_\alpha^i = \partial z^i / \partial x^\alpha$ ), sont déterminées à partir de la notion de quasi-convexité. Une fonction  $f(p)$  est dite quasi-convexe si

$$\int_D f[p + \pi(x)] dx \geq f(p) \cdot m(D), \quad \pi = \left( \pi_\alpha^i(x) = \frac{\partial \zeta^i(x)}{\partial x^\alpha} \right),$$

pour tout domaine  $D$ , tout  $p$  constant et pour toute fonction lipschitzienne  $\zeta(x)$ , nulle à la frontière de  $D$ . Dans la topologie:  $z_n \rightarrow z$ ,  $z_n(x)$ ,  $z(x)$  lipschitziennes dans  $D$ ,  $z_n(x)$  converge uniformément vers  $z(x)$ , la condition de quasi-convexité est équivalente à celle de semi-continuité inf. pour  $I[z, D]$ . L'A. discute ensuite les conditions supplémentaires grâce auxquelles la quasi-régularité est suffisante pour la s. c. inf. de  $I[z, D]$ , dans la topologie faible  $\mathcal{P}(s)$  sur  $D$  ( $s \geq 1$ ). Il détermine des conditions N ou S de quasi-convexité et les compare aux conditions classiques de Weierstrass et de Legendre-Hadamard. En particulier, si  $f(p) = a_{ij}^{\alpha\beta} p_\alpha^i p_\beta^j$  ( $a_{ij}^{\alpha\beta} = \text{constantes}$ ), la condition de quasi-convexité est remplie si et seulement si la forme biquadratique en  $\lambda, \zeta$ ,  $a_{ij}^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta \zeta^i \zeta^j$ , est non négative. *Th. Lepage.*

**Giorgi, Ennio de:** Ricerca dell'estremo di un cosiddetto funzionale quadratico. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **12**, 256—260 (1952).

Verf. betrachtet das Funktional

$$J[x] = \int_{t_1}^{t_2} (x' \cdot A x' + 2 x \cdot B x' + x \cdot C x + 2 g \cdot x) dt$$

in der Klasse  $\Gamma$  der absolut stetigen, mit quadratisch summierbaren ersten Ableitungen versehenen, an den Enden festgehaltenen Vektoren  $x(t)$ . Die quadratischen Matrizen  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  [ $A(t)$  positiv definit,  $C(t)$  symmetrisch] und der Vektor  $g(t)$  werden mit ihren ersten Ableitungen als stetig vorausgesetzt. Notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Minimums ist, daß die Gleichung

$$\frac{d}{dt} (A x' - B x) - B x' - C x - g = 0$$

eine Lösung der Klasse  $\Gamma$  besitzt.

*M. J. de Schwarz.*

**Cesari, Lamberto:** An existence theorem of calculus of variations for integrals on parametric surfaces. Amer. J. Math. **74**, 265—295 (1952).

Dans des travaux antérieurs [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat. **12**, 61—84 (1943), Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **29**, 119—224 (1940), et ce Zbl. **29**, 291; **30**, 390] l'A. a étudié les conditions N. et S. de semi-continuité inférieure de l'intégrale de surface, au sens de Weierstrass

$$J(S) = \int_S F(x, p) du dv.$$

$F$  est continue de  $(x, p)$  pour  $x \in A$ , ensemble borné de  $E_3$  et

$$|p| = [(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2]^{1/2} \neq 0.$$

De plus,  $F(x, t p) = t F(x, p)$  pour  $x \in A$ ,  $|p| \neq 0$ ,  $t > 0$ ;  $S$  est une surface d'aire finie au sens de Lebesgue.  $J(S)$  est définie positive si  $F(x, p) > 0$  pour  $x \in A$ ,  $|p| \neq 0$ ;  $J(S)$  est régulière positive (semi-régulière) si les dérivées  $F_s = \partial F / \partial x^s$  ( $s = 1, 2, 3$ ) étant continues pour  $x \in A$ ,  $|p| \neq 0$ , la fonction de Weierstrass  $\mathcal{L}(x, p, \bar{p}) = F(x, p) - \sum \bar{p}^s F_s(x, p)$  est positive (non négative) pour  $x \in A$ ,  $|p| \cdot |\bar{p}| \neq 0$ ,  $p \neq \bar{p}$ .  $J(S)$  est semi-continue inf. sur la surface  $S_0$ , relativement à la famille  $\{S\}$  si à  $\varepsilon > 0$  ou peut associer  $\delta > 0$  de manière que  $J(S) > J(S_0) - \varepsilon$  pour toute  $S \in \{S\}$  dont la distance à  $S_0$  (distance au sens de Fréchet) est inférieure à  $\delta$ . L'A. établit le théorème d'existence: Soit  $A$  une région bornée, fermée et convexe de  $E_3$ , soit  $C$  une courbe fermée de Jordan pour laquelle il existe au moins une surface  $S$ , d'aire finie au sens de Lebesgue, de frontière  $C$  et tout entière dans  $A$ . Dans ces conditions toute intégrale  $J(S)$  définie positive et semi-régulière possède un minimum absolu dans la classe  $\{S\}$  des surfaces d'aire finies, situées dans  $A$ , et de frontière  $C$ . — La condition imposée à  $A$  peut être supprimée et remplacée par la suivante: il existe deux constantes positives  $m \leq M$  telles que pour  $x \in E_3$ ,  $|p| \neq 0$ ,  $m |p| \leq F(x, p) \leq M |p|$ .

*Th. Lepage.*

**Kimball, William Scribner:** Sur le signe des conditions de Weierstrass et de Legendre pour les minima et maxima en calcul des variations. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1021 (1952).

**Karush, William:** Isoperimetric problems in the calculus of variations. Canadian J. Math. **4**, 257—280 (1952).

Verf. behandelt — unter Beschränkung auf einfache Integrale — allgemeine isoperimetrische Probleme mit variablen Endpunkten in Parameterform. Mit Hilfe einer Verallgemeinerung der klassischen Feldtheorie beweist er direkt, d. h. ohne Umwandlung in ein Bolzasches Problem, folgende hinreichenden Bedingungen. Eine sich nicht überschneidende nichtsinguläre Extremale des isoperimetrischen Problems mit variablen Endpunkten, die die Transversalitätsbedingung und die Weierstrasssche Bedingung erfüllt und positive zweite Variation besitzt, liefert ein Minimum in einer weiteren Nachbarschaft von zulässigen Vergleichskurven. Es wird zunächst der Beweis für das entsprechende nicht isoperimetrische Problem erbracht und der Beweis mit Hilfe eines verallgemeinerten Hahnschen Lemmas auf isoperimetrische Probleme ausgedehnt. Hier wird zunächst der sog. stark normale Fall behandelt, doch kann diese Normalitätsvoraussetzung fallen gelassen werden.

Schließlich werden hinreichende Bedingungen für ein schwaches relatives Minimum angegeben. *M. J. de Schwarz.*

**Karush, William:** The index of an extremal arc. Canadian J. Math. 4, 281—294 (1952).

Für Extremalen von isoperimetrischen Problemen in Parameterform mit variablen Endpunkten gibt und vergleicht Verf. verschiedene Definitionen des Index: den Index der zweiten Variation, einen weiteren Index, der mit Hilfe von Familien zulässiger Vergleichskurven ohne Verwendung der zweiten Variation oder topologischer Betrachtungen definiert wird, ferner den isoperimetrischen Index nach Birkhoff und Hestenes (vgl. dies. Zbl. 11, 167). Diese drei Indizes sind im nicht entarteten Fall gleich. Sie sind auch gleich dem Index des kritischen Punktes für eine gewisse Funktion, die mit Hilfe gebrochener Extremalen definiert wird. Schließlich wird der topologische Index behandelt, von dem gezeigt wird, daß er unter zusätzlichen Bedingungen über positive Definitheit und positive Regularität des zum Minimum zu machenden Integrals den vorhergenannten Indizes gleich ist.

*M. J. de Schwarz.*

**Fet, A. I.:** Variationsprobleme auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 271—316 (1952) [Russisch].

Die Arbeit bringt eine Reihe neuer und Verschärfungen bekannter Sätze über positiv-reguläre Variationsprobleme auf einer geschlossenen Mannigfaltigkeit  $R$ .  $R$  wird im folgenden immer als viermal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Zunächst werden die Grundbegriffe erläutert. Darauf folgt ein ausführlicher Beweis des lokalen Satzes von der Existenz einer einzigen Kürzesten zwischen hinreichend benachbarten Punkten. Im nächsten Abschnitt wird der Kurvenraum auf  $R$  mit der Morsesehen Metrik eingeführt und seine topologische Invarianz gegen topologische viermal stetig differenzierbare Abbildungen von  $R$  bewiesen. Anschließend werden Variationsprobleme mit festen Endpunkten  $a, b$  ( $a \neq b$ ) betrachtet und zunächst der als Satz von Hilbert bezeichnete Satz bewiesen, daß in jeder Homotopieklasse von Kurven von  $a$  nach  $b$  wenigstens eine kürzeste Extremale existiert. Dann wird folgender Hauptsatz bewiesen: Falls die Fundamentalgruppe von  $R$  endlich ist, gibt es in jeder Homotopieklasse von Kurven von  $a$  nach  $b$  entweder wenigstens zwei Extremalen verschiedener Länge oder ein Kontinuum von Extremalen, die in dieser Klasse Kürzeste sind. Aus den beiden genannten Sätzen folgt: Es gibt immer wenigstens zwei Extremalen von  $a$  nach  $b$ . Für Extremalenschleifen werden analoge Sätze bewiesen. Ferner wird gezeigt: Falls  $R$  und das Variationsproblem analytisch sind, gibt es entweder zwei Extremalen verschiedener Länge von  $a$  nach  $b$  oder die entsprechende Menge von Kürzesten ist nicht-asphärisch, d. h. enthält ein nicht-nullhomotopes Sphärenbild. Falls die Fundamentalgruppe von  $R$  endlich und die Homotopiegruppen bis zur Dimension  $n-1$  trivial sind ( $n = \dim R$ ), gibt es in jeder Homotopieklasse von Kurven von  $a$  nach  $b$  unendlich viele Extremalen (Verallgemeinerung eines Satzes von Morse). Es existiert immer wenigstens eine geschlossene Extremale (Verallgemeinerung eines Satzes von Birkhoff). *E. Burger.*

**Rothe, Erich H.:** A remark on isolated critical points. Amer. J. Math. 74, 253—263 (1952).

Referat s. dies. Zbl. 44, 319.

**El'sgol'e, L. E.:** Variationsprobleme mit retardiertem Argument. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 138—139 (1952) [Russisch].

### Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Chang, Shih-Hsun:** A generalization of a theorem of Hille and Tamarkin with applications. Proc. London math. Soc., III. Ser. 2, 22—29 (1952).

Hille und Tamarkin (dies. Zbl. 3, 9, 400) haben gezeigt, daß für die charakteristischen Werte  $\mu_n[K]$  eines Kernes  $K(x, y) \left( a \leq x \leq b \right)$  (1)  $\frac{1}{|\mu_n[K]|} = o(n^{-p-1/2})$  gilt, falls die partiellen Ableitungen (2)  $\partial^q K(x, y) / \partial x^q$  stetig sind für  $0 \leq q \leq p-2$  und (3)  $\int_a^b \int_a^b g(t, y) dt + C(y)$  gilt mit  $\int_a^b \int_a^b |g(x, y)|^2 dx dy < +\infty$ .



Verf. beweist das Resultat (1) für die Eigenwerte  $\lambda_n[K]$  im Sinne von Erhard Schmidt, gleichfalls unter den Bedingungen (2) und (3). Daraus läßt sich die Abschätzung (1) für die  $\mu_n[K]$  leicht gewinnen. Nach einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 36, 201) läßt sich dann  $K(x, y)$  in mindestens  $2p$  Faktoren zerlegen:

$$K(x, y) = \int_a^b \cdots \int_a^b K_1(x, \xi_1) K_2(\xi_1, \xi_2) \cdots K_{2p}(\xi_{2p-1}, y) d\xi_1 \cdots d\xi_{2p-1}.$$

Die Beweise vereinfachen sich wesentlich, wenn man mit Weyl (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1911, 110—117) noch  $\partial^p K(x, y)/\partial x^p$  als stetig vorausgesetzt.

R. Iglisch.

Mönnig, Paul: Über Integralgleichungen mit unsymmetrischem Polynomkern bei längs der Hauptdiagonale sich änderndem Bildungsgesetz. Monatsh. Math. 56, 1—15 (1952).

Verf. untersucht lineare Integralgleichungen mit einem Kern der Form:

$$K(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu}(x) \psi_{\nu}(\xi) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=1}^n \bar{\varphi}_{\nu}(x) \bar{\psi}_{\nu}(\xi) \quad \text{für } x \leq \xi \quad \text{bzw.} \quad \xi < x.$$

Die Funktionen  $\varphi_{\nu}(x)$ ,  $\bar{\varphi}_{\nu}(x)$ ,  $\psi_{\nu}(\xi)$ ,  $\bar{\psi}_{\nu}(\xi)$  seien im endlichen Definitionsintervall beschränkt und integrierbar. Das erste hier gelöste Problem ist die Berechnung der Resolvente  $\Gamma(x, \xi, \lambda)$ .  $\Phi_{\nu}(x, \lambda)$ ,  $\Psi_{\nu}(\xi, \lambda)$ ,  $\bar{\Phi}_{\nu}(x, \lambda)$ ,  $\bar{\Psi}_{\nu}(\xi, \lambda)$  seien die Lösungen der folgenden Volterraschen Integralgleichungen

$$\Phi_{\nu}(x, \lambda) - \lambda \int_a^x V(x, \xi) \Phi_{\nu}(\xi, \lambda) d\xi = \varphi_{\nu}(x), \quad \Psi_{\nu}(\xi, \lambda) - \lambda \int_{\xi}^b V(x, \xi) \Psi_{\nu}(x, \lambda) dx = \psi_{\nu}(\xi),$$

$$\bar{\Phi}_{\nu}(x, \lambda) + \lambda \int_x^b V(x, \xi) \bar{\Phi}_{\nu}(\xi, \lambda) d\xi = \bar{\varphi}_{\nu}(x), \quad \bar{\Psi}_{\nu}(\xi, \lambda) + \lambda \int_a^{\xi} V(x, \xi) \bar{\Psi}_{\nu}(x, \lambda) dx = \bar{\psi}_{\nu}(\xi).$$

Der Kern dieser Gleichung ist  $V(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^n \bar{\varphi}_{\nu}(x) \psi_{\nu}(\xi) - \sum_{\nu=1}^n \varphi_{\nu}(x) \bar{\psi}_{\nu}(\xi)$ . Ferner sei

$$H_{\mu\nu}(\lambda) = \int_a^b \psi_{\nu}(x) \Phi_{\mu}(x, \lambda) dx, \quad \bar{H}_{\mu\nu}(\lambda) = \int_a^b \bar{\psi}_{\nu}(x) \bar{\Phi}_{\mu}(x, \lambda) dx.$$

Dann ist

$$\Gamma(x, \xi, \lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda); & \Psi_{\mu}(\xi, \lambda) \\ \Phi_{\nu}(x, \lambda); & 0 \end{vmatrix}}{|\delta_{\mu\nu} - \lambda H_{\mu\nu}(\lambda)|} \quad \text{bzw.} \quad - \frac{\begin{vmatrix} \delta_{\mu\nu} - \lambda \bar{H}_{\mu\nu}(\lambda); & \bar{\Psi}_{\mu}(\xi, \lambda) \\ \bar{\Phi}_{\nu}(x, \lambda); & 0 \end{vmatrix}}{|\delta_{\mu\nu} - \lambda \bar{H}_{\mu\nu}(\lambda)|}$$

für  $x \leq \xi$  bzw.  $\xi < x$ . Schreibt man dies  $\Gamma(x, \xi, \lambda) = D(x, \xi; \lambda)/D(\lambda)$ , so gilt die klassische

Fredholmsche Relation  $\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = - \int_a^b D(x, x; \lambda) dx$ . — Auch die Eigenwerte und Eigenfunktionen von  $K$  werden berechnet. — Interessant ist die folgende Tatsache. Die Resolvente der

Volterraschen Integralgleichungen  $y(x) - \lambda \int_a^x V(x, \xi) y(\xi) d\xi = g(x)$  ist die Differenz der

beiden Ausdrücke, durch welche  $\Gamma$  dargestellt ist. — Die Behauptungen werden auf Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen angewendet. Dies ist möglich, da die Greensche Funktion des Randwertproblems

$\Sigma p_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) = \lambda r(x) y(x) + F(x)$  ( $p_{\nu}(x) > 0$ ),  $\Sigma \{\alpha_{\mu\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu} y^{(\nu)}(b)\} = 0$ , multipliziert mit  $r(\xi)$ , von der Gestalt  $K(x, \xi)$  ist. Zum Schluß wird der allgemeine Zusammenhang zwischen der Integralgleichung mit hauptdiagonalunstetigem Polynomkern und ihrer Differentialgleichung diskutiert.

S. Fenyő.

Vajnberg, M. M.: Zur Frage der Variationstheorie der Eigenwerte für nichtlineare Integralgleichungen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 144—146 (1952) [Russisch].

Natalevič, V. K.: Über eine singuläre nichtlineare Integralgleichung und ein nichtlineares Randwertproblem der Theorie der analytischen Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 19—22 (1952) [Russisch].

Untersucht wird die Integralgleichung:

$$a(s)u(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma = f_1(s) + \Phi_1 \left( s, u(s), -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma, \lambda \right),$$

die eine Verallgemeinerung einer von A. I. Gusejnov (dies. Zbl. 40, 188) untersuchten nichtlinearen Integralgleichung darstellt. Die Lösbarkeit und die Anzahl der Lösungen hängen von der Lösbarkeit und der Anzahl der Lösungen der zugehörigen homogenen (singulären) linearen Integralgleichung ab, insbesondere vom Index des komplexen Ausdruckes  $a(s) + i b(s)$ . Ist dieser Index 0, so ergibt sich der aus der Theorie von E. Schmidt über die nichtlinearen Integralgleichungen bekannte Sachverhalt. Wenn der Index  $n > 0$  ist, hängt die Lösung von  $2n$  Parametern ab; ist  $n < 0$ , so bestehen für die Lösbarkeit  $2n$  Bedingungsgleichungen.

W. Thimm.

Pogorzelski, W.: Sur la solution de l'équation intégrale dans le problème de Fourier. Ann. Soc. Polon. Math. 24, 56—74 (1952).

L'A. appelle le problème mixte de Fourier un problème consistant dans la recherche d'une solution de l'équation de la chaleur  $u_{xx} + u_{yy} - u_t = 0$ , satisfaisant à la condition aux limites de la forme  $du/dn + au + b = 0$  sur le contour  $C$  d'un domaine borné  $D$  à 2 dimensions, et pour  $t > 0$ . La solution cherchée doit satisfaire, en outre, à une condition initiale qu'on peut réduire à la condition homogène  $u(x, y, 0) = 0$ . En cherchant la solution de ce problème sous la forme d'une intégrale, analogue au potentiel de simple couche, on est ramené à l'équation intégrale de la forme

$$(1) \quad \mu(s, t) = f(s, t) + \lambda \int_0^t \int_C N(s, t; \sigma, \tau) \mu(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

avec  $N(s, t; \sigma, \tau) = [r_{s\sigma} \cos \varphi_{s\sigma} / 2(t - \tau)^2] \exp[-r_{s\sigma}^2 / 4(t - \tau)] + a(s, t)(t - \tau)^{-1} \exp[-r_{s\sigma}^2 / 4(t - \tau)]$ . Le but du présent travail est la détermination de la solution et l'étude de la résolvante de l'équation (1). Cette résolvante s'écrit sous la forme d'une série en puissances de  $\lambda$ , convergente pour  $\lambda$  quelconque et pour toute valeur non négative de  $t$  et de  $\tau$ , tels que  $t > \tau > 0$ . Le résultat s'étend aux cas d'un nombre quelconque des variables d'espace.

M. Krzyżański.

Fricke, Arnold: Eine nichtlineare Integralgleichung bei einem Problem der Zentralbewegung. Math. Nachr. 8, 185—192 (1952).

Ausgehend von dem bekannten Ergebnis, daß bei Annahme des Newtonschen Beschleunigungsgesetzes die Umlaufszeit  $T_U$  eines sich auf einem Kreise vom Radius  $r_0$  bewegenden Massenpunktes und die Fallzeit  $T_F$ , die er benötigt, um aus der Entfernung  $r_0$  ohne Anfangsgeschwindigkeit in das Zentrum zu fallen, in dem von  $r_0$  unabhängigen Verhältnis  $T_U : T_F = 4\sqrt{2}$  stehen, untersucht Verf. die Frage, ob es andere Beschleunigungsgesetze gibt, für die das Verhältnis  $T_U : T_F$  ebenfalls konstant ist. Je nachdem die Beschleunigungsfunktion  $f(r)$  (die für  $r > 0$  als positiv und stetig vorausgesetzt sei) bei  $r = 0$  oder bei  $r = +\infty$  integrierbar ist, gelangt der Verfasser nach gewissen Transformationen zu der nicht-linearen homogenen Volterra'schen Integralgleichung

$$(1) \quad \int_0^x \frac{y(u) du}{\sqrt{x-u}} = \lambda \sqrt{y(x)} \int_0^x y(u) du \quad \text{bzw.} \quad (1') \quad \int_x^\infty \frac{y(u) du}{\sqrt{x-u}} = \lambda \sqrt{y(x)} \int_x^\infty y(u) du.$$

Es wird gezeigt, daß (1) (bez. (1')) durch den Ansatz  $y = x^\mu$ , mit  $\mu > -1$  (bzw.  $\mu < -1$ ) befriedigt wird, wenn  $\lambda$  in Abhängigkeit von  $\nu = \mu + 1$  gegeben wird durch

$$\lambda(\nu) = \begin{cases} \sqrt{\nu} B(\nu, \frac{1}{2}) & (\nu > 0) \\ \sqrt{-\nu} B(-\nu + \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) & (\nu < 0). \end{cases}$$

Die Untersuchung von  $\lambda(\nu)$  liefert nach Rückgang zum Ausgangsproblem das folgende Ergebnis: zu jeder Beschleunigungsfunktion  $f(r) = r^\mu \left( \kappa = \frac{-\mu}{\mu+1} \right)$  gehört ein konstantes Verhältnis  $T_U:T_F$ , und umgekehrt gibt es zu jedem reellen Verhältnis genau ein  $\kappa$ . Für gewisse  $\kappa$  ist dabei  $T_U:T_F$  geschlossen angebar.

Durch Einführung der neuen unbekannten Funktion  $\chi(x) = \int_0^x \frac{y(u) du}{\sqrt{x-u}}$  kann gezeigt werden, daß  $y = x^\mu$  bei Beschränkung auf Funktionen, die bis auf den Nullpunkt (in dem sie eine algebraische Singularität besitzen dürfen) regulär sind, die einzige Lösung von (1) ist. Entsprechendes gilt für (1'). H. Pachale.

**Heinhold, J.:** Zur Konstruktion involutorischer Kerne. Arch. der Math. **3**, 15—23 (1952).

Es wird mit Hilfe der Laplace-Transformation eine Klasse von involutorischen Kernen konstruiert, d. h. von Funktionen  $K(t, \tau)$ , für die aus  $G(t) = \int_0^\infty K(t, \tau) F(\tau) d\tau$

folgt  $F(t) = \int_0^\infty K(t, \tau) G(\tau) d\tau$ . Dazu wird zunächst die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung  $\psi(\psi(s)) = s$  in folgender Gestalt ermittelt:  $\psi(s) = \varphi^{-1}(1/\varphi(s))$ , wo  $\varphi(s)$  eine beliebige Funktion ist ( $\varphi^{-1}$  = inverse Funktion). Für zwei so zusammenhängende Funktionen gilt (1)  $1/\varphi(s) = \varphi(\psi(s))$ . Die  $\varphi$  werden nun auf einen Bereich eingeschränkt, in dem  $\varphi(s) e^{-\psi(s)\tau}$  die Laplace-Transformierte eine Funktion  $\Phi(t, \tau)$  ist:

$$(2) \quad \varphi(s) e^{-\psi(s)\tau} = \int_0^\infty e^{-st} \Phi(t, \tau) dt = \mathfrak{L} \{ \Phi(t, \tau) \}.$$

Ist  $y(s) = \mathfrak{L} \{ Y \}$  eine beliebige  $\mathfrak{L}$ -Transformierte, so ergibt sich durch eine Integralvertauschung, daß (3)  $\mathfrak{L} \left\{ \int_0^\infty \Phi(t, \tau) Y(\tau) d\tau \right\} = \varphi(s) y(\psi(s))$  ist. Also entspricht

der Integralgleichung (4)  $\Phi(t) = \int_0^\infty \Phi(t, \tau) Y(\tau) d\tau$ , wo  $G$  eine  $\mathfrak{L}$ -Transformierte  $g$  besitzt, vermittelt  $\mathfrak{L}$ -Transformation die Bildgleichung (5)  $g(s) = \varphi(s) y(\psi(s))$ . Setzt man hierin  $\psi(s) = w$ , also  $s = \varphi^{-1}(w) = \psi(w)$  und gemäß (1)  $\varphi(s) = 1/\varphi(\psi(s)) = 1/\varphi(w)$ , so lautet (5):  $g(\psi(w)) = y(w)/\varphi(w)$ , und die Lösung ist  $y(w) = \varphi(w) g(\psi(w))$ . Ihr entspricht aber nach (3) die Originalfunktion (6)  $Y(t) = \int_0^\infty \Phi(t, \tau) G(\tau) d\tau$ . Zu (4) gehört somit als Umkehrung (6), d. h.  $\Phi(t, \tau)$  ist ein involutorischer Kern. Beispiel: Zu  $\varphi(s) = s^{-(\nu+1)}$  gehört  $\psi(s) = s^{-1}$  und zu  $s^{-(\nu+1)} e^{-\tau/s}$  als Originalfunktion  $(t/\tau)^{\nu/2} J_\nu(2\sqrt{t\tau})$ , was ein bekannter involutorischer Kern ist (Hankel-Transformation). G. Doetsch.

**Ku, C. H., M. I. Yüh and K. K. Chen:** The abscissa of uniform convergence of a Laplace integral. J. London math. Soc. **27**, 356—359 (1952).

Die bisher bekannten Formeln für die Abszisse  $\sigma_u$  gleichmäßiger Konvergenz des Laplace-Stieltjes-Integrals  $\int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$  [ $\alpha(t)$  von beschränkter Variation in jedem endlichen Intervall] sind verschieden, je nachdem  $\sigma_u \geq 0$  oder  $< 0$  ist. Die folgende Formel, die das Analogon zu einer Formel für Dirichletsche Reihen von M. Kuniyeda [Tôhoku math. J., I. Ser. **9**, 7—27 (1916)] darstellt, gilt für



alle Werte von  $\sigma_u$ : Es ist  $\sigma_u = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log R(x)$ , wo  $R(x) =$  obere Grenze  $-\infty < \tau < \infty$

$|\beta(x, \tau) - \beta(x', \tau)|$  mit  $\beta(x, \tau) = \int_0^x e^{-i\tau t} dx(t)$ ,  $x' =$  größte ganze Zahl  $< x$ .

G. Doetsch.

**Pilatovskij, V. P.:** Über die angenäherte Berechnung der Werte einer Funktion, die durch ihre Laplacetransformierte gegeben ist. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 197–200 (1952) [Russisch].

L'A. propose la formule

$$(1) \quad \frac{\lambda}{2\pi} e^{\sigma t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda k t} F(\sigma + i\lambda k) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi\sigma k/\lambda} f\left(t + \frac{2\pi k}{\lambda}\right)$$

pour l'évaluation numérique de la fonction  $f(t)$ , lorsque la transformée de Laplace

$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$  est donnée. En effet, si  $|f(t)| < M e^{s_0 t}$ , on peut faire la

dernière somme dans (1) aussi petite que l'on veut. Une autre formule analogue est aussi démontrée. L'A. ne donne cependant aucune information, comment déterminer  $M$  et  $s_0$ , ce qui est important dans les applications. J. Mikusiński.

**Opatowski, I.:** Laplace transform of  $(\operatorname{erf} \sqrt{t})^2$ . Amer. math. Monthly 59, 392 (1952).

**Garnir, Henri:** Sur la transformation de Laplace des distributions. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 583–585 (1952).

In den Bezeichnungen von L. Schwartz, Théorie des distributions I, II (Paris 1950/51; dies. Zbl. 37, 73; 42, 114) sei, wenn  $f(\xi, p)$  die Laplace-Transformierte von  $F(\xi, t)$  im klassischen Sinn ist, die Distribution von  $F$  gleich  $\mathfrak{T}[\varphi(\xi, t)]$  und die von  $f$  gleich  $\mathfrak{T}^{(p)}[\varphi(\xi)]$ . Dann ist

$$(*) \quad \mathfrak{T}^{(p)} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{p\tau} \varphi(\xi, \tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{p\tau} \mathfrak{T}[\varphi(\xi, t + \tau)] dt.$$

Das legt folgende Definition der Laplace-Transformation von Distributionen nahe: Wenn  $\mathfrak{T} \in D'_{(\xi, \tau)}$  die Eigenschaft hat, daß  $\mathfrak{T}[\varphi(\xi, t + \tau)]$  als Funktion von  $t$ , multipliziert mit  $e^{pt}$ , summierbar ist, wenn  $\mathfrak{T}$  seinen Träger in  $\tau \geq 0$  hat und wenn zu jedem  $p > p_0$  eine Distribution  $\mathfrak{T}^{(p)} \in D'_{\xi}$  existiert derart, daß die Relation (\*) erfüllt ist, so sei  $\mathfrak{T}^{(p)}$  die Laplace-Transformierte von  $\mathfrak{T}$  hinsichtlich  $t$ . — Jede der zwei Distributionen  $\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{T}^{(p)}$  bestimmt die andere eindeutig. Die Transformierten von  $\partial\mathfrak{T}/\partial x$ ,  $\partial\mathfrak{T}/\partial t$ ,  $\delta_{(x, t)}$  sind bzw.  $\partial\mathfrak{T}^{(p)}/\partial x$ ,  $p\mathfrak{T}^{(p)}$ ,  $\delta_x$ . Wenn  $L(\partial/\partial x, \partial/\partial t)$  ein linearer Operator mit konstanten Koeffizienten ist, wenn ferner  $\mathfrak{T}^{(p)}$  eine Elementarlösung von  $L(\partial/\partial x, p)$  ist und wenn eine Distribution  $\mathfrak{T} \in D'_{(\xi, \tau)}$  existiert, von der  $\mathfrak{T}^{(p)}$  die Laplace-Transformierte ist, so ist  $\mathfrak{T}$  eine Elementarlösung von  $L(\partial/\partial x, \partial/\partial t)$ . Hiervon wird eine spezielle Anwendung auf den Operator  $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  gemacht.

G. Doetsch.

**Jaiswal, J. P.:** On Meijer transform. Math. Z. 55, 385–398 (1952).

Für die von C. S. Meijer (dies. Zbl. 25, 184) eingeführte Transformation

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st/2} W_{k+1/2, m}(st) (st)^{-k-1/2} f(t) dt$$

( $W =$  Whittakersche Funktion), die sich für  $k = \pm m$  auf die Laplace-Transformation reduziert, werden die hauptsächlichsten Abbildungseigenschaften abgeleitet. Ferner werden die Transformierten von einigen speziellen Funktionen ausgerechnet und mehrere Sätze über Reihen und Integrale aufgestellt, in denen die obige Transformation auftritt.

G. Doetsch.

**Olsen, Haakon:** On a certain Hankel transform. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 31, 135 (1952).

**Duffin, R. J.:** Some simple unitary transformations. Ann. of Math., II. Ser. 55, 531—537 (1952).

Es wird eine besonders einfache Klasse von unitären Transformationen ohne Benutzung der Lebesgueschen Integrationstheorie behandelt.  $p(x)$  sei stetig und

$P(x) = \int_{-\infty}^x |p(t)|^2 dt \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ ,  $q(-x) = p(x)/P(x)$ . Dann definiert

$$g(-x) = f(x) - q(-x) \int_{-\infty}^x p(t) f(t) dt$$

eine unitäre Transformation  $g(x) = U f(x)$  im Raum  $S$  der stetigen Funktionen mit  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$ ; sie hat die Umkehrung

$$f(-x) = g(x) - p(-x) \int_{-\infty}^x q(t) g(t) dt.$$

Dabei heißt  $g(x) = U f(x)$  unitär, wenn  $q(x) \in S$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$ , zu jedem  $g \in S$  ein  $f \in S$  existiert mit  $U f(x) = g(x)$  und  $U$  distributiv ist. —

Von der speziellen unitären Transformation  $g(x) = f(x) - 2a \int_0^1 t^{\theta-1/2} f(xt) dt$  ( $\Re \theta = a > 0$ ) werden einige Anwendungen gemacht. G. Doetsch.

**Redheffer, R. M.:** Moments which are integers. Proc. Amer. math. Soc. 3, 282 (1952).

Let  $\alpha(t)$  be of bounded variation and have infinitely many points of increase on  $(a, b)$ . If  $\int_a^b t^n d\alpha(t)$  is an integer for  $n = 0, 1, 2, \dots$ , then  $b - a \geq 4$ . If  $a$  is an integer, the conclusion cannot be replaced by  $b - a > 4$ , for non-integral  $a$  the problem is open. J. Horváth.

**Cooper, J. L. B.:** Heaviside and the operational calculus. Math. Gaz. 36, 5—19 (1952).

## Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Oxtoby, John C.:** Ergodic sets. Bull. Amer. math. Soc. 58, 116—136 (1952).

Let  $T$  be a homeomorphism of a compactum  $\Omega$ . A Borel measure  $\mu$  on  $\Omega$ , invariant by  $T$  and satisfying  $\mu(\Omega) = 1$ , is called ergodic if the dynamical system  $(\Omega, T, \mu)$  is ergodic. N. Kryloff and N. Bogoliouboff (this Zbl. 16, 86) gave a method of construction of all the possible ergodic measures on  $(\Omega, T)$ . The author expounds a comprehensive review, with a number of supplementary remarks and simplifications of the works (due to Ambrose, Fomin, Halmos, Hedlund, Kakutani, Morse, von Neumann, Nemyckij-Stepanoff, Oxtoby-Ulam, Robbins, the reviewer etc.) which centre around the theory of ergodic measures. It is splendid that a self-sufficient development of the basic theorems of Kryloff-Bogoliouboff are given here in only 4 pages. Thus a point  $p \in \Omega$  is called quasi-regular ( $p \in Q$ ) if the time

average  $M(f, p) = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} \sum_{i=1}^k f(T^i p)$  exists for every  $f \in C(\Omega)$ . To each  $p \in Q$  corresponds uniquely an invariant Borel measure  $\mu_p$  such that  $\mu_p(\Omega) = 1$ ,  $M(f, p) = \int_{\Omega} f(\omega) \mu_p(d\omega)$  for

$f \in C(\Omega)$ . A point  $p \in Q$  is called a point of density ( $p \in Q_D$ ) if  $\mu_p(U) > 0$  for every open set  $U \supset p$ , and  $p \in Q$  is called transitive ( $p \in Q_T$ ) if  $\mu_p$  is an ergodic measure. The set  $R = Q_D \cap Q_T$  is an invariant Borel set such that:  $\mu(R) = 1$  for any invariant Borel measure  $\mu$  with  $\mu(R) = 1$ , and, moreover, such  $\mu$  satisfies  $\mu(E) = \int_R \mu_p(E) \mu(dp)$ . For any ergodic measure  $\mu$ , the set

$\{p \in R; \mu_p = \mu\}$  is called the ergodic set corresponding to  $\mu$ . Hence the ergodic sets stand in 1:1 correspondence with the ergodic measures, and each ergodic measure vanishes outside the corresponding ergodic sets. The author then gives two simple characterisations of transitive points and the conditions under which the ergodic theorem holds uniformly, by refining the classical ergodic theorems. Also a generalisation of the ergodic decomposition to non-compact

systems is considered. Finally, by considering the schift transformationen on sequence space. there is given an example of a minimal set that is not strictly ergodic (in the sense of Nemyckij-Stepanoff).

K. Yosida.

Mackey, George W.: Induced representations of locally compact groups. I. Ann. of Math., II. Ser. 55, 101—139 (1952).

Dans un article antérieur de l'A. (ce Zbl. 35, 69), la relation établie par Frobenius (pour les groupes finis et leurs représentations de dimension finie) entre les représentations imprimitives et les représentations induites, a été généralisée aux groupes localement compacts séparables et aux représentations unitaires dans un espace hilbertien. Une étude systématique des représentations induites, commencée ailleurs [Amer. J. Math. 73, 576—592 (1951)], est considérablement développée ici (et une suite est promise). Certains résultats ont été annoncés antérieurement (ce Zbl. 35, 299). — Soit  $G$  un sous-groupe fermé du groupe localement compact séparable  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{M}$  l'espace homogène des classes à droite de  $\mathfrak{G}$  suivant  $G$ . En prenant l'image dans  $\mathfrak{M}$  d'une mesure bornée sur  $\mathfrak{G}$  équivalente à la mesure de Haar, on obtient une mesure quasi-invariante dans  $\mathfrak{M}$ , i. e. une mesure équivalente à toutes ses transformées par  $\mathfrak{G}$ ; l'A. montre que toutes les mesures quasi-invariantes dans  $\mathfrak{M}$  sont équivalentes entre elles (en faisant usage du résultat analogue pour  $\mathfrak{G}$  et de sections boréliennes de  $\mathfrak{G}$  au-dessus de  $\mathfrak{M}$ ) et étudie complètement les multiplicateurs correspondants. — Soit  $L$  une représentation unitaire de  $G$  dans un espace hilbertien séparable  $\mathfrak{H}(L)$ ; soit  $\mu$  une mesure quasi-invariante dans  $\mathfrak{M}$ ; les applications  $f$  faiblement boréliennes de  $\mathfrak{G}$  dans  $\mathfrak{H}(L)$  telles que  $f(\xi x) = L_\xi(f(x))$  pour  $\xi \in G$ ,  $x \in \mathfrak{G}$ , et  $\int \|f\|^2 d\mu < +\infty$  forment un espace hilbertien  ${}^\mu\mathfrak{H}^L$ ; pour  $y \in \mathfrak{G}$ , soit  $T_y$  la transformation de  ${}^\mu\mathfrak{H}^L$  qui applique  $f$  sur  $g$ , où  $g(x) = s(x, y)f(xy)$ ,  $s(x, y)$  étant une fonction choisie de telle sorte que  $T_y$  soit unitaire (par exemple,  $s = 1$  si  $\mu$  est invariante); l'application  $y \rightarrow T_y$  est une représentation  ${}^\mu U^L$  de  $\mathfrak{G}$ ; quand on change  $\mu$ ,  ${}^\mu U^L$  est remplacée par une représentation unitairement équivalente; on a donc une classe  $U^L$ , ou  $\mathfrak{G} U^L$ , de représentations, qu'on appelle représentation induite par  $L$ . Premiers résultats: 1) Soient  $G_1$  et  $G_2$  ( $G_1 \subset G_2$ ) des sous-groupes fermés de  $\mathfrak{G}$ ,  $L$  une représentation de  $G_1$ , et  $M = \mathfrak{G}_2 U^L$ ; alors,  $\mathfrak{G}_1 U^L$  et  $\mathfrak{G}_2 U^M$  sont unitairement équivalentes. 2) Si, étant donnée une représentation unitaire  $x \rightarrow U_x$  d'un groupe dans l'espace hilbertien  $H$ , on désigne par  $\bar{U}$  la représentation  $x \rightarrow (U_x^{-1})^*$  dans l'espace conjugué de  $H$ , alors les représentations  $U^L$  et  $\bar{U}^L$  sont unitairement équivalentes. 3) Soient  $L_1$  (resp.  $L_2$ ) une représentation du sous-groupe  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) du groupe  $\mathfrak{G}_1$  (resp.  $\mathfrak{G}_2$ ); alors, les représentations  $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 U^{L_1 \times L_2}$  et  $\mathfrak{G}_1 U^{L_1} \times \mathfrak{G}_2 U^{L_2}$  sont équivalentes (le signe  $\times$  représente le produit tensoriel usuel de deux représentations opérant dans le produit tensoriel des espaces). — Lorsque  $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ , la restriction de  $U^{L_1} \times U^{L_2}$  à la diagonale de  $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$  définit une représentation de  $\mathfrak{G}$  notée  $U^{L_1} \otimes U^{L_2}$ . Pour étudier la réduction de  $U^{L_1} \otimes U^{L_2}$ , l'A. se pose le problème plus général suivant: soient  $G_1$  et  $G_2$  deux sous-groupes de  $\mathfrak{G}$ ,  $L$  une représentation de  $G_1$ , et  $U^{L, G_2}$  la restriction de  $U^L$  à  $G_2$ . Toute partition de  $\mathfrak{G}/G_1$  en ensembles mesurables non négligeables stables pour  $G_2$  fournit une réduction de  $U^{L, G_2}$ . En particulier, soit  $C$  une orbite non négligeable de  $\mathfrak{G}/G_1$  pour  $G_2$ ; soit  $x_0 \in \mathfrak{G}$  tel que sa classe dans  $\mathfrak{G}/G_1$  appartienne à  $C$ ; soit  $\mathfrak{S}_C$  l'ensemble des applications de  $G_1 \times G_2$  dans  $\mathfrak{H}(L)$ , faiblement boréliennes, telles que  $f(\xi x) = L_\xi(f(x))$  pour  $\xi \in G_1$ ,  $x \in G_1 \times G_2$ , et  $\int_C \|f\|^2 d\mu_C < +\infty$ ,  $\mu_C$  étant une mesure quasi-invariante dans  $C$  pour  $G_2$  (par exemple,

la mesure induite par  $\mu$  dans  $C$ ; mais la définition apparemment détournée qu'on vient d'indiquer est destinée à couvrir le cas général des orbites négligeables); alors la représentation de  $G_2$  dans  $\mathfrak{S}_C$  définie par action des translations à droite est la „part“ de  $U^{L, G_2}$  définie par  $C$ ; or (lemme essentiel), elle est unitairement équivalente à la représentation de  $G_2$  induite par la représentation  $\eta \rightarrow L_{x_0 \eta x_0^{-1}}$  de  $G_2 \cap (x_0^{-1} G_1 x_0)$ . Ceci posé, disons que  $G_1$  et  $G_2$  sont en rapport discret s'il existe un ensemble négligeable dans  $\mathfrak{G}$  dont le complémentaire soit réunion dénombrable de classes bilatères  $D_x = G_1 x G_2$  non négligeables; soit  $\mathfrak{D}$  l'ensemble de ces classes; alors,  $U^{L, G_2}$  est somme directe, quand  $D$  parcourt  $\mathfrak{D}$ , des  ${}_{D_x} V$ , où  ${}_{D_x} V$  est la représentation de  $G_2$  induite par la représentation  $\eta \rightarrow L_{x_0 \eta x_0^{-1}}$  de  $G_2 \cap (x_0^{-1} G_1 x_0)$ . Il en résulte une décomposition de  $U^{L_1} \otimes U^{L_2}$ . — Soient  $U$  et  $V$  des représentations de  $\mathfrak{G}$ . Une application linéaire continue de  $\mathfrak{H}(V)$  dans  $\mathfrak{H}(U)$  est appelée opérateur d'entrelacement fort si  $U_x T = T V_x$  et si  $T$  est du type d'Hilbert-Schmidt; la dimension de l'espace de ces opérateurs est appelée nombre d'entrelacement fort et notée  $J(U, V)$ . Alors, un théorème généralisant le théorème de réciprocité de Frobenius permet de calculer  $J(U^{L_1}, U^{L_2})$  à partir des nombres d'entrelacement forts des représentations  $s \rightarrow (L_1)_{x s x^{-1}}$  et  $s \rightarrow (L_2)_{y s y^{-1}}$  de  $(x^{-1} G_1 x) \cap (y^{-1} G_2 y)$ . — Pour généraliser les résultats précédents, l'A. esquisse la démonstration de quelques lemmes: 1) il développe une théorie des sommes continues d'espaces hilbertiens (différant légèrement de celles de von Neumann et Godement); ceci lui permet de prouver que, si une représentation  $M$  d'un sous-groupe  $G$  de  $\mathfrak{G}$  est somme continue de représentations  ${}^\nu L$ ,  $U^M$  est somme continue des  $U^\nu L$ . 2) Soit  $\mu$  une mesure bornée dans un espace localement compact  $\mathfrak{M}$ , quasi-invariante pour un



groupe  $\mathcal{G}$ ; soit  $\hat{\mu}$  la mesure quotient de  $\mu$  dans  $\mathcal{M}/R$  ( $R$ , relations d'équivalence définie par  $\mathcal{G}$  dans  $\mathcal{M}$ ), et soit  $u = \int \mu_y d\hat{\mu}(y)$  la décomposition de  $\mu$ , où les  $\mu_y$  sont portées par les classes de  $\mathcal{M}$  suivant  $R$ ; si  $R$  est mesurable au sens de V. A. Rochlin (ce Zbl. **33**, 169), presque toutes les  $\mu_y$  sont quasi-invariantes. Ceci posé, les théorèmes relatifs au cas où  $G_1$  et  $G_2$  sont en rapport discret se généralisent, les sommes directes étant remplacées par des sommes continues, au cas où  $G_1$  et  $G_2$  sont en rapport régulier, i. e.: il existe une suite  $E_0, E_1, \dots$  de parties mesurables de  $\mathcal{G}$ , dont chacune est réunion de classes bilatères  $G_1 \times G_2$ , telles que  $E_0$  soit négligeable et que chaque classe non contenue dans  $E_0$  soit l'intersection des  $E_i$  qui la contiennent. — Comme applications de ses résultats, l'A. complète les propriétés des produits semi-directs, et étudie le groupe spécial linéaire complexe à  $n$  variables (spécialement le cas  $n = 2$ ); ses méthodes sont parfois plus puissantes et parfois moins puissantes que celles de Gelfand et Neumark.

J. Dixmier.

**Smirnov, Ju. M.:** Über das Gewicht des Ringes der beschränkten stetigen Funktionen über einem normalen Raum. Mat. Sbornik, n. Ser. **30** (72), 213—218 (1952) [Russisch].

Das Gewicht  $\tau R$  eines topologischen Raumes  $R$  ist die kleinste Kardinalzahl  $m$ , so daß eine offene Basis der Mächtigkeit  $m$  existiert. Das kombinatorische Gewicht  $\sigma R$  eines Raumes  $R$  ist die kleinste Kardinalzahl  $m$ , so daß eine Menge  $\Sigma$  offener endlicher Überdeckungen des Raumes  $R$  mit den folgenden Eigenschaften existiert: 1)  $\Sigma = m$ ; 2) für jede offene endliche Überdeckung  $U_0$  von  $R$  gibt es eine Überdeckung  $U \in \Sigma$ , die eine Verfeinerung von  $U_0$  ist. Das reguläre Gewicht  $\pi R$  eines Raumes  $R$  ist die kleinste Kardinalzahl  $m$ , so daß eine Menge  $\Pi$  offener Untermengen des Raumes  $R$  mit den folgenden Eigenschaften existiert: 1)  $\bar{\Pi} = m$ ; 2) wenn  $F_1 = F_1, F_2 = F_2, F_1 \cdot F_2 = 0$ , dann gibt es eine Menge  $G \in \Pi$ , so daß  $F_1 \subset G$  und  $F_2 \cdot G = 0$ . — Es wird bewiesen, daß  $\tau C(R) = \sigma R = \pi R$  für jeden normalen Raum  $R$ , wo  $C(R)$  den metrischen Raum aller beschränkten stetigen reellen Funktionen auf  $R$  bezeichnet. Wenn  $R$  metrisch ist und wenn das Gewicht  $\tau = \tau R$  keine Summe einer Folge der Kardinalzahlen  $m_n < \tau$  ist, dann ist  $\tau C(R) = 2^\tau$ .

R. Sikorski.

**Grothendieck, A.:** Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. Amer. J. Math. **74**, 168—186 (1952).

Dans un espace topologique  $E$ , un ensemble  $A$  est dit relativement semi-compact si toute suite de points de  $A$  admet dans  $E$  une valeur d'adhérence, strictement relativement semi-compact si de toute suite de points de  $A$  on peut extraire une suite convergente dans  $E$ . Dans un espace métrisable ces deux notions sont équivalentes à la compacité relative (au sens de N. Bourbaki), mais il n'en est pas de même dans des espaces non métrisables. Généralisant des résultats de Smulian et Eberlein, relatifs aux espaces de Banach (munis de la topologie faible), l'A. montre que dans certains espaces fonctionnels non métrisables, la semi-compacité relative entraîne la compacité relative ou la stricte semi-compacité relative. Le lemme essentiel (dont la démonstration généralise celle du théorème d'Eberlein) est le suivant: Soit  $A$  un ensemble d'applications continues d'un espace topologique  $E$  dans un espace complètement régulier  $F$ ; supposons que pour toute suite  $(f_n)$  d'éléments de  $A$  et toute suite  $(x_i)$  de points de  $E$ , il existe un point  $y$  de  $F$  „doublement adhérent“ à la suite double  $(f_n(x_i))$ , c'est-à-dire tel que tout voisinage de  $y$  rencontre une infinité de lignes et une infinité de colonnes de cette suite, chacune en une infinité de termes. Alors toute limite simple d'applications appartenant à  $A$  est une application continue de  $E$  dans  $F$ . L'A. déduit de ses résultats généraux des critères de compacité dans divers espaces fonctionnels, notamment dans l'espace de Banach  $C^\infty(E)$  des fonctions continues et bornées dans un espace topologique  $E$ , l'espace  $C^\infty(E)$  étant muni de sa topologie faible. Cela lui permet par exemple de montrer que sur un semi-groupe, toute fonction faiblement presque périodique à gauche est aussi faiblement presque périodique à droite.

J. Dieudonné.

**Jackson, James R.:** Comparison of topologies on function spaces. Proc. Amer. math. Soc. **3**, 156—158 (1952).

Si  $X$  est un espace complètement régulier,  $Y$  un espace uniforme contenant un sous-espace homéomorphe à un intervalle, l'A. prouve que sur l'ensemble des applications continues de  $X$  dans  $Y$ , la topologie de la convergence compacte ne peut être identique à celle de la convergence uniforme que si  $X$  est compact. Ceci est essentiellement un cas particulier de l'exercice 5 de N. Bourbaki, Topologie générale, chap. X, § 2 (Actual. sci. industr., no 1084, Paris 1949, p. 23; ce Zbl. **36**, 386).

J. Dieudonné.

**Arens, Richard:** Extension of functions on fully normal spaces. *Pacific J. Math.* 2, 11—22 (1952).

Généralisant un récent résultat de Dugundji (ce Zbl. 44, 118), l'A. démontre que si  $A$  est une partie fermée d'un espace paracompact  $X$ ,  $f$  une fonction continue dans  $A$ , à valeurs dans une partie convexe, métrisable et complète  $K$  d'un espace localement convexe  $L$ , alors  $f$  peut être prolongée en une application continue de  $X$  dans  $K$ ; le cas traité par Dugundji est celui où  $X$  est métrisable, et la méthode de l'A. consiste à se ramener à ce cas au moyen d'un théorème (généralisant un théorème classique de Hausdorff), qui permet de prolonger un écart défini dans  $A$  en un écart défini dans  $X$ . Il montre que si  $X$  n'est pas métrisable, on ne peut pas toujours prolonger „simultanément“ les applications continues  $f$  de  $A$  dans  $K$  de façon à conserver les relations linéaires entre ces fonctions. Enfin, il déduit de ses résultats la proposition suivante: si  $A$  est un sous-espace compact d'un espace paracompact  $X$  sur lequel est définie une „mesure de Baire“ bornée et de support  $X$ , et si  $S$  est un sous-espace séparable de l'espace de Banach  $C(A)$  des fonctions continues dans  $A$ , il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $A$  telle que  $\int f d\mu > 0$  pour toute fonction  $f \in S$  qui est  $\geq 0$  et non identiquement nulle. [Note du Réf.: ce dernier résultat peut se démontrer simplement sans aucune hypothèse d'„immersion“ sur  $A$ . On considère la relation d'équivalence  $R: f(x) = f(y)$  pour toute  $f \in S$  dans  $A$ ;  $A/R$  est un espace compact et  $C(A/R)$  est séparable, donc  $A/R$  est métrisable; il est alors immédiat de définir une mesure positive  $m$  sur  $A/R$  de support égal à  $A/R$  (placer des masses positives en des points d'une suite partout dense). Par passage au quotient, cela définit une fonctionnelle continue  $I(f)$  sur  $S$ , qui a la propriété voulue, et peut être prolongée en une mesure positive sur  $A$  par le théorème de Hahn-Banach].

*J. Dieudonné.*

**Mil'man, D.:** Die Randstruktur eines konvexen Bikompaktums und die Integraldarstellungen von Mitteln. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 83, 357—360 (1952) [Russisch].

Soit  $R$  un espace linéaire, contenant l'unité, de fonctions réelles définies sur un ensemble  $K$ . On définit sur  $K$  une structure linéaire par la convention „ $f = \sum_{j=1}^n a_j f_j$  équivaut à  $x(f) = \sum_{j=1}^n a_j x(f_j)$  pour tout  $x \in R(f, f_j \in K)$ “ et une topologie „fonctionnelle“ (D. Mil'man, ce Zbl. 30, 397). Avec ces structures,  $K$  est supposé bicompat et convexe. — Si  $f_0 = \alpha f_1 + \beta f_2$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , on dit que  $f_1$  et  $f_2$  sont subordonnés à  $f_0$ . Un élément  $f \in K$  est appelé extrémal, s'il n'a pas des éléments subordonnés. Un ensemble fermé  $M \subset K$  est appelé „bord“ si, avec chacun de ses éléments,  $f$ , il contient aussi les éléments subordonnés à  $f$ . L'ensemble  $F \subset K$  est „suffisant“ pour un autre ensemble  $M \subset K$  si  $M$  est contenu dans le plus petit bicompat convexe contenant  $F$ . — On énonce les théorèmes suivants: Les intersections des „bords“ avec l'ensemble  $A$  des éléments extrémaux de  $K$  sont tous les ensembles fermés d'une topologie sur  $A$ , satisfaisant à l'axiome de séparation  $T_1$  (topologie  $\gamma$ ). Avec cette topologie,  $A$  est un bicompat. — Toute mesure normée sur  $A$  (adhérence de  $A$  dans la topologie de  $K$ ) induit sur  $A$  (avec la topologie  $\gamma$ ) une mesure normée généralisée. Si  $F \subset A$ ,  $M \subset K$  et  $F$  est fermé dans  $K$  et suffisant pour  $M$ , alors  $F$  contient au moins un ensemble suffisant minimal pour  $M$ . — Tout élément  $f$  de  $K$ , considéré comme fonctionnelle sur  $R$ , peut être représenté par une intégrale sur l'ensemble suffisant minimal pour  $f$ . Les ensembles élémentaires d'intégration sont des ensembles suffisants minimaux pour des éléments convenablement choisis. — Pour le dernier théorème, on utilise quelques résultats préliminaires sur les recouvrements ouverts et sur l'approximation de l'intégrale de Radon dans les espaces topologiques. *G. Marinescu.*

**Edwards, R. E.:** The translates and affine transforms of some special functions. *J. London math. Soc.* 27, 160—175 (1952).

Soient  $E$  un espace vectoriel topologique de fonctions définies sur l'axe réel,  $P$  et  $Q$  deux ensembles de nombres réels; le problème se pose de trouver, relativement à  $f \in E$ ,  $P$  et  $Q$  des conditions suffisantes pour que les fonctions  $f(px + q)$  ( $p \in P$ ,  $q \in Q$ ) constituent un ensemble total dans  $E$ . L'A. étudie d'abord le cas où  $E$  est

l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini; il donne (entre autres résultats) le système de conditions suivant:  $f(x) = \int e^{itx} F(t) dt$ ; il existe  $a > 0$  tel que  $\int e^{a|t|} |F(t)| dt < \infty$ ; le support de  $F$  contient un voisinage de 0;  $0 \notin P$ ,  $0 \in \bar{P}$ ; enfin  $Q$  est un ensemble d'unicité pour les fonctions de  $w = u + iv$  holomorphes et bornées dans la bande  $|v| < a$ . Il prend ensuite pour  $E$  l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

*J. Deny.*

**Allen, H. S.: Groups of infinite matrices.** Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 111—134 (1952).

Ist  $\alpha$  ein vollkommener und metrischer Raum (vom Verf. als Köthe-Banachraum bezeichnet), so bilden die unendlichen Matrizen  $A$ , für die  $A\alpha = \alpha$  und  $A'\alpha^* = \alpha^*$  gilt ( $\alpha^*$  der zu  $\alpha$  duale vollkommene Raum), eine topologische Gruppe  $G(\alpha)$  innerhalb der Banachalgebra  $\Sigma(\alpha)$  aller  $\alpha$  in sich abbildenden Matrizen. Verlangt man nur  $A\alpha = \alpha$ , so erhält man eine Halbgruppe  $S(\alpha) \supset G(\alpha)$ . Die Gruppe  $G(\alpha)$  ist eine maximale Gruppe unendlicher Matrizen,  $G(\alpha)$  und  $G(\alpha^*)$  sind isomorph. Ist  $\alpha$  separabel, so kann  $G(\alpha)$  auch durch die Bedingungen:  $A\alpha = \alpha$  und  $Ax = 0$  in  $\alpha$  unlösbar, erklärt werden. Sind  $\alpha$  und  $\beta$  als vollkommene Räume homöomorph, dann sind sie auch als metrische lineare Räume äquivalent, und die zugehörigen Gruppen  $G(\alpha)$  und  $G(\beta)$  sind isomorph. Ist  $A \in S(\alpha)$ , so ist das Linksideal  $\Sigma(\alpha)A$  in  $\Sigma(\alpha)$  abgeschlossen. Verschiedene Untergruppen von  $G(\alpha)$  werden studiert und die Zusammenhänge mit der Reziprokenbildung untersucht.

*G. Köthe.*

**Sunouchi, Haruo: On rings of operators of infinite classes.** Proc. Japan Acad. 28, 9—13 (1952).

L'A. esquisse une généralisation aux anneaux d'opérateurs quelconques de la théorie des applications  $\dagger$  établie par le rapporteur pour les anneaux de classe finie. (Le rapporteur a lui-même obtenu cette généralisation; ce Zbl. 35, 70, 43, 327). Dans le lemme 2, l'assertion  $\text{Range}(E^{\dagger}) = Z$  est inexacte. De même la phrase „And any finite projection . . .“ de la p. 12, ligne 9 du bas.

*J. Dixmier.*

**Pallu de la Barrière, Robert: Isomorphisme des  $\ast$ -algèbres faiblement fermées d'opérateurs.** C. r. Acad. Sci., Paris 234, 795—797 (1952).

L'A. annonce (sans démonstration) l'extension de certains théorèmes de F. J. Murray et J. von Neumann sur les facteurs [Ann. of Math., II. Ser. 44, 716—808 (1943)] aux anneaux d'opérateurs quelconques, et aussi certains résultats nouveaux même pour les facteurs. Pour cela, il analyse avec quelques détails la structure d'une factorisation couplée  $M, M'$ , et en définit certains invariants. Moyennant des conditions simples sur ces invariants, un isomorphisme algébrique entre anneaux d'opérateurs est aussi spatial. Tout isomorphisme algébrique est ultrafortement continu, et, moyennant certaines conditions, fortement et faiblement continu. La connection entre anneaux d'opérateurs et  $H$ -systèmes de Ambrose est indiquée. L'A. construit aussi une certaine fonction-poids.

*J. Dixmier.*

**Kaplansky, Irving: Representations of separable algebras.** Duke math. J. 19, 219—222 (1952).

L'A. donne une démonstration nouvelle et simplifiée d'un théorème algébrique de Johnson et Kiokemeister (ce Zbl. 31, 344), puis établit un résultat analogue de nature topologique: soient  $H, K$  deux espaces hilbertiens séparables,  $A$  l'algèbre des opérateurs bornés sur  $H$ ,  $\varphi$  une  $\ast$ -représentation de  $A$  sur  $K$ . Alors  $\varphi$  est somme directe orthogonale de représentations équivalentes à la représentation identique de  $A$  sur  $H$ . Le nerf des démonstrations est la remarque suivante: si  $B$  est l'algèbre booléenne des parties d'un ensemble dénombrable, et  $I$  l'idéal des parties finies,  $B/I$  contient un ensemble non dénombrable d'éléments deux à deux disjoints.

*J. Dixmier.*



**Ingleson, A. W.:** The Hahn-Banach theorem for non-archimedean-valued fields. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 41—45 (1952).

Verf. untersucht die Gültigkeit des Satzes von Hahn-Banach über die Erweiterung linearer Funktionale auf normierten linearen Räumen, deren Skalarkörper nichtarchimedisch bewertet ist. Allgemeingültig ist der genannte Satz nur in reellen und komplexen Banachräumen. Im nichtarchimedischen Falle bedarf es noch zusätzlicher Voraussetzungen. Verf. zeigt zunächst: Die Gültigkeit des Erweiterungssatzes zieht notwendig nach sich, daß der Raum total nichtarchimedisch ist; d. h. die Norm erfüllt die strenge Dreiecksungleichung  $\|x+y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ . Das Hauptergebnis besteht in der Angabe einer notwendigen und hinreichenden Bedingung dafür, daß ein total nichtarchimedischer Raum  $E$  die Erweiterungseigenschaft hat. Die Erweiterungseigenschaft besagt: Ist  $F$  irgendein total nichtarchimedischer Raum über demselben Körper wie  $E$ , und ist  $T$  linearer Operator eines Teilraumes  $M \subset F$  in  $E$ , so besitzt  $T$  eine Erweiterung auf ganz  $F$ , die dieselbe Norm wie  $T$  besitzt. Der Hauptsatz lautet: Ein total nichtarchimedischer Raum besitzt dann und nur dann die Erweiterungseigenschaft, wenn er sphärisch komplett ist. Ein normierter Raum heißt dabei sphärisch komplett, wenn jede hinsichtlich der Inklusion total geordnete Menge von (mittels der Norm erklärten) Kugeln einen nicht-leeren Durchschnitt besitzt. Ein Körper  $K$  besitzt die Hahn-Banach-Eigenschaft, wenn folgendes gilt:  $F$  sei ein total nichtarchimedischer Raum über  $K$ . Ist dann  $f$  ein lineares Funktional über einem Teilraum von  $F$ , so soll  $f$  eine Erweiterung gleicher Norm auf ganz  $F$  besitzen. Aus dem Hauptsatz folgt dann: Ein nicht archimedisch bewerteter Körper besitzt dann und nur dann die Hahn-Banach-Eigenschaft, wenn er sphärisch komplett ist. Diese Forderung ist, wie Verf. selbst in einem Anhang bemerkt, damit gleichwertig, daß  $K$  maximal bewertet ist. Den Abschluß der Arbeit bildet ein Beispiel für einen Körper, der sphärisch komplett, jedoch nicht diskret bewertet ist. Dieses Beispiel zeigt, daß die vom Verf. angegebenen Bedingungen über die von Cohen gewonnenen Ergebnisse hinausführen. H.-J. Kowalsky.

**Kelley, J. L.:** Banach spaces with extension property. Trans. Amer. math. Soc. 72, 323—326 (1952).

A Banach space  $X$  has the extension property if every bounded linear operation from a subspace  $Y'$  of a Banach space  $Y$  to  $X$  has an extension to the whole of  $Y$ , not enlarging the norm of the operation. The author proves that every space with this property is equivalent to the space  $C_Q$  of continuous functions defined on  $Q$ ,  $Q$  being a compact and extremally disconnected (i. e. such that every two disjoint open sets have disjoint closures) Hausdorff space. This theorem yields a final sharpening of some previous results obtained by Nachbin (this Zbl. 35, 354) and Goodner (this Zbl. 41, 232); both authors proved also the converse theorem, hence the result of Kelley presents a complete characterization of the spaces with extension property. The space  $Q$  is defined by the author as a subset of the closure of the set of the extreme points of the unit sphere in the conjugate space provided with the weak topology as functionals. The author mentions that a space with the extension property is not necessarily equivalent to a conjugate to an abstract  $L$ -space — this solves by negative a problem of Goodner. A. Alexiewicz.

**Zeller, Karl:** Über Stetigkeit von Integraltransformationen. Math. Z. 55, 167—182 (1952).

Ist  $\mathfrak{B}$  ein komplexer linearer Raum mit einem Konvergenzbegriff, so besteht das zu  $\mathfrak{B}$  gehörige  $F$ -System  $W$  aus allen linearen Teilräumen  $\mathfrak{C}$  von  $\mathfrak{B}$ , die  $F$ -Räume im Sinn von Banach sind und in denen aus  $x_n \rightarrow x$  im Sinne der  $F$ -Norm stets  $x_n \rightarrow x$  im Sinn der Konvergenz in  $\mathfrak{B}$  folgt. Es werden speziell die  $F$ -Systeme  $P$  und  $M$  zu den Räumen  $\mathfrak{B}$  bzw.  $\mathfrak{M}$  der in  $0 \leq t \leq \infty$  endlichen und meßbaren Funktionen betrachtet. Die Konvergenz in  $\mathfrak{B}$  ist dabei die punktweise Konvergenz, in  $\mathfrak{M}$  die Maßkonvergenz. Zu  $P$  bzw.  $M$  gehören zahlreiche aus der Analysis bekannte Funktionenräume. Es werden Integraltransformationen der Form (1)  $y(s) =$

$$\gamma(s) x(s) + \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \Gamma(s, t) x(t) dt$$
 untersucht,  $x, \gamma, \Gamma$  meßbare Funktionen. (1) kann

als Abbildung aus  $\mathfrak{B}$  in  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{P}$  in  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M}$  in  $\mathfrak{P}$  betrachtet werden. Es wird nun bewiesen, daß eine Abbildung (1), wenn sie auf einem Raum  $\mathfrak{C}_1$  des  $F$ -Systems  $P$  oder  $M$  erklärt ist und ihn in einen ebensolchen Raum  $\mathfrak{C}_2$  aus  $P$  oder  $M$  abbildet,

stets eine stetige Abbildung von  $\mathfrak{G}_1$  in  $\mathfrak{G}_2$  ist. Diese Behauptung gilt sogar noch für die  $F_\sigma$ -Systeme zu  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{B}$ , in denen neben den  $F$ -Räumen noch abzählbare Vereinigungen von  $F$ -Räumen mit geeigneten Konvergenzdefinitionen zugelassen sind. Einige allgemeine Sätze über die Struktur der  $F$ - und  $F_\sigma$ -Systeme werden bewiesen. Der Satz über die Stetigkeit von (1) wird benutzt, um einen Permanenzsatz über Integraltransformationen der Gestalt  $y(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \Gamma(s, t) x(t) dt$  abzuleiten, der in ähnlicher Form von Hardy aufgestellt wurde. *G. Köthe.*

**Gochberg, I. C.:** Über eine Anwendung der Theorie der normierten Ringe auf singuläre Integralgleichungen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 2 (48), 149—156 (1952) [Russisch].

Ist die geschlossene Kurve  $\Gamma$  in der komplexen Ebene genügend regulär, so erzeugt der Integraloperator  $\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - \tau} dt$ , wo der Cauchysche Hauptwert zu nehmen ist, eine beschränkte lineare Transformation  $S\varphi$  des Raumes  $L^2(\Gamma)$ . Schreibt man  $A \equiv B$ , wenn  $A, B$  solche Transformationen sind, deren Differenz vollstetig ist, so besitzt  $S$  die folgenden Eigenschaften: 1°  $S^2 = I$  (die identische Transformation), 2°  $S^* \equiv S$ , 3°  $JS^*J = -S$ , wo  $J$  die Konjugation bedeutet [ $J\varphi(t) = \overline{\varphi(\bar{t})}$ ], 4° bedeutet  $a$  die Multiplikation mit der stetigen Funktion  $a(t)$ , so gilt  $aS \equiv Sa$ . [Siehe für alle diese Sätze S. G. Michlin, Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 3, 29—112 (1948)]. — Hier werden Transformationen von der Form  $A\varphi = a(t)\varphi + b(t)S\varphi + T\varphi$  betrachtet, wo  $a(t), b(t)$  gegebene stetige Funktionen und  $T$  eine gegebene vollstetige Transformation von  $L^2(\Gamma)$  sind. Ist (\*)  $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$  auf  $\Gamma$ , so kann  $A$  „regularisiert“ werden, d. h. es gibt eine beschränkte lineare Transformation  $M$  (nämlich  $M = \frac{a}{a^2 - b^2} I - \frac{b}{a^2 - b^2} S$ ) derart, daß  $MA \equiv I$ ; hieraus folgt dann nach einem Satz von F. Noether, daß für  $A$  die Fredholmsche Alternative gültig ist. — Mit der Heranziehung der Gelfandschen Theorie der normierten Ringe zeigt nun Verf., daß die Bedingung (\*) auch notwendig dafür ist, daß die Transformation  $A$  regularisiert werden kann; dabei werden von  $S$  nur die Eigenschaften 2°—4° und statt 1° die schwächere Bedingung  $S^2 \equiv I$  benutzt. *B. Sz.-Nagy.*

**Burgess, D. C. J.:** Abstract Laplace transforms and Tauberian theorems, with applications to the  $L^p$  and  $H^p$  classes. Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 94—110 (1952).

Ayant défini une mesure à valeurs dans un espace de Banach  $B$  au moyen d'une application  $x_i$  à variation fortement bornée de  $R_1$  dans  $B$ , l'A. définit des intégrales à valeurs dans  $B$  du type  $\int g(t) dx_i$ , où  $g(t)$  est une fonction complexe de  $t \in R_1$ . Il étudie en particulier des intégrales de Laplace  $\int_0^\infty e^{-st} dx_i$  au sujet desquelles il démontre deux théorèmes taubériens généralisant des énoncés classiques et qu'il utilise pour obtenir des renseignements sur le comportement de la transformée de Laplace lorsque celle-ci appartient à  $L^p$  ou  $H^p$ . *A. Revuz.*

**Glicksberg, I. L.:** A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points. Proc. Amer. math. Soc. 3, 170—174 (1952).

This note states and proves a generalization of Kakutani's fixed point theorem [see Duke math. J. 7, 457—459 (1951)]. The author extends it from the case of a Euclidean  $n$ -space to that of a convex Hausdorff linear space. He proves that if a convex, compact set of such a space is mapped into itself by a closed point to convex set mapping, there exists a fixed point. The method of proof is an easy one,

and quite similar to that used by Tychonoff or Schauder for their extension of the Brouwer's fixed point theorem. Exactly as Kakutani had shown that his fixed point theorem implied the minimax theorem for finite games, the author shows that his own theorem implies the minimax theorem for continuous games with continuous pay-off and entails also the existence of Nash equilibrium points. *C. Racine.*

**Kneser, Hellmuth:** Sur un théorème fondamental de la théorie des jeux. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **243**, 2418—2420 (1952).

The author proves the following generalisation of v. Neumann's fundamental theorem: Let  $K$  and  $L$  be two convex spaces and let  $f(x, y)$  be linear in the two arguments for  $x \in K$  and  $y \in L$ . If  $K$  is compact with regard to a suitably defined topology, then  $\sup_{x \in K} \inf_{y \in L} f(x, y) = \inf_{y \in L} \max_{x \in K} f(x, y)$ . *St. Vajda.*

**Allen, H. S.:** Idempotent operators on a vector space. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. **3**, 94—97 (1952)

Es sei eine Algebra linearer Operatoren auf einem Vektorraum  $\alpha$  gegeben, die den Einheitsoperator  $I$  enthält. Mit  $g(\beta)$  werde die Gruppe aller invertierbaren Operatoren bezeichnet, die den Teilraum  $\beta$  punktweise in sich überführen. Sind  $A$  und  $B$  zwei Projektionen mit demselben Bildraum  $\beta$ , so liegt  $X = I + A - B$  in  $g(\beta)$ . Zur Projektion  $A$  mit dem Bildraum  $\beta$  erhält man alle Projektionen  $B$  mit demselben Bildraum in der Form  $B = AX$ ,  $X \in g(\beta)$ . Ist  $B$  eine Rechtsinverse von  $A$ , so erhält man den Nullraum von  $A$  als Bildraum von  $I - BA$ . Hat  $A$  den Bildraum  $\beta$  und ist  $B$  Linksinverse von  $A$ , so erhält man alle Linksinversen von  $A$  in der Form  $BX$ ,  $X \in g(\beta)$ . Ist  $B$  Linksinverse von  $A$ , so ist  $kI + AB$  für  $k \neq 0, -1$  stets invertierbar. *G. Köthe.*

**Nevanlinna, Rolf:** Über metrische lineare Räume. I. Allgemeine Bemerkungen zur Metrisierbarkeit. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I, Nr. **108**, 8 S. (1952).

This is an elementary discussion of the possible (reasonable) ways of imposing a metric on an affine geometry of finite dimensions which itself is defined axiomatically. The plane case, with Hilbert's axioms, is taken as a typical example. Congruency is an equivalence relation, and a minimum requirement for the congruence of line segments (or vectors) is equivalence modulo a translation. These classes of equivalence can then be widened by imposing, in suitable manners, new equivalence relations on them. — To introduce, for instance, congruency of angles the usual postulate is that congruent triangles should have congruent angles. The author discusses the less stringent postulate that a trapezium with congruent non-parallel sides should have congruent diagonals. If, in addition, it is postulated that 3 given position vectors  $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2, \vec{OP}_3$  shall be congruent, where  $O$  is a fixed point, then it results that the endpoints  $P$  of all congruent vectors  $\vec{OP}$  lie on the central conic through  $P_1, P_2, P_3$  with  $O$  as centre. If the set of these points  $P$  is dense on the conic (in the sense of the affine ordering), then there are 3 cases: The case of the ellipse [a positive definite quadratic form as metrical form] gives the Euclidean geometry. The case of the hyperbola [an indefinite quadratic form] leads, on adding the conjugate hyperbola, to the geometry of Lorentz and Minkowski. Finally, the case of two parallel lines [a degenerate quadratic form] gives the geometry of Galilei. *W. W. Rogosinski.*

**Nevanlinna, Rolf:** Über metrische lineare Räume. II. Bilinearformen und Stetigkeit. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, Ser. A I, Nr. **113**, 9 S. (1952).

The problem is to impose a metric on an abstract linear vector space over the field of complex numbers by means of a Hermitean bilinear form  $Q(x, y)$ : the norm  $\|x\|$  of  $x$  being  $|Q(x)|$  where  $Q(x) = Q(x, x)$  is the associated quadratic form. The definition of convergence  $x_n \rightarrow x$  shall be in accordance with the usual continuity requirements for (a) an affine space of finite dimensions (compare preced.



review) and (b) for the Hilbert space. This amounts, in the first place, to the following definitions: 1.  $x_n \rightarrow 0$  means (i)  $Q(x_n) \rightarrow 0$  and (ii)  $Q(x_n, y) \rightarrow 0$  for every  $y$ . 2.  $x_n \rightarrow x$  means  $x_n - x \rightarrow 0$ . Here 1 (i) is „strong“ convergence to 0, and 1 (ii) is „weak“ convergence. If  $Q$  is definite then (ii) is implied by (i), but not otherwise. Further, in order that  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \rightarrow b$  should imply  $a = b$ , it is necessary and sufficient that  $Q$  should not be degenerate. But even then a convergent sequence need not be a Cauchy sequence, in the sense that  $|Q(x_m - x_n)| < \varepsilon$  and  $|Q(x_m - x_n, y)| < \varepsilon$  for  $m > n \geq N(\varepsilon)$ . This is shown on hand of the example  $Q(x, y) = \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \xi_v \bar{\eta}_v$  for the Hilbert space  $x \sim (\xi_v)$  with  $\sum |\xi_v|^2 < \infty$ . Further restrictions on the form  $Q$  are therefore required which the author proposes to analyse in a further note.

W. W. Rogosinski.

**Routledge, N. A.: A result in Hilbert space.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 12—18 (1952).

Soient  $H$  un espace de Hilbert, réel ou complexe,  $E$  un sous-ensemble non vide de  $H$ , de diamètre fini  $\delta$ . L'A. démontre qu'il existe une seule sphère de rayon minimum  $\rho$  contenant  $E$ , étant  $\rho \leq \delta/\sqrt{2}$ . La démonstration est fondée sur le théorème analogue pour l'espace euclidéen  $n$ -dimensionnel. En outre, il est montré par un exemple que la constante  $\delta/\sqrt{2}$  est la meilleure possible. Dans une note finale, l'A. souligne que ce théorème peut être prouvé plus simplement en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass et „l'axiome du choix“.

A. Pereira Gomes.

**Halmos, Paul R.: Commutators of operators.** Amer. J. Math. 74, 237—240 (1952).

Durchlaufen  $A$  und  $B$  alle beschränkten Operatoren eines Hilbertschen Raumes  $\mathfrak{H}$ , so hat die Gesamtheit der entstehenden „Kommutatoren“  $[A, B] = AB - BA$  im Falle unendlicher Dimension von  $\mathfrak{H}$  wesentlich andere Eigenschaften als im Fall endlicher Dimension. Während im endlichen Falle die Kommutatoren stets einen linearen echten Teilraum von  $\mathfrak{H}$  aufspannen und eine Summe von „Selbstkommutatoren“ der Gestalt  $[A, A^*]$  nie definit ist, läßt sich bei beliebiger unendlicher Dimension von  $\mathfrak{H}$  (1) jeder beschränkte Operator von  $\mathfrak{H}$  als Summe von vier geeigneten Kommutatoren, (2) jeder Hermitesche Operator als Summe von zwei Selbstkommutatoren darstellen, und (3) ist jeder Hermitesche Operator der reelle (Hermitesche) Teil eines passenden Kommutators. Der Beweis von (1) und (3) beruht auf (2), der von (2) auf dem Verhalten des Selbstkommutators von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$
 Aus (1) folgt, daß man für die beschränkten Operatoren  $A$

eines Hilbertschen Raumes unendlicher Dimension keine „Spur“  $t(A)$  mit den Eigenschaften  $t(A + B) = t(A) + t(B)$ ,  $t(AB) = t(BA)$  definieren kann, außer  $t(A) \equiv 0$ ; und aus (3) folgt, daß (im Gegensatz zum Fall endlicher Dimension) der Wertevorrat  $(x, Cx)$  eines Kommutators  $C$  ( $x \in \mathfrak{H}$ ,  $|x|^2 = (x, x) = 1$ ) durchaus einen positiven Abstand von 0 besitzen kann.

H. Wielandt.

**Visser, C. and A. C. Zaanen: On the eigenvalues of compact linear transformations.** Indagationes math. 14, 71—78 = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 71—78 (1952).

Soient  $a_1 \geq a_2 \geq \dots$  les valeurs propres d'un opérateur hermitien non négatif  $A$  d'un espace de Hilbert; les  $AA$  montrent tout d'abord que le produit  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$  est le maximum de  $\det.(A y_i, y_j) / \det.(y_i, y_j)$ , où  $y_1, \dots, y_k$  est un système libre arbitraire de  $k$  vecteurs (résultat aussi substantiellement obtenu par Ky-Fan, ce Zbl. 41, 6); à l'aide d'un lemme de Pólya ils en déduisent le théorème

suivant de S. H. Chang: Si  $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots$  sont les valeurs propres de  $B^* B$ ,  $B$  étant un produit de  $p$  opérateurs complètement continus, alors  $\sum \beta_i^{2/p} < \infty$ . Ils obtiennent ensuite des inégalités relatives aux valeurs propres de produits d'opérateurs complètement continus et d'opérateurs bornés, par exemple: Si  $A$  est complètement continu non négatif de valeurs propres  $a_1 \geq a_2 \geq \dots$ , et si  $B$  est borné de borne  $\leq 1$ , les valeurs propres  $c_i$ , ( $|c_i| \geq |c_{i+1}|$ ) de  $B \cdot A$  vérifient  $\prod_1^k |c_i| \leq \prod_1^k a_i$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Il en résulte une généralisation d'un théorème de Garbe [Math. Ann. 76, 527—547 (1915)] sur certaines équations intégrales.

A. Borel.

Salechov, G. S.: Anwendung der Kettenbruchmethode auf die Lösung von quadratischen Operatorgleichungen und Funktionalgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 201—204 (1952) [Russisch].

Sei  $X$  ein normierter Raum,  $H$  und  $L$  lineare stetige Operatoren aus  $(X \rightarrow X)$ . Satz 1: Die Gleichung  $H L^2 - L = J$  (Einheitsoperator) hat im Falle  $\|H\| = q \leq \frac{1}{4}$  in  $\|L\| < (1 - \sqrt{1 - 4q})/2q$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $L^*$ . — Man gelangt zu  $L^*$ , indem man die Gleichungen  $H L_n L_{n+1} - L_{n+1} = J$ , beginnend mit  $L_0 = 0$ , sukzessive nach  $L_{n+1}$  auflöst (etwa — Satz 2 — durch  $L_{n+1} = Q_{n+1} Q_n$  mit  $Q_{-1} = Q_0 = J$ ,  $Q_{n+1} = Q_n + H Q_{n-1}$ ).  $L_n$  konvergiert der Norm nach gegen  $L^*$ . Für die Konvergenzgüte wird eine Abschätzung angegeben, wobei ein Satz von Slešinskij über Kettenbrüche [Zapiski mat. Otdelenija, Novorossijskij Obščestvo estestv., Odessa 10, 201—256 (1890)] Verwendung findet. — Ähnlich löst man — Satz 3 — Gleichungen der Form  $x = H x^2 + y$ , wo  $x$  ein unbekanntes Element eines normierten Ringes ist. Anwendungen auf Integralgleichungen. — Man vgl. auch die Arbeiten von Kantorovič über das Newtonverfahren, z. B. dies. Zbl. 43, 119.

K. Zeller.

Wolf, František: Analytic perturbation of operators in Banach spaces. Math. Ann. 124, 317—333 (1952).

This is a continuation of the papers on perturbation theory by F. Rellich and the reviewer, especially of the paper: Béla Sz.-Nagy, this Zbl. 35, 200. It considers the analytic perturbation of linear transformations of a Banach space  $\mathfrak{B}$  in itself and it was written without acquaintance with the reviewer's recent paper on the same subject: Béla Sz.-Nagy, Acta Sci. math., Szeged 14, 125—137 (1951). The main tool is, like in the cited paper, the contour integration of the resolvent. The main result reads as follows: Let  $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots + \varepsilon^N A_N + \dots$  be a bounded linear transformation of  $\mathfrak{B}$  depending on the complex parameter  $\varepsilon$  in a neighbourhood of  $\varepsilon = 0$  (an „analytic function“ of  $\varepsilon$ ). Let  $E(\varepsilon)$  be an idempotent bounded linear transformation of  $\varepsilon$ , depending also analytically on  $\varepsilon$  and such that  $A(\varepsilon) E(\varepsilon) = E(\varepsilon) A(\varepsilon)$ . Denoting by  $\mathfrak{M}_0$  the range of  $E(\varepsilon)$ , suppose that, in  $\mathfrak{M}_0$ , the coefficients  $A_0, \dots, A_{N-1}$  are all scalar multiples of the identity, i. e., for  $f \in \mathfrak{M}_0$ ,  $A_k f = \mu_k f$  ( $k = 0, \dots, N-1$ ), and suppose that the spectrum of  $E(0) A_N$ , when considered as a transformation of  $\mathfrak{M}_0$  in itself, splits off into the mutually disconnected sets  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ . Then there exist idempotent linear transformations  $F_k(\varepsilon)$  ( $k = 1, \dots, m$ ), analytic in a neighborhood of  $\varepsilon = 0$ , and such that a) the subspaces  $\mathfrak{N}_k(\varepsilon) = F_k(\varepsilon) \mathfrak{B}$  reduce  $A(\varepsilon)$ , b) for every sufficiently small open set  $S$  containing  $\sigma_k$  there is a  $\delta > 0$  such that, for  $|\varepsilon| < \delta$ , a point  $\mu$  of the spectrum of  $A(\varepsilon)$  belongs to the spectrum of  $A(\varepsilon)$ , when considered in  $\mathfrak{N}_k$ , if and only if  $\left( \mu - \sum_{l=0}^{N-1} \varepsilon^l \mu_l \right) \varepsilon^{-N} \in S$ . From this result, Rellich's theorem on the analytic perturbation of selfadjoint transformations may easily be derived, at least if the transformations are bounded.

B. Sz.-Nagy.

Levinson, Norman: The  $L$ -closure of eigenfunctions associated with self-adjoint boundary value problems. Duke math. J. 19, 23—26 (1952).

Es sei  $L(x) = \sum_{v=0}^n p_v(t) \cdot x^{(n-v)}$  ein linearer Differentialausdruck für  $x(t)$  mit in  $a \leq t \leq b$  stetigen komplexwertigen Funktionen  $p_v(t)$  und  $p_0(t) \neq 0$ ; ferner sei  $U_i(x) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} x^{(j-1)}(a) + b_{ij} x^{(j-1)}(a))$  mit Konstanten  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$ ; die Eigenwertaufgabe  $L(x) = \lambda x$ ;  $U_i(x) = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sei selbstadjungiert. Nun sei  $f(t)$  eine Funktion des Raumes  $L$  aller Lebesgue-integrablen Funktionen. Dann gilt: Ist  $f$  orthogonal zu allen Eigenfunktionen, so verschwindet  $f(t)$  fast überall in  $a \leq t \leq b$ . In diesem Satz ist natürlich die Existenz von Eigenwerten und zugleich einer unendlichen Anzahl von ihnen enthalten. Der Beweis wird erbracht, indem die Lösung  $x(t, \lambda)$  von  $L(x) - \lambda x = f$ ,  $U_i(x) = 0$  funktionentheoretisch bezüglich ihrer möglichen Polstellen in der  $\lambda$ -Ebene untersucht wird.

*L. Collatz.*

**Ferretti, Bruno:** Su di una classe di equazioni operatoriali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 473—476 (1952).

This note is concerned with an existence theorem for the differential equation  $dA/d\lambda = F(A, \lambda)$  when  $A$  and  $F(A, \lambda)$  are bounded Hermitian operators in Hilbert space, and  $\lambda$  is a real variable. The theorem is essentially the following: Suppose that  $A$  lies in a Banach space,  $\|A\|$  being defined in the usual way, and that a neighbourhood  $N$  of a point  $(A_0, \lambda_0)$  exists such that (i)  $F(A, \lambda)$  is uniformly bounded in  $N$ , (ii) when  $A$  is a differentiable function of  $\lambda$  and  $(A, \lambda) \in N$ ,  $F(A, \lambda)$  is an integrable function of  $\lambda$ , (iii) a positive constant  $M$  exists such that

$$\|F(A_1, \lambda) - F(A_2, \lambda)\| < M \|A_1 - A_2\|$$

when  $(A_1, \lambda) \in N$  and  $(A_2, \lambda) \in N$ . Then a neighbourhood of  $\lambda_0$  exists in which the differential equation has a solution  $A$  taking the value  $A_0$  at  $\lambda_0$ . — The proof is the usual one, by successive approximation. Applications of the theorem to quantum mechanics are referred to.

*J. D. Weston.*

**Davis, Philip:** On the applicability of linear differential operators of infinite order to functions of class  $L^2(B)$ . Amer. J. Math. 74, 475—491 (1952).

Sia  $L^2(B)$  la classe delle funzioni  $f(z)$ , (ove  $z = x + iy$ ), per le quali esiste finito l'integrale  $\iint_B |f(z)|^2 dx dy$ . Sia  $p_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^k$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), la successione completa dei polinomi ortogonali e normali, per i quali è  $a_{nn} \neq 0$  e la parte reale di  $a_{nn}$  è non negativa, i cui coefficienti sono determinati con il procedimento di Gram-Schmidt; e si consideri lo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $f(z)$  [appartenente a  $L^2(B)$ ]  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n p_n(z)$ , ove  $\alpha_n = \iint_B f(z) \bar{p}_n(z) dx dy$  e  $\bar{p}_n(z)$  è la funzione complessa coniugata di  $p_n(z)$ . — L'operatore differenziale lineare  $L(d) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n d^n$  (ove con il simbolo  $d^n$  viene indicata la derivata di ordine  $n$  calcolata nell'origine) è detto applicabile-( $B$ ) alla funzione  $f(z)$ , se e soltanto se è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^n \beta_k p_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^n a_{nk} \beta_k k!$$

Tra i risultati raggiunti dall'A. riportiamo i seguenti: I) L'operatore  $L(d)$  è applicabile-( $B$ ) a tutte le funzioni della classe  $L^2(B)$ , se e soltanto se è

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^n a_{nk} \beta_k k! \right\|^2 < \infty.$$

In questo caso l'operatore è limitato. — II. Ogni funzionale lineare limitato, definito nella classe  $L^2(B)$ , può essere rappresentato come un operatore differenziale lineare di ordine infinito e della classe  $E^2(B)$ , ove con  $E^2(B)$  si intende la classe delle serie di potenze  $L(z)$ , i cui coefficienti  $\{\beta_n\}$  soddisfano alla (1). — III.  $g(z)$  appartiene a



$E^2(B)$ , se e soltanto se è  $g(z) = \iint_B e^{zw} f(w) dw$ , ove  $w = u + iv$ , e  $f(z)$  appartiene a  $L^2(B)$ . — Rinviamo al lavoro in esame per le condizioni relative alla distribuzione dei numeri complessi  $\lambda_n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), affinchè l'insieme  $\{e^{\lambda_n z}\}$  sia completo in  $L^2(B)$  e per altre applicazioni alle funzioni intere di tipo esponenziale.

S. Cinquini.

Najmark, M. A.: Über den Defektindex von linearen Differentialoperatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 517—520 (1952) [Russisch].

A la suite d'un travail de I. Glazman (ce Zbl. 40, 61), l'A. se propose d'établir des critères permettant de déterminer l'indice de défaut [nombre  $m$  de solutions linéairement indépendantes d'une équation  $l(\psi) = \lambda \psi$  sur  $(0, \infty)$ ] pour des opérateurs linéaires d'ordre  $2n$ , critères reposant sur la considération du comportement asymptotique des coefficients de l'opérateur. Il indique ainsi, sans démonstration, certains cas où l'on peut conclure que  $m = n$  ou que  $m = n + 1$ . Ch. Blanc.

Vermes, P.: Note on certain differential equations of infinite order. Indagationes math. 14, 28—31 = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 28—31 (1952).

$A(x) = \sum a_n x^n$  ( $a_n$  komplexe Zahlen) sei in einer Umgebung des Nullpunktes regulär.  $D$  bedeutet den Operator  $d/dz$ . Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit Differentialgleichungen unendlicher Ordnung der Form  $A(D)f(z) = g(z)$ . Solche Differentialgleichungen wurden bereits von anderen Autoren behandelt; grundlegend waren insbesondere die Untersuchungen von Muggli (dies. Zbl. 19, 346). Verf. gibt eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit einer solchen Differentialgleichung und eine explizite Darstellung der Lösungsfunktion an. An zwei Beispielen wird gezeigt, daß durch dieses Resultat einerseits und durch die Mugglischen Ergebnisse andererseits verschiedene Fälle erfaßt werden. — Besitzt die Reihe  $A(x)$  im Nullpunkt eine

$p$ -fache Nullstelle, gilt also  $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} x^{n+p}$  ( $a_p \neq 0$ ), so sei  $B(x) = x^p/A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ .

Verf bezeichnet dann für eine feste positive Zahl  $t$  mit  $\theta(t)$  die Klasse aller derjenigen Operatoren  $A(D)$ , deren zugehörige Reihen  $A(x)$  und  $B(x)$  an der Stelle  $x = t$  absolut konvergent sind. Weiter bedeutet in der Arbeit  $\Phi(t)$  die Klasse aller derjenigen ganzen Funktionen  $f(z) = \sum f_k z^k$ , für die die Ausdrücke  $|k! f_k/t^k|$  beschränkt sind. Der Satz lautet: Gehört  $A(D)$  der Klasse  $\theta(t)$  an, so ist  $A(D)$  auf alle  $f(z) \in \Phi(t)$  anwendbar, und  $A(D)f(z)$  gehört wieder zu  $\Phi(t)$ . Für  $g(z) \in \Phi(t)$  besitzt die Gleichung  $A(D)f(z) = g(z)$  eine Lösung  $f(z) = \sum f_k z^k$  in  $\Phi(t)$ , und es

ist  $f_{k+p} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j g_{k+j} (k+j)!/(k+p)!$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), während die Koeffizienten  $f_0, \dots, f_{p-1}$

beliebig sind. Der Beweis wird mit Hilfe unendlicher Matrizen geführt. Für das Rechnen mit solchen Matrizen werden zwei Hilfssätze bewiesen. H.-J. Kowalsky.

● Halperin, Israel: Introduction to the theory of distributions. Based on the lectures given by Laurent Schwartz. (Canadian Mathematical Congress, Lecture Series, No. 1). Toronto: University of Toronto Press 1952. 35 p. \$ 2.—

Eine freie Wiedergabe von einführenden Vorlesungen, die L. Schwartz 1949 über die Theorie der Distributionen gehalten hat, unter Vermeidung der in der allgemeinen Theorie nötigen tieferen topologischen und funktionalanalytischen Hilfsmittel, möglichst in Ausdrücken der klassischen Analysis. Es werden aus der Distributionstheorie folgende Gegenstände behandelt: Punktfunktionen als Funktionale, das Rechnen mit Distributionen, Multiplikation, die Ordnung einer Distribution, Stetigkeits- und Konvergenzeigenschaften, Nullitätsmengen und Trägermengen, Differentialgleichungen für Distributionen, Distributionen in mehreren Variablen, die Faltung, die Fourierreihe für Distributionen. G. Doetsch.

Gross, B. and H. Pelzer: Relations between delta functions. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 210, 434—437 (1952).

Aus physikalischen Erwägungen wird ohne Anspruch auf mathematische Begründung folgende Beziehung zwischen zwei Diracschen  $\delta$ -Funktionen  $\delta(x-a)$  und  $\delta(x-b)$  abgeleitet:

$$\delta(x-b) = \frac{a}{b} \frac{\delta(x-a)}{\left[1 + (a/b-1) \int_0^\infty \delta(\sigma-a) d\sigma/(1-\sigma/x)\right]^2 + \pi^2 x^2 (a/b-1)^2 \{\delta(x-a)\}^2}.$$

G. Doetsch.

Hines, Jerome: Foundations of operator mathematics. Math. Mag. 25, 251—261 (1952).

## Praktische Analysis:

• Delone (Delaunay), B. N.: Kurzer Lehrgang über mathematische Maschinen. Teil I: Kleine Rechenmaschinen und mathematische Geräte. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 135 S. R. 4,50 [Russisch].

Das kleine Lehrbuch, dessen erster Teil hiermit vorliegt, ist aus Vorlesungen des Verf. an der Moskauer Universität hervorgegangen. Der in Vorbereitung befindliche zweite Teil bleibt den Rechenautomaten vorbehalten. Verf. beschränkt sich im wesentlichen darauf, nur die z. Z. hergestellten und häufigst verwendeten Maschinen und Instrumente, diese dafür sehr ausführlich, leicht faßlich und mit vielen Abbildungen und kurzen historischen Bemerkungen darzustellen. Somit ist das Buch als einführendes Lehrbuch besonders geeignet. Im einzelnen sei der Inhalt kurz angeführt: Sprossenradmaschine „Felix“ (mit Handantrieb), „Mercedes-Euklid“-Vollautomat, Polarplanimeter, Linearplanimeter, Präzisionsplanimeter, Linearpotenzplanimeter, Potenzplanimeter mit Schleifkurbeltrieb, Integriermeter, Harmonische Analysatoren (Maxwell und Mader-Ott), Integrappen (Abdank-Coradi und Adler-Ott), sowie die Beschreibung eines modernen Differentialanalysators mit Anwendungsbeispielen. Aus der Darstellung und den Abbildungen des letzteren geht hervor, daß es sich um die neue Bushsche Maschine handelt, obwohl dies nicht besonders erwähnt wird.

H. Adler.

Collatz, L.: Einschließungssätze bei Iteration und Relaxation. Z. angew. Math. Mech. 32, 76—84 (1952).

Sei  $\xi_1, \dots, \xi_n$  eine Lösung eines Systems von  $n$  Gleichungen in  $n$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$ . Durch einen Iterationsprozeß oder ein andersartiges Verfahren werde die Näherungsfolge  $x_k^{(m)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $m = 1, 2, \dots$ ) berechnet. Verf. bemerkt, daß in praktisch vorkommenden Fällen sich zuweilen bei einem Schritt von  $m$  zu  $m + 1$  alle  $n$  Werte  $x_k$  im gleichen Sinne ändern, d. h. daß die Änderungen  $x_k^{(m+1)} - x_k^{(m)}$  alle gleiches Vorzeichen haben, oder daß unter dieser Voraussetzung auch die Abweichungen  $\xi_k - x_k^{(m+1)}$  alle dasselbe Vorzeichen haben, was dann im Falle der Näherung von zwei Seiten die praktisch bequeme Einschließung der Unbekannten  $\xi_k$  ermöglicht. Durch ein einfaches Beispiel eines linearen Gleichungssystems wird gezeigt, daß im allgemeinen keine dieser Möglichkeiten besteht. So erhebt sich die Frage nach hinreichenden Bedingungen. Im Falle eines für die Anwendung der „Iteration in Gesamtschritten auf die Form  $g_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$  gebrachten Gleichungssystems genügt es, wenn abgesehen von der bekannten Konvergenzbedingung für das Verfahren, die partiellen Ableitungen  $\partial g_k / \partial x_j \geq 0$  ausfallen. Als Beispiel wird die an sich geschlossen lösbare Randwertaufgabe  $y'' + e^y = 0$ ,  $y(0) = y(1) = 0$  mit einer Unterteilung der Einheitsstrecke in vier gleichlange Teilintervalle in eine Differenzengleichung verwandelt und das entsprechende finite Gleichungssystem approximativ gelöst. — Im Falle eines linearen Gleichungssystems  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{r}$  wird die Diskussion direkt geführt; unter Benutzung der üblichen Aufspaltung  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{B} = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ , ergibt sich: Sind die  $a_{ii} > 0$  und  $a_{ij} \leq 0$  ( $i \neq j$ ), so ist das Iterationsverfahren konvergent, Änderungen und Abweichungen haben konstantes Vorzeichen und Einschließung ist möglich. — Es folgen Andeutungen bezüglich Anwendung bei Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen sowie ein Beispiel der Fehlerabschätzung bei Anwendung von Relaxation auf die Randwertaufgabe der stationären Temperaturverteilung in einem Rechteck bei linearem Anstieg an drei Randgeraden und Isolation längs der vierten.

H. Schwerdtfeger.

Unger, H.: Zur Auflösung umfangreicher linearer Gleichungssysteme. Z. angew. Math. Mech. 32, 1—9 (1952).

Verf. zeigt, wie man das System linearer Gleichungen  $\mathfrak{A} \mathfrak{x} = \mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  ( $i, k = 1, 2, \dots, n$ ) durch Aufspaltung in  $\sum_{r=1}^p \mathfrak{A}_{lr}^{(1)} \mathfrak{x}_r = \mathfrak{a}_l^{(1)}$ ,  $l = 1, 2, \dots, p$ ,  $\mathfrak{A}_{lr}^{(1)}$  quadratische Matrix mit  $\sigma_l$  Spalten und Zeilen,  $\mathfrak{A}_{lr}^{(1)}$  Matrix mit  $\sigma_l$  Zeilen und  $\sigma_r$  Spalten,  $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_p = n$ , durch Berechnung der Matrizen  $\mathfrak{A}_{lr}^{(2)} = \mathfrak{A}_{lr}^{(1)} - \mathfrak{A}_{l1}^{(1)} \mathfrak{A}_{11}^{(1)-1} \mathfrak{A}_{1r}^{(1)}$ , usw. [was mittels Dreiecksmatrizen bequem gemacht

werden kann], zurückführt auf Systeme von Gleichungen, in denen verschiedene Gruppen von Unbekannten eliminiert worden sind. Er bemerkt, daß zwar die Zahl der notwendigen Multiplikationen [die er abschätzt] größer wird als normal, daß aber für Systeme mit sehr großem  $n$  eine wesentliche Herabsetzung der Arbeitszeit herbeigeführt wird, indem man die durch teilweise Elimination der Unbekannten erhaltenen Gleichungen an mehrere Rechner übermitteln kann. *E. M. Bruins.*

**Mitrović, Dusan, Roger Huron et Rajko Tomović:** Sur un principe nouveau de construction des machines servant à résoudre les systèmes d'équations linéaires par analogie électrique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 589—591 (1952).

Zur Lösung eines linearen inhomogenen Gleichungssystems werden die Koeffizienten  $a_{ik}$  und  $b_i$  der Matrix durch Ohmsche Leitwerte dargestellt. Das entsprechende Netzwerk enthält außer den Widerständen  $1/a_{ik}$   $n+1$  Spannungsquellen sowie  $n+1$  Potentiometer für die  $n+1$  Spalten der Matrix. Gewisse Ströme sollen für jede einzelne Spalte durch die Potentiometer auf Null abgeglichen werden. Sodann werden iterativ nach Gauß die Spannungen  $\pm V_k$  (für die Spalten des homogenen Anteils) und  $u$  (für die inhomogene Spalte) solange verändert, bis eine weitere Kompensation von Strömen eintritt, die aus der Verkoppelung der Spalten entstehen. Die Resultate  $x_k$  sollen als Quotienten  $V_k/u$  erscheinen. — Zu den in der Dimension von Strömen gehaltenen Bestimmungsgleichungen wird ein verständliches Schaltbild wiedergegeben. Es bleibt zu hoffen, daß die angekündigte ausführlichere Beschreibung in Ann. Fac. Sci. Toulouse, IV. Sér. **16** (1952) die erforderliche Aufklärung bringen wird. *H. Wundt.*

**Fox, L.:** Escalator methods for latent roots. Quart. J. Mech. appl. Math. **5**, 178—190 (1952).

Verf. will das von Morris angegebene Escalator-Verfahren (dies. Zbl. **29**, 148 u. **30**, 163) mit Hilfe des Matrizenkalküls übersichtlich herleiten. — Für das Eigenwertproblem  $(A - B\lambda)\xi = 0$  mit den reellen quadratischen Matrizen  $A$  und  $B$   $n$ -ter Ordnung erhält man die charakteristischen Zahlen als Wurzeln der Determinantengleichung  $|A - B\lambda| = 0$ . Verf. führt nun Untermatrizen ein:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{(1)} \\ \xi_{(2)} \end{pmatrix},$$

wobei  $A_{11}$  und  $B_{11}$  quadratische Matrizen  $m$ -ter und  $A_{22}$  und  $B_{22}$  solche  $p$ -ter Ordnung sind;  $m+p=n$ . Auch für das transponierte Problem  $(A' - B'\lambda)\eta = 0$  gilt die entsprechende Unterteilung. Es wird vorausgesetzt, daß für die beiden Eigenwertprobleme  $(A_{11} - B_{11}\mu)x = 0$  und  $(A'_{11} - B'_{11}\mu)y = 0$  die charakteristischen Zahlen und Eigenvektoren (normiert)  $\mu_r, x_r, y_r$  ( $r=1, \dots, m$ ) bekannt seien. Setzt man noch  $(A_{21} - \lambda B_{21})x_r = u_r$  und  $(A'_{12} - \lambda B'_{12})y_r = v_r$ , so gilt für das Ausgangsproblem:

$$(*) \quad \left[ \sum_{r=1}^m \frac{u_r v'_r}{\lambda - \mu_r} + (A_{22} - \lambda B_{22}) \right] \xi_{(2)} = 0 \quad \text{und} \quad \left[ \sum_{r=1}^m \frac{v_r u'_r}{\lambda - \mu_r} + (A'_{22} - \lambda B'_{22}) \right] \eta_{(2)} = 0.$$

Die Klammern enthalten Matrizen  $p$ -ter Ordnung und jede ist die transponierte der anderen.

Für die restlichen Teile der Eigenvektoren gilt:  $\xi_{(1)} = \sum_{r=1}^m \frac{x_r v'_r}{\lambda - \mu_r} \xi_{(2)}$ ,  $\eta_{(1)} = \sum_{r=1}^m \frac{y_r u'_r}{\lambda - \mu_r} \eta_{(2)}$ .

Die Matrizen in (\*) sind Funktionen von  $\lambda$ , also ist  $F(\lambda) \xi_{(2)} = 0$ ,  $F'(\lambda) \eta_{(2)} = 0$ . Damit die neuen

Vektoren normiert sind, müssen sie den Bedingungen  $\eta'_{(2)} \left[ \frac{d}{d\lambda} F(\lambda) \right] \xi_{(2)} = \xi'_{(2)} \left[ \frac{d}{d\lambda} F'(\lambda) \right] \eta_{(2)} = -1$

genügen. — Dieses „vorwärtsschreitende“ Escalator-Verfahren ist geeignet, um in Schritten von der Länge  $p$  die charakteristischen Zahlen und Eigenwerte umfangreicher Matrizen  $n$ -ter Ordnung zu berechnen. Beim Übergang von einer Untermatrix  $m$ -ter Ordnung zu einer  $(m+p)$ -ter Ordnung, erhält man die charakteristischen Zahlen dadurch, daß eine Determinante von nur  $p$ -ter Ordnung verschwinden muß. Ein „rückwärtsschreitendes“ Escalatorverfahren verläuft ähnlich, es gestattet, aus den charakteristischen Zahlen und Eigenvektoren der gesamten Matrix die einer Untermatrix zu berechnen. Als Sonderfälle werden symmetrische Matrizen und das Eigenwertproblem  $(A - \lambda I)\xi = 0$  behandelt. *R. Ludwig.*

**Voetter, Heinz:** Über die numerische Berechnung der Eigenwerte von Säkulargleichungen. Z. angew. Math. Phys. **3**, 314—316 (1952).

Zur Ermittlung der Eigenwerte einer  $n$ -reihigen, nicht notwendig symmetrischen Säkular-determinante muß diese normalerweise in die entwickelte, d. h. Polynomform gebracht werden. Dies ist wegen der Berechnung von Unterdeterminanten eine mühsame Angelegenheit. Der Autor gibt eine Methode — die er „Triangulierung“ nennt —, wobei durch Multiplizieren der Zeilen mit geeigneten Faktoren und



anschließende Addition die Größen links unter der Hauptdiagonale Schritt für Schritt zu Null gemacht werden. Das gesuchte Polynom erscheint nach  $n$  Schritten in der rechten unteren Ecke. Das Verfahren gestattet eine einfache Probe auf Rechenfehler und kann ohne Zwischennotizen mit einer normalen Rechenmaschine bewältigt werden.

H. Wundt.

**Temple, G.:** The accuracy of Rayleigh's method of calculating the natural frequencies of vibrating systems. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 211, 204—224 (1952).

Es werden spezielle Eigenwertaufgaben  $\sum U_{rs} u_s = \lambda u_r$  und allgemeine Aufgaben  $\sum V_{rs} u_s = \lambda \sum T_{rs} u_s$  mit reellen symmetrischen positiv definiten Matrizen  $U_{rs}$ ,  $V_{rs}$ ,  $T_{rs}$  betrachtet.  $\lambda$  ist Eigenwert,  $u_s$  Eigenvektor. Ein bei den speziellen Aufgaben bekannter (beim Verf. nach Kato 1949 benannter, schon bei H. Wieland, z. B. Fiat Review German Sci. 1939—1946, Bd. 2, S. 97 angegebener) Einschließungssatz wird auf die allgemeinen Aufgaben übertragen. Bei den speziellen Aufgaben heißt er:  $w$  sei ein Näherungsvektor für einen Eigenvektor  $u_s$  und  $\varrho = (w, U w)/(w, w)$ , wobei die Klammern in üblicher Weise innere Produkte bezeichnen; es sei  $\alpha, \beta$  ein Intervall, welches im Innern die Zahl  $\varrho$ , aber keinen Eigenwert enthält; dann ist  $(\beta - \varrho)(\varrho - \alpha) \leq \varepsilon^2$  mit  $\varepsilon^2 = (R, R)(w, w)$  und  $R = U w - \varrho w$ . Bei den allgemeinen Aufgaben lassen sich mehrere Verallgemeinerungen angeben. Eine erste Form verlangt die Auflösung eines linearen Gleichungssystems (es tritt  $T^{-1}$  oder  $V^{-1}$  auf): Man bildet  $\varrho(w, T w) = (w, V w)$ ,  $R = V w - \varrho T w$ ,  $\varepsilon_T^2 = (R, T^{-1} R)/(w, T w)$ ;  $\varepsilon_V^2 = (R, T^{-1} R)/(w, V w)$ ; dann gilt  $(\beta - \varrho)(\varrho - \alpha) \leq \varepsilon_T^2$ ,  $(1 - \varrho/\beta)(\varrho/\alpha - 1) - \varepsilon_V^2$ , für numerische Zwecke kann man  $\varepsilon_T^2$  oder  $\varepsilon_V^2$  verwenden. Eine andere Form verlangt nicht die Auflösung eines Gleichungssystems, liefert aber dafür oft größere Schranken; man bildet dabei  $\eta = (T w, V w)/(T w, T w)$ ;  $S = V w - \eta T w$ ,  $\varepsilon_0^2 = (S, S)/(T w, T w)$ ; dann gilt  $(\beta - \eta)(\eta - \alpha) \leq \varepsilon_0^2$ . Die Anwendung erfolgt z. B. in der Weise, daß man als  $\alpha$  einen Eigenwert und als  $\beta$  eine grobe untere Schranke für den nächsten Eigenwert oder als  $\beta$  einen Eigenwert und als  $\alpha$  eine entsprechende obere Schranke für den nächstkleineren Eigenwert verwendet (ähnlich wie bei O. Lehmann, dies. Zbl. 34, 379). Die Ausdehnung auf kontinuierliche Systeme wird an Hand des Beispiels  $a y^{IV} + \lambda y'' = 0$ ;  $y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0$  erläutert.

L. Collatz.

**Peltier, Jean:** Résolution numérique complète d'une équation algébrique quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 399—401 (1952).

Für die zu lösende Gleichung  $n$ -ten Grades wird — bei ungeradem  $n$  nach Multiplikation der Gl. mit  $x$  — ein Produktansatz quadratischer Faktoren  $x^2 - S_j x + P_j$  gemacht, was auf  $n$  Gleichungen für die  $n$  reellen Unbekannten  $S_j$ ,  $P_j$  führt. Diese Gleichungen lassen sich näherungsweise nach dem Newton-Verfahren lösen, ausgehend von Näherungswerten für  $S_j$ ,  $P_j$ . Die für  $P_j$  verschafft man sich aus einem Graeffe-Prozeß. Im Falle von Wurzeln gleichen Betrages wird mit Hilfe einer Resultantengleichung eine algebraische Gleichung für die  $S_j$  aufgestellt, die man wiederum durch Graeffe-Prozeß und Resultantengleichung zu bearbeiten hat.

R. Zurmühl.

**Brooker, R. A.:** The solution of algebraic equations on the EDSAC. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 255—270 (1952).

Verf. behandelt die Verwendung der EDSAC zur Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen  $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z) = 0$  nach drei verschiedenen Methoden, 1. nach der von Lagrange modifizierten Methode von Bernoulli, die aber nur für die größte und kleinste Wurzel vorteilhaft ist, wenn diese einfach sind. 2. nach der Methode von Graeffe und 3. nach der Methode der Minimalisierung der Größe  $\sqrt{\varphi(z)^2 + \psi(z)^2}$ , sowohl durch Einzelschritte parallel zu den Koordinatenachsen, wie durch Schritte in Richtung des stärksten Gefälles, ein Verfahren, das als Sonderfall das von Newton-Raphson enthält. Die Rechnungsgänge werden im einzelnen entwickelt und dabei auf die Vorteile der halblogarithmischen Darstellung der Zahlen (floating decimal) insbesondere beim Graeffeschen Verfahren hingewiesen. Als Beispiel werden die Wurzeln einer algebraischen Gleichung achtzehnten Grades zunächst nach dem dritten, dann nach den zweiten Verfahren berechnet, weiter die einer Gleichung siebenten Grades nach dem Verfahren von Graeffe, wobei

besonders auf die Berechnung der Wurzeln aus ihren Potenzen eingegangen wird, und schließlich die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades mit komplexen Koeffizienten nach der Methode von Newton-Raphson. *F.-A. Willers.*

**Wenzl, F.:** Iterationsverfahren zur Berechnung komplexer Nullstellen von Gleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 85—87 (1952).

Ein vom Ref. (dies. Zbl. **37**, 209) für algebraische Gleichungen angegebenes Iterationsverfahren erweitert Verf. auf beliebige (nicht notwendig algebraische) Gleichungen und auf Gleichungssysteme mit mehr als einer Unbekannten und vereinfacht zugleich den Konvergenzbeweis. Eine Gleichung  $F(z) = 0$  wird mit  $\varphi(z) = z^m - F(z)$  in der Gestalt  $z^{m+r} = \varphi(z) z^r$  geschrieben und für sie mit  $\Phi(z) = [\varphi(z) z^r]^{1/(m+r)}$  das Iterationsverfahren  $z_{v+1} = \Phi(z_v)$  aufgestellt. Ist  $z = \zeta$  eine einfache von Null verschiedene Wurzel von  $F(z) = 0$ , so gibt es zu jedem  $m$  immer solche Werte von  $r$ , für die das Iterationsverfahren unter Voraussetzung eines genügend guten Anfangswertes konvergiert. Zwei Gleichungen  $F(x, y) = 0$ ,  $G(x, y) = 0$  für zwei Unbekannte  $x, y$  werden mit

$$\varphi(x, y) = x^m y^n - F(x, y), \quad \psi(x, y) = x^r y^s - G(x, y)$$

in der Form geschrieben.

$$x^{m+\mu} y^{n+\nu} = \varphi(x, y) x^\mu y^\nu, \quad x^{r+\epsilon} y^{s+\sigma} = \psi(x, y) x^\epsilon y^\sigma.$$

Das zugehörige Iterationsverfahren (rechts  $x_v, y_v$ , links  $x_{v+1}, y_{v+1}$  statt  $x, y$  geschrieben) konvergiert bei passender Wahl von  $\mu, \nu, \epsilon, \sigma$  bei genügend guten Anfangswerten für die als „einfach“ vorausgesetzte Lösung  $\xi, \eta$ . Dabei sei  $\xi \eta \neq 0$  und  $F_x G_y - F_y G_x \neq 0$ . Zahlenbeispiele:  $z^5 - 4iz^2 - 3e^z = 0$  und ein System algebraischer Gleichungen. *L. Collatz.*

**Salachov, G. S.:** Über die Konvergenz des Prozesses der berührenden Hyperbeln. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **82**, 525—528 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtet die durch

$$x_{n+1} = x_n - [2 P(x_n) P'(x_n)] / [2 P'^2(x_n) - P(x_n) P''(x_n)]$$

definierte Iteration, die eine gegen eine einfache Wurzel  $\zeta$  von  $P(x) = 0$  konvergente Folge liefert, sobald  $x_0$  nahe bei jener Wurzel liegt. Die Formel ist ein Spezialfall einer sehr allgemeinen von E. Schroeder [Math. Ann. **2**, 327 (1870)] aufgestellten Formel für Iterationen mit kubischer Konvergenz. Verf. nimmt an, daß in der Umgebung  $|x - x_0| < 2\eta_0$  von  $x_0$  obere Schranken von  $|1/P'(x)|$ ,  $|P''(x)|$ ,  $|P'''(x)|$  und  $|[2 P(x) P'(x)] / [2 P'^2(x) - P(x) P''(x)]|$  bzw. durch  $B_0, M, N, \eta_0$  gegeben sind, wobei zwischen diesen Größen gewisse Ungleichungen gelten. Daraus folgt die Existenz einer einfachen Wurzel  $\zeta$  in jener Umgebung, gegen die die Folge  $x_n$  konvergiert, eine explizite Abschätzung für  $\zeta - x_n$ , die den kubischen Charakter der Konvergenz zum Ausdruck bringt, sowie die Nichtexistenz einer weiteren Wurzel in der Umgebung  $|x - x_0| < \eta_0 \sqrt{2}$ . *A. Ostrowski.*

**Michel, J. G. L.:** Direct calculation of smooth gunnery range tables. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 124—128 (1952).

A technique is developed for inverting non-linear functions of two variables by using the linear relations between their derivatives. (Autoreferat.) *E. Nyström.*

**Powell, E. O.:** A table of the generalized Riemann zeta function in a particular case. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 116—123 (1952).

Die verallgemeinerte Riemannsche Zetafunktion  $\zeta(s, a)$  wird für  $s = 1/2$  und  $a = 1,00(0,01)2,00(0,02)5,00(0,05)10,00$  mit 10 Dezimalen angegeben. Mit den ebenfalls vertafelten modifizierten zweiten Differenzen kann die Tabelle im gesamten Bereich quadratisch interpoliert werden. Zur Berechnung von  $\zeta(1/2, a)$  und zur Nachprüfung werden eine asymptotische Entwicklung, eine Reihenentwicklung nach Potenzen von  $a$  mit Riemannschen Zetafunktionen als Koeffizienten und das Multiplikationstheorem  $\zeta\left(\frac{1}{2}, Ma\right) = M^{-1/2} \sum_{r=0}^{M-1} \zeta\left(\frac{1}{2}, a + \frac{r}{M}\right)$  ( $M$  eine ganze Zahl) herangezogen. *H. Unger.*

Eremeev, N. V.: Über einen nomographischen Mechanismus. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 3 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 2), 9—14 (1952) [Russisch].

Pentkovskij, M. V.: Angenäherte Nomogramme aus ausgeglichenen Punkten mit zwei parallelen Skalen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 27—30 (1952) [Russisch].

Laville, Gaston: Méthode graphique applicable à l'analyse harmonique et au calcul symbolique. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1728—1730 (1952).

Kurze graphische Methode zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten einer gegebenen periodischen Funktion. Die relative Genauigkeit der Ergebnisse ist nach Versuchen des Verf. ungefähr  $\frac{1}{2}\%$ . Mit der gleichen Genauigkeit und Schnelligkeit kann dieses Verfahren auch zur Berechnung von Abbildungen einer Funktion durch die Laplacesche Transformation und zur Lösung der umgekehrten Aufgabe benutzt werden.

*K. Stumpff.*

Vil'ner, I. A.: Das Problem der Anamorphose für analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen und  $N$ -Funktionalgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 341—344 (1952) [Russisch].

Verf. gibt unter Verwendung gewisser bereits früher verwendeter Differentialparameter (dies. Zbl. 37, 211) in einer Reihe von Theoremen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine komplexe Funktion  $\Phi(w, z) = 0$  eine Anamorphose zuläßt, wobei die Erfüllung gewisser partieller Differentialgleichungen verschieden ist, je nach der nomographischen Klasse oder dem Geschlecht. Für die explizite komplexe Funktion  $w = f(z)$ ,  $z = F(w)$  mit  $\varphi = \varphi(z) = dw/dz$  und  $\varphi_1 = \varphi_1(\bar{z}) = d\bar{w}/d\bar{z}$  gilt der Satz: Damit die Funktion  $\Phi(w, z) = 0$  nomographisch darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß:

$$K_4 = -\frac{\varphi^4 \varphi_1^4}{(\varphi^2 - \varphi_1^2)^2} \left\{ \frac{(\ln \varphi)''}{\varphi^2} + \frac{(\ln \varphi_1)''}{\varphi_1^2} + 2 \frac{[(\ln \varphi)']^2 - [(\ln \varphi_1)']^2}{\varphi_1^2 - \varphi^2} \right\}$$

eine reelle Konstante ist.

*R. Ludwig.*

Schöbe, Waldemar: Angenäherte Summation und Rekursion mittels der Lubbockschen Formel. Bl. Deutsch. Ges. Vers.-Math. 1, Nr. 3, 3—13 (1952).

Verf. geht von der Darstellung

$$\begin{aligned} (1) \sum_{v=0}^{2m} c_v &= (2m+1) \left( \frac{m+1}{6m} c_0 + \frac{2m-1}{3m} c_m + \frac{m+1}{6m} c_{2m} \right) - \frac{m(m^2-1)(4m^2-1)}{360} M, \\ (2) \sum_{v=0}^{3m} c_v &= (3m+1) \left( \frac{m+1}{8m} c_0 + \frac{3m-1}{8m} c_m + \frac{3m+1}{8m} c_{2m} + \frac{m+1}{8m} c_{3m} \right) \\ &\quad - \frac{m(m^2-1)(9m^2-1)}{240} M^* \end{aligned}$$

der Summe von  $2m$  bzw.  $3m$  aufeinanderfolgenden Gliedern einer „regelmäßig verlaufenden“ Zahlenfolge  $\{c_v\}$  aus.  $M$  bzw.  $M^*$  bedeuten darin jeweils einen zwischen der größten und der kleinsten vierten Differenz der zu summierenden Glieder gelegenen Wert. Durch Vernachlässigung der  $M$  bzw.  $M^*$  enthaltenden Restglieder erhält er Näherungsformeln für die Summation, die Spezialfälle der Formel von Lubbock darstellen. Für ihre Anwendung auf längere Folgen ist es vorteilhaft,  $m$  nicht entsprechend groß zu wählen, sondern die Formeln für ein kleineres  $m$  mehrmals auf sich jeweils mit dem ersten und dem letzten Glied überlappende Abschnitte der zu summierenden Folge anzuwenden. Da diese Formeln nur die Kenntnis jedes  $m$ -ten Gliedes der Folge voraussetzen, ersparen sie den mitunter erheblichen Arbeitsaufwand für die Ermittlung aller übrigen Glieder der Folge. Das geschilderte Verfahren erscheint deshalb zur näherungsweisen Lösung von Rekursionsformeln, wie sie insbesondere in der Versicherungsmathematik bei diskontinuierlicher Betrachtungsweise auftreten, besonders geeignet. Die Genauigkeit der damit erzielten Ergebnisse reicht, wie Verf. an Beispielen zeigt, für praktische Zwecke vollkommen aus.

*G. Friede.*



**Hartley, H. O.:** Tables for numerical integration at non-equidistant argument steps. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 436—442 (1952).

Sind Werte der zu integrierenden Funktion in Punkten völlig beliebiger Lage gegeben, so lassen sich keine allgemein gültigen Hilfstafeln aufstellen. — Von den etwa  $n + 1$  Punkten wird angenommen, daß sie aus äquidistant gelegenen durch eine Transformation hervorgehen, die mittels einer glatten Funktion, insbesondere mittels eines Polynoms vom höchstens  $n$ -tem Grade darstellbar ist. Dabei werden die Endpunkte des Integrationsintervalls als solche Punkte betrachtet. Es lassen sich dann Hilfstafeln für angenäherte Integration aufstellen, wozu insbesondere Werte der ersten Ableitung des genannten Polynoms benötigt werden. Dadurch wird die Integration auf eine solche bei äquidistanten Punkten zurückgeführt. Die gegebenen Tafeln gehen von  $n = 3$  bis  $n = 10$ . Beispiele und Genauigkeitsbetrachtungen erläutern die Anwendbarkeit des Verfahrens. *E. J. Nyström.*

**Tietz, Horst:** Beweis der Konvergenz eines Verfahrens von W. Bartky zur Berechnung von bestimmten Integralen. J. reine angew. Math. 189, 246—249 (1952).

Die betreffende, sehr leistungsfähige Methode ist entstanden durch geeignete Anwendung der bekannten Landenschen Transformation auf elliptische Integrale

und auf Integrale der Form  $\int_n^m G(R) dR$  mit  $R^2 = m^2 \cos^2 \Phi + n^2 \sin^2 \Phi$ .

*E. J. Nyström.*

**Young, David:** An error bound for the numerical quadrature of analytic functions. J. Math. Physics 31, 42—44 (1952).

Für eine gewisse, fünf Funktionswerte benutzende Quadraturformel (dies. Zbl. 39, 342) wird eine Fehlerabschätzung gegeben. *E. J. Nyström.*

**Kaplan, E. L.:** Numerical integration near a singularity. J. Math. Physics 31, 1—28 (1952).

Wird eine zu integrierende Funktion oder eine ihrer Ableitungen niedriger Ordnung in einem Punkt des Integrationsintervalls unendlich oder liegt eine Unstetigkeit vor, so versagen die gewöhnlichen Quadraturformeln. Einige in solchen Fällen in Frage kommende Verfahren werden erwähnt und insbesondere wird die numerische Integration der Funktionen  $x^n A(x)$ ,  $x^{n'} [A(x) \log x + B(x)]$  mit  $n = \pm \frac{1}{2}$ ,  $n' = 0$  oder 1 besprochen. Koeffiziententafeln und Hilfstafeln für andere Werte von  $n$  werden gegeben, indem  $A(x)$  und  $B(x)$  durch Polynome approximiert werden. Die Möglichkeit zum Interpolieren wird beachtet. Elliptische Integrale dienen als Beispiel. *E. J. Nyström.*

**Hagen, G. B.:** Über iterierte Integration von Bessel-Funktionen. Z. angew. Math. Mech. 32, 27—30 (1952).

Ausgehend von den Funktionalgleichungen der Zylinderfunktionen wird gezeigt, daß sich die Mehrfach-Integration von  $J_0(x)$ ,  $J_p(x)$  und der Lommelschen Funktion  $A_1(x) = \frac{2J_1(x)}{x}$  auf  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$  und  $\int_0^x J_0(t) dt$  zurückführen läßt. Es ist damit von Wichtigkeit, neben  $J_0$  und  $J_1$  auch das Integral über  $J_0$  numerisch genügend genau zu kennen. — In einer kleinen Tabelle wird  $\int_0^x J_0(t) dt$  für  $x = 0(0.2)15(1)24$  mit 4 Dezimalen mitgeteilt. — Für die bei Watson (Bessel functions, Cambridge 1922; Kap. 10, 74) angegebene Beziehung  $\int_0^x J_0(t) dt = \frac{1}{2}\pi x [J_0(x) H'_0(x) + J_1(x) H_0(x)]$  wird eine einfache Herleitung gebracht.

*H. Unger.*

**Štykan, A. B.:** Ein Integriermechanismus von Leibniz. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 191—194 (1952) [Russisch].

**Knappe, W.:** Eine neue Zwangsführung zum Nyströmschen Stieltjesplanimeter. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 84—85 (1952).

Bei der mechanischen Auswertung von Integralen  $\int f(t) dh(t)$  gewinnt man verschiedene Vorteile, wenn man die Kurve  $x = h(t)$  durch eine Blechschablone realisiert und einen Metallstift längs derselben gleiten läßt, wobei ein Gewicht mit einem Seilzug den Stift gegen den Rand der Schablone zieht.

*E. J. Nyström.*

**Richter, W.:** Graphische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit nomographischen Hilfsmitteln. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 120—129 (1952).

Das Verfahren von Heinrich (dies. Zbl. **11**, 363) zur Festlegung der durch eine Differentialgleichung erster Ordnung bestimmten Richtungen durch Nomogramme wird so verallgemeinert, daß der zweite Punkt der Tangente zunächst durch den Schnitt der durch zwei Netze bestimmten Geraden mit einer festen Geraden oder Kurve und weiterhin durch den Schnitt zweier durch je zwei Netze bestimmten Geraden festgelegt wird. Diese Verfahren werden durch Benutzung von Ketten von Fluchtliniennomogrammen mit Zapfenlinien verallgemeinert. Beispiele werden angegeben und die Fälle der bei diesen Verfahren auftretenden Singularitäten diskutiert. Schließlich werden die Arten von Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung behandelt, deren Integration sich durch Übertragung der besprochenen Verfahren durchführen lassen.

*F.-A. Willers.*

**Rutishauser, Heinz:** Über die Instabilität von Methoden zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Phys.* **3**, 65—74 (1952).

Bei numerischer Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung für eine Funktion  $y(x)$  mit Hilfe einer genauen Differenzenformel höherer, etwa  $m$ -ter Ordnung ( $m > n$ ) kann es passieren, daß infolge der erhöhten Lösungsmannigfaltigkeit weitere, stärker als  $y(x)$  anwachsende Lösungen der Differenzengleichung „eingeschleppt“ werden und das Verfahren dadurch instabil und unbrauchbar wird. Diese Art von Instabilität ist dabei nur durch ein unzuverlässiges Integrationsverfahren verursacht. Berechnet man bei  $y' = f(x, y)$  Näherungen  $y_k$  iterativ nach der Simpsonschen Regel  $y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3} (y'_{k+1} + 4y'_k + y'_{k-1})$  (Schrittweite  $h$ ), so hat die zugehörige Differenzenvariationsgleichung

$$\eta_{k+1} \left( 1 - \frac{h}{3} f_{y,k+1} \right) - \frac{4}{3} h f_{y,k} \eta_k - \left( 1 + \frac{h}{3} f_{y,k-1} \right) \eta_{k-1} = 0$$

unter der Annahme  $f_y \approx \text{const.}$  Lösungen  $\eta_k = \lambda^k$  mit  $\lambda_1 \approx e^{hf_y}$ ,  $\lambda_2 \approx -e^{-hf_y/3}$ . Für  $f_y < 0$  bewirkt  $\lambda_2$  Instabilität („Aufrauhungserscheinung“, vgl. Collatz-Zurmühl, dies. Zbl. **26**, 414), für  $f_y \geq 0$  ist nichts zu befürchten. In ähnlicher Weise werden andere Verfahren untersucht. Das Runge-Kutta-Verfahren und eine Adamsche Interpolationsformel erweisen sich als stets stabil. Das Verfahren der zentralen Differenzen für  $y'' = f(x, y, y')$  ist für  $f_{y'} \geq 0$  stabil. Allgemein entscheiden über die Stabilität die Lösungen einer Determinantengleichung, was am Beispiel einer Gleichung vierter Ordnung erläutert wird.

*L. Collatz.*

**Weissinger, Johannes:** Eine Fehlerabschätzung für die Verfahren von Adams und Störmer. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 62—67 (1952).

Die in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **41**, 244) eingeführte und auf das Extrapolationsverfahren von Adams angewandte Methode zur Fehlerabschätzung wird hier auf das Adamssche Interpolationsverfahren für  $y' = f(x, y)$  und das Verfahren von Störmer für  $y'' = f(x, y)$  ausgedehnt. Der wesentliche Gedanke dieser Methode des Verf. bestand darin, statt die (bekannten) exakten Fehlergleichungen in Differentialungleichungen zu verwandeln, durch Ausnutzung der Relationen zwischen den in den Fehlergleichungen auftretenden Integrationskoeffizienten und geeignete lineare Kombinationen neue Gleichungen zu gewinnen, bei denen der Übergang zu den Beträgen keinen so großen Genauigkeitsverlust bedingt wie er i. a.

beim unmittelbaren Übergang vom Betrag einer Summe zu der Summe der Beträge entsteht. In beiden Fällen werden Verschärfungen der früher von G. Schulz angegebenen Fehlerabschätzungen gewonnen, wobei für das Adamsche Interpolationsverfahren die Überlegungen fast wörtlich wie früher beim Extrapolationsverfahren verlaufen und für das Verfahren von Störmer weitgehend denen von G. Schulz folgen. Anwendung auf das Beispiel  $y' = (y - x)/(y + x)$ ,  $y(0) = 1$  führt zu einem Verhältnis der Fehlerschranken für Extrapolations- und Interpolationsverfahren von  $\approx 15:1$ , während sich nach der alten Abschätzung 574:1 ergibt.

F. Reutter.

**Baluev, A. N.:** Zur abstrakten Theorie der Methode von S. A. Čaplygin. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **83**, 781—784 (1952) [Russisch].

S. A. Čaplygin hat 1920 ein Verfahren zur näherungsweisen Lösung von Differentialgleichungen angegeben, das seitdem von verschiedenen russischen Mathematikern weiterentwickelt worden ist (s. z. B. A. Gelfand, dies. Zbl. **20**, 358). Hier wird das Verfahren auf halbgeordnete Räume (s. Kantorovič-Vulich-Pinsker, Funktionalanalysis in halbgeordneten Räumen, Moskau-Leningrad 1950, dies. Zbl. **37**, 71) verallgemeinert. —  $X$  und  $Y$  seien lineare halbgeordnete Räume,  $P$  eine Operation von  $X$  in  $Y$ , die gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen genügt (alle Grenzwerte im Sinne der Halbordnung verstanden). Gesucht ist eine Lösung von  $P(x) = 0$ . Ausgehend von zwei Anfangselementen  $x_0 \leq \bar{x}_0$  mit  $P(x_0) \leq 0 \leq P(\bar{x}_0)$  erhält man weitere Näherungen  $x_{n+1} = x_n - \Gamma^{-1} P(x_n)$ , analog  $\bar{x}_{n+1}$ . Dabei ist  $\Gamma^{-1} \geq 0$  die Inverse einer linearen Operation  $\Gamma$ , für die  $P'(x) \leq \Gamma$  in  $x_0 \leq x \leq \bar{x}_0$  gilt. Unter geringen Zusatzvoraussetzungen konvergieren dann  $x_n$  bzw.  $\bar{x}_n$  gegen die (dann vorhandene) kleinste bzw. größte Lösung von  $P(x) = 0$  im Intervall  $(x_0, \bar{x}_0)$ . — Existiert sogar  $P''(x)$ , so erhält man auch Eindeutigkeitsaussagen. Anwendung auf Differentialgleichungen.

K. Zeller.

**Löwdin, Per-Olov:** On the numerical integration of ordinary differential equations of the first order. Quart. appl. Math. **19**, 97—111 (1952).

Zur numerischen Integration von  $y' = F(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  wird eine aus zentralen und rückwärts genommenen Differenzen gemischte Formel verwendet:

$$h^{-1} y - \frac{1}{3} F(x, y) = M - \frac{1}{180} \mu \delta^3 F + \frac{31}{15120} \mu \delta^5 F - + \dots = M + \gamma$$

mit

$$M = (\mu \delta)^{-1} \left\{ F - \frac{1}{3} \nabla F \right\};$$

dabei ist  $h$  die Schrittweite und  $\mu, \delta, \nabla$  drücken sich in bekannter Weise durch den Verschiebungsoperator  $E$  aus:  $E f(x) = f(x + h)$ ,  $\nabla = 1 - E^{-1}$ ,  $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ ,  $2\mu = E^{1/2} + E^{-1/2}$ . In obiger Formel ist das Summenglied  $M$  i. a. der Hauptbestandteil der rechten Seite, und die Formel ist so gewählt, daß die Zusatzglieder möglichst kleine Korrektionsglieder darstellen. Ist die Rechnung bis zur Stelle  $x_n = x_0 + n h$  durchgeführt, so werden  $M_{n+1} = M_n + 2 F_n - \frac{2}{3} \nabla F_n$  und die Korrektur  $\gamma_{n+1}$  berechnet, wobei  $\mu \delta^3 F_{n+1}$ ,  $\mu \delta^5 F_{n+1}$ , ... durch rückwärtige Differenzen  $\nabla^k F_n$  ersetzt werden (nach  $2\mu \delta^3 F_{n+1} = 2 \nabla^3 F_n + 5 \nabla^4 F_n + 9 \nabla^5 F_n + 14 \nabla^6 F_n + \dots$ , entsprechend  $\mu \delta^5 F_{n+1}$ , ...), und schließlich ist die Gleichung  $h^{-1} y_{n+1} - \frac{1}{3} F_{n+1} = M_{n+1} + \gamma_{n+1}$  iterativ zu lösen. Der Beginn der Rechnung erfordert besondere Formeln, die auch aus der obigen allgemeinen Formel abgeleitet werden. Es werden noch Formeln für eine „Nachkorrektur“, für eine Prüfung der Näherungslösung, für ein Ausschalten von Aufschaukelungsfehlern, zu denen das Verfahren neigt, und ein ausführliches numerisches Beispiel gegeben [Differentialgleichung  $y' = x - y^2$ ;  $y_0$  so gewählt, daß die exakte Lösung die logarithmische Ableitung des Airyschen Integrals ist:  $y = (d/dx) \log \text{Ai}(x)$ ].

L. Collatz.



**Muchin, I. S.:** Eine Anwendung der Markov-Hermiteischen Interpolationspolynome zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Priklad. Mat. Mech. **16**, 231—238 (1952) [Russisch].

L'A. établit à nouveau les formules de quadrature approchée qui reposent sur l'interpolation de la primitive au moyen d'un polynome ayant avec la primitive des contacts d'ordres donnés en certains points. En considérant ensuite le second membre d'une équation différentielle  $y' = f(x, y)$  comme une fonction de  $x$ , il obtient par quadrature approchée de cette fonction un certain nombre de formules d'intégration approchée d'équations différentielles de la forme considérée, et en particulier les formules connues de Milne, et d'autres qui paraissent nouvelles. La précision de ces diverses formules est comparée, d'une manière peut-être un peu illusoire, au moyen de l'intégration de l'équation  $y' = y$  dans l'intervalle  $(0, 1)$ . Les mêmes idées sont ensuite utilisées pour l'équation  $y'' = f(x, y)$ .

Ch. Blanc.

**Lotkin, Mark:** A new integrating procedure of high accuracy. J. Math. Physics **31**, 29—34 (1952).

Zur Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung  $y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$  mit den Anfangswerten  $y_i(x_0) = y_{i0}$  wird die Iterationsvorschrift

$$y_{i,j+1}(x) = y_{i0} + x(f_{i0} + f_{ij})/2 + x^2(f'_{i0} - f'_{ij})/10 + x^3(f''_{i0} + f''_{ij})/120,$$

$f_{i0} = f_i(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$ ,  $f_{ij} = f_i(x, y_{1j}(x), \dots, y_{nj}(x))$ ,  $f_i^{(k)} = \partial^k f / \partial x^k|_{x=x_i}$  gegeben. — Es wird zunächst für den einfachen Fall der Quadratur  $y' = f(x)$ , sodann ganz allgemein bewiesen, daß das Verfahren eine lokale Annäherung der Lösung durch ein Polynom 6. Grades bedeutet, folglich Fehler von  $O[(x - x_0)^7]$  auftreten. Hierzu müssen die Ableitungen  $\partial f_i^{(k)} / \partial y_r$  für  $k = 0, 1, 2$  und  $\partial^k f_i / \partial x^k$  bis  $k = 6$  in einem gewissen Rechteck beschränkt sein, dessen Größe von der Schrittweite abhängt. — Ref., der die Methode an einem Beispiel erprobte, war über den mäßigen Arbeitsaufwand im Vergleich zum Adams-Verfahren gleicher Ordnung erstaunt. Allerdings wird die Kenntnis der 1. und 2. Ableitung der Funktionen  $f_i$  gefordert, was immer dann, wenn die  $f_i$  nur tabellarisch vorliegen, infolge der Ungenauigkeit numerischer Differentiation die Anwendungsmöglichkeit einschränkt.

H. Wundt.

**Lotkin, Mark:** Polynomials having a root approaching  $\pi$ . Amer. math. Monthly **59**, 96—98 (1952).

Die Quadraturformel von Verf. aus vorsteh. besprochener Arbeit wird auf  $f(t) = \cos t$  und  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = h_k = \pi/2^k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) angewendet. Dann folgt

$$\cos h_{k+1} [h_k (1 - h_k^2/60) \cos h_{k+1} - 2 (1 - h_k^2/10) \sin h_{k+1}] + R = 0.$$

Mit der Bezeichnung  $x_k = x 2^{-k}$  besitzt das Polynom

$$E(k, x) \equiv x_k (1 - x_k^2/60) \cos h_{k+1} - 2 (1 - x_k^2/10) \sin h_{k+1}$$

eine Nullstelle, die für  $k \rightarrow \infty$   $\pi$  sehr gut approximiert.

F. Kasch.

**Fehlberg, E.:** Bemerkungen zur numerischen Lösung von Randwertaufgaben für nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen nach der Picardschen Iterationsmethode. Z. angew. Math. Mech. **32**, 23—26 (1952).

In Fortsetzung der Arbeiten des Verf. über die Anwendung der Legendreschen Polynome bei der numerischen Auflösung von Differentialgleichungsproblemen (vgl. dies. Zbl. **42**, 131) wird hier die Picardsche Iterationsmethode zur Lösung von Randwertaufgaben bei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen behandelt. — Bei der ersten Randwertaufgabe (bei anderen Randwertaufgaben ändert sich die Vorgehensweise nur unwesentlich) der Differentialgleichung  $y'' = \varphi(x, y, y')$  mit bei  $x = -1$  und  $x = +1$  vorgegebenen Randwerten wird nach Picard eine erste den Randbedingungen genügende Näherung  $y_0$  in  $\varphi(x, y, y')$  eingesetzt. In (1):  $s'_1 - f_0(x) = \varphi(x, y_0, y'_0)$  werden nun  $f_0 = \sum_p F_p P_p(x)$  und  $y_1 = \sum_p Y_p P_p(x)$  nach Legendreschen Polynomen  $P_p(x)$  entwickelt. Dann wird  $y'_1$  gebildet, wobei die Ableitungen durch die  $P_p(x)$  ausgedrückt werden. Setzt man diese Entwicklungen in (1) ein, so erhält man durch

Koeffizientenvergleich die gesuchten  $Y_*$ . In der Arbeit werden die endgültigen Formeln für den Fall angegeben, daß man die Koeffizienten bis  $\nu = 7$  berücksichtigt. Nach Ermittlung der ersten Näherung  $y_1$  wird das Verfahren wiederholt, indem jetzt  $y_1$  in  $\varphi$  eingesetzt wird usw. — Als Beispiele werden die Differentialgleichungen  $y'' = 2\sqrt{1+y'^2}$  und  $y'' = -2yy'$  behandelt. — Da bei den ersten Iterationsschritten keine allzu großen Genauigkeiten zu erwarten sind, wird für die Durchführung dieser Schritte noch ein vereinfachtes Entwicklungsverfahren nach Legendreschen Polynomen angegeben. *H. Unger.*

**Berry, V. J. and C. R. de Prima:** An iterative method für the solution of Eigenvalue problems. *J. appl. Phys.* **23**, 195—198 (1952).

Es wird ein Iterationsverfahren für die höheren Eigenwerte von

$$L(u) = (p u')' - q u = -\lambda w u, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

beschrieben. Ist  $u(x, \lambda)$  die Lösung von  $L(u) = -\lambda w u$  mit  $u(0) = 0$ ,

$\int_0^1 w u^2 dx = 1$ , so ist  $D(\lambda) = \int_0^1 [p u'(x, \lambda)^2 + q u(x, \lambda)^2] dx$  eine monotone Funktion von  $\lambda$ , die an den Eigenwertstellen  $\lambda_n$  stationäre Werte annimmt, und zwar gerade die Werte  $D(\lambda_n) = \lambda_n$ ; hierauf gründet sich die Iterationsvorschrift  $\lambda_n^{(k+1)} = D(\lambda_n^{(k)})$  oder  $\lambda_n^{(k+1)} = \lambda_n^{(k)} + p(1) u(1, \lambda_n^{(k)}) u'(1, \lambda_n^{(k)})$ ; für  $k \rightarrow \infty$  konvergieren die  $\lambda_n^{(k)}$  monoton gegen einen Eigenwert  $\lambda_n$ , dessen Nummer vom Ausgangswert  $\lambda_n^{(1)}$  abhängt [vorausgesetzt, daß  $\lambda_n^{(1)}$  nicht gerade ein Eigenwert von  $L(u) = -\lambda w u$ ,  $u(0) = u(1) = 0$  ist.] Es folgt ein numerisches Beispiel; jeder Iterationsschritt erfordert die angenäherte Bestimmung einer Funktion  $u(x, \lambda_n^{(k)})$ , also Lösung einer Anfangswertaufgabe. *L. Collatz.*

**Curtiss, C. F. and J. O. Hirschfelder:** Integration of stiff equations. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 235—243 (1952).

Verff. weisen darauf hin, daß die Differentialgleichung  $y'(x) = [y - G(x)]/a(x, y)$  unter gewissen Voraussetzungen genau eine nahe bei  $G(x)$  liegende Lösung  $Y(x)$  besitzt, während alle anderen Lösungen sich rasch exponentiell von  $Y(x)$  entfernen, und daß die durch ein Interpolationsverfahren, z. B. durch  $(y_n - y_{n-1})/h = (y_n - G_n)/a_n$  gewonnenen Näherungslösungen bei nicht zu kleiner (fester) Schrittweite  $h$  unabhängig von den Anfangsbedingungen sich  $Y(x)$  mit wachsendem  $n$  annähern. Die Güte der Annäherung wird für  $y$ -unabhängiges  $a(x, y) = a(x)$  auch für Interpolationsverfahren höherer Ordnung untersucht. *J. Weissinger.*

**Muscia, Calogera:** Studio di una lente elettronica con il metodo W. K. B. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **12**, 575—582 (1952).

Die Differentialgleichung der achsennahen Elektronenbahnen bei der Abbildung durch ein Kreisstromfeld wird mittels der W. K. B.-Methode angenähert integriert und das Resultat mit den Ergebnissen einer numerischen Integration für einige Werte der Linsenstärke verglichen. *W. Glaser.*

**Bechert, Karl:** Über ein Verfahren zur näherungsweise Integration beliebiger partieller Differentialgleichungen. *Math. Nachr.* **8**, 75—78 (1952).

Bei einer partiellen Differentialgleichung für eine Funktion  $u(x_1, \dots, x_n, t)$  sei für  $t = 0$  der Anfangszustand von  $u$  gegeben. Es wird die Wandergeschwindigkeit eines festen  $u$ -Wertes oder je nach der Differentialgleichung fester Werte gewisser Ableitungen von  $u$  oder gewisser Kombinationen wie z. B.  $\text{grad } u$  berechnet und zum näherungsweisen Aufbau der Lösungsfunktion verwendet. [Z. B. bei der Wärmeleitungsgleichung  $u_{xx} = u_t$  sei  $u(x, 0)$  für alle  $x$  gegeben. Dann kann die Wandergeschwindigkeit  $v$  eines festen  $u$ -Wertes aus  $du/dt = 0 = \partial u/\partial t + v \partial u/\partial x$  berechnet werden, so daß  $u(x, t)$  angenähert  $= u(x + \Delta x, t + \Delta t)$  ist; dazu muß  $u(x, t)$  als Funktion von  $x$  bereits bekannt sein, und man erhält  $u(x, t + \Delta t)$ .] Genauere Ausführungen sollen demnächst gegeben werden. *L. Collatz.*

**Synge, J. L.:** Triangulation in the hypocircle method for plane problems. *Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A* **54**, Nr. 21, 341—367 (1952).

Bei der „hypercircle method“ zur Lösung einer Randwertaufgabe, etwa bei partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen  $x, y$  werden zu dem Funktionenraum  $F$  zwei zueinander im Sinne einer gewissen Metrik orthogonale Teilräume  $F'$  und  $F''$  betrachtet, wobei die Funktionen aus  $F'$  einen Teil der Bedingungen (z. B. die Randbedingungen) und die Funktionen aus  $F''$  den restlichen Teil der Bedingungen (z. B. die Differentialgleichungen) erfüllen. Eine Lösung  $S$  der Randwertaufgabe liegt dann in dem Durchschnitt von  $F'$  und  $F''$ .  $S$  wird durch Linearkombinationen aus endlich vielen ausgewählten Elementen dieser Teilräume angenähert. Als solche Elemente verwendet Verf. „Pyramidenfunktionen“: Der gegebene Bereich  $B$  der  $(x, y)$ -Ebene wird durch Dreiecke überdeckt und es werden „Pyramidenfunktionen“ so konstruiert, daß sie in jedem einzelnen Dreieck linear von  $x, y$  abhängen und im ganzen stetig sind, in einer Ecke den Wert 1 haben und nur in den in dieser Ecke aneinanderstoßenden Dreiecken von Null verschieden sind. Genauer untersucht werden regelmäßige Triangulierungen, insbesondere Überdeckung mit gleichseitigen Dreiecken. Es folgt ein Zahlenbeispiel für eine sechseckige Membran  $B$ , wobei im Innern  $\Delta u - \lambda u = 0$  und auf dem Rande  $u = 1$  vorgegeben ist.

L. Collatz.

Panov, D. Ju.: Über angenäherte numerische Lösung von quasilinearen partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 793—795 (1952) [Russisch].

Ein quasilineares System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung vom hyperbolischen Typ mit zwei unabhängigen und zwei abhängigen Variablen wird mit Hilfe der Charakteristikenmethode gelöst. Ausgehend von je einem Punktsystem  $(x_i, y_i)$  auf der einen und auf der anderen Charakteristikenschar, wo die zugehörigen Funktionswerte  $u$  und  $v$  bekannt sein mögen, wird sukzessive das Gitter durch Bestimmung der Schnittpunkte der Charakteristiken aufgebaut. Dabei werden die Kurvenbögen durch Parabeln bzw. durch kubische Parabeln mit  $y$ -paralleler Achse ersetzt. In den Gitterpunkten geschieht die Berechnung der  $u$ - und  $v$ -Werte durch numerische Integration. Die hierzu notwendigen Formeln werden angegeben. — Die Konstruktion fußt auf der Voraussetzung, daß dabei die Maschenweite in  $x$ -Richtung a) nahezu konstant bleibt, oder b) sich nahezu linear mit  $x$  ändert. Kann man keinen dieser Fälle annehmen, so soll ein Ersatz der Charakteristikenbögen durch beliebig gelegte Parabeln und Bestimmung der Schnittpunkte mittels Lösung quadratischer oder kubischer Gleichungen zum Ziel führen.

H. Wundt.

Leutert, Werner: On the convergence of unstable approximate solutions of the heat equation to the exact solution. J. Math. Physics 30, 245—251 (1952).

La solution de l'équation (1)  $u_t = u_{xx}$  satisfaisant aux conditions  $u(x, 0) = f(x)$  pour  $0 < x < 1$ , et  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  pour  $t \geq 0$ , peut être représentée sous la forme

$$(2) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x e^{-\pi^2 n^2 t},$$

avec  $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin \pi n x dx$ . On construit la solution approximative de ce problème en partant de l'équation aux différences finies

$$(3) \quad v(x, t + \Delta t) - v(x, t) = r[v(x + \Delta x, t) + v(x - \Delta x, t) - 2v(x, t)],$$

avec  $r = \Delta t : (\Delta x)^2$ . Cette solution approximative a la forme suivante

$$v_M(x, t) = \sum_{n=1}^{k(M)} b_n(M) \sin \pi n x \left[ 1 - 4r \sin^2 \frac{\pi n}{2M} \right]^{t M^2 / r},$$

$M^2$  étant le nombre d'intervalles de subdivision de  $0 \leq x \leq 1$  dans (3) et  $k$  tendant vers  $\infty$  pour  $M \rightarrow \infty$ . En faisant certaines hypothèses, l'A. démontre que  $v_M$  tend vers la solution exacte  $u$  de (1), définie par (2), lorsque  $M \rightarrow \infty$ . M. Krzyżański.



Leutert, Werner and George G. O'Brien: On the convergence of approximate solutions of the wave equation to the exact solution. J. Math. Physics 30, 252—256 (1952).

On cherche la solution approximative du problème, consistant en la recherche d'une solution de l'équation (1)  $u_{tt} = u_{xx}$ , satisfaisant aux conditions initiales  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = 0$  pour  $0 \leq x \leq 1$  et aux conditions aux limites  $u(0, t) = u(1, t) = 0$  pour  $t \geq 0$ . Le cas  $u_t(x, 0) = g(x)$  peut être traité d'une manière analogue. La solution exacte peut être représentée sous la forme

$$(2) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x \cos \pi n t,$$

avec  $a_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin \pi n x dx$ . Pour construire la solution approximative, on part de l'équation aux différences finies

$$(3) \quad v(x, t + \Delta t) + v(x, t - \Delta t) - 2v(x, t) = r[v(x + \Delta x, t) + v(x - \Delta x, t) - 2v(x, t)],$$

avec  $r = \Delta t : \Delta x$ , et en représentant la solution de (3) sous la forme

$$v_M(x, t) = \sum_{n=1}^{k(M)} b_n(M) \sin \pi n x \cos \left[ \frac{\pi M t}{r} \arccos \left\{ 1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\pi n}{2M} \right\} \right],$$

$M$  étant le nombre d'intervalles de subdivision de  $0 \leq x \leq 1$ , et  $k \rightarrow \infty$  pour  $M \rightarrow \infty$ . En faisant certaines hypothèses, l'A. démontre que  $\lim_{M \rightarrow \infty} v_M(x, t) = u(x, t)$ .

$u$  étant la solution exacte de (1), définie par (2). M. Krzyński.

Fehlberg, Erwin: Bemerkungen zur numerischen Behandlung des Dirichlet-schen Problems für spezielle Ränder. Acta math. 87, 361—382 (1952).

Zur Lösung des Dirichletschen Problems für die lineare Differentialgleichung  $z_{xx} + z_{yy} + a(x, y) z_x + b(x, y) z_y + c(x, y) z = d(x, y)$  nach der Picardschen Iterationsmethode wird man auf die Gl.  $z_{xx} + z_{yy} = e(x, y)$  oder nach einer Lineartransformation, die einen Rechteckbereich in das Einheitsquadrat überführt, auf  $z_{\xi\xi} + A z_{\eta\eta} = f(\xi, \eta)$  geführt. Zur Lösung des Problems für Rechtecks- und Ellipsenrand (Einheitsquadrat und Einheitskreis) wird für  $f(\xi, \eta)$  und die Lösung  $z(\xi, \eta)$  je eine Doppelreihe in Legendreschen Polynomen  $P_i$  angesetzt:

$$(1) \quad f = \sum_{i,k} F_{ik} P_i(\xi) P_k(\eta), \quad (2) \quad z = \sum_{i,k} Z_{ik} P_i(\xi) P_k(\eta).$$

Indem man in der Entwicklung (1)  $i$  und  $k$  von 0 bis  $n$ , in (2) von 0 bis  $n + 2$  laufen läßt, ergibt sich für die  $Z_{ik}$  durch Koeffizientenvergleich aus Differentialgleichung und Randbedingungen ein lineares Gleichungssystem in  $(n + 3)^2$  Unbekannten, das indessen in 4 Systeme entsprechend geringerer Unbekanntenzahl zerfällt, so daß die Auflösung mit erträglichem Arbeitsaufwand möglich ist. Die Gleichungssysteme werden für  $n = 3$  für Quadrat- und Kreisrand angegeben (4 Systeme zu je 9 Unbekannten von besonders einfacher Bauart). Hiermit lassen sich die angeführten Probleme zahlenmäßig durchführen, wie an drei Beispielen gezeigt wird, die auch die Genauigkeitsverhältnisse erkennen lassen. Zum Schluß wird ein Weg zur angenäherten Berechnung der Entwicklungskoeffizienten  $F_{ik}$  einer gegebenen Funktion  $f(\xi, \eta)$  zweier Veränderlichen angegeben.

R. Zurmühl.

Diaz, J. B. and R. C. Roberts: On the numerical solution of the Dirichlet problem for Laplace's difference equation. Quart. appl. Math. 9, 355—360 (1952).

Bei der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie kann man bei Verwendung des gewöhnlichen Differenzenverfahrens das zugehörige System von linearen Gleichungen iterativ auf verschiedene Weise näherungsweise auflösen. Die Verfasser geben für drei Arten (1. gewöhnliche Relaxation oder Iteration in Einzelschritten, 2. Blockrelaxation, 3. Iteration in Gesamtschritten) Konvergenzbeweise für die Iteration, die von den zahlreichen bisherigen Beweisen abweichen, indem die Ausgangsnäherung als Differenz zweier subharmonischer Funktionen geschrieben wird.

Subharmonische Funktionen gehen bei den genannten Arten der Iteration wieder in solche Funktionen über; die Näherungsfolgen sind hierbei monoton, beschränkt und somit konvergent, und zwar konvergieren sie gegen die Lösung der Differenzengleichungen.

*L. Collatz.*

**Ejds, D. M.:** Über die Lösung von Randwertaufgaben mit der Differenzmethode. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 191—194 (1952) [Russisch].

Die zweite Randwertaufgabe für eine elliptische Differentialgleichung zweiten Grades wird unter geeigneten Voraussetzungen über den Rand für ein begrenztes Gebiet durch die Methode der endlichen Differenzen gelöst.

*L. Gårding.*

**Terrana, Emanuele:** Sulla eliminazione di taluni errori nelle misure angolari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 290—293 (1952).

Seit Bessel werden die zahlenmäßig größten Fehler der Teilkreise der in der Geodäsie verwendeten Universale durch Kreisablesung an zwei Stellen eliminiert. Die bisher nur unter einschränkenden Hypothesen bewiesene Möglichkeit einer solchen Eliminierung wird hier in Strenge durch trigonometrische Behandlung der Grundgleichungen nachgewiesen.

*F. Schmeidler.*

**Bödewadt, U. T.:** Die Potenzreihen der Ogivalfunktionen. Z. angew. Math. Mech. 32, 21—22 (1952).

Der durch Rotation eines Kreisbogens vom Radius  $R$  um eine Achse, die durch seinen einen Endpunkt geht und zur Tangente im andern Endpunkt parallel ist, entstehende Umdrehungskörper heißt Ogival. Ist  $D$  der Radius seines Grundkreises, so heißt  $R/D = n$  die Abrundungszahl. Die Formeln für Volumen, Mantelfläche, Schweremoment, Schwerpunktshöhe, Drallmasse, Drallarm, Taumelmasse und Taumelarm von Körper und Mantel hängen in für numerische Berechnungen unbequemer Weise von  $n$  ab. Verf. spaltet daher gewisse von  $n$  allein abhängige Faktoren von diesen Formeln ab und entwickelt sie in Potenzreihen von  $n^{-1}$ , die für  $n > \frac{1}{4}$  konvergieren und zur numerischen Berechnung gut brauchbar sind.

*G. Locks.*

**Brodin, Jean:** Stabilité et continuité paramétrique d'un servomécanisme linéaire à coefficients dépendant du temps. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 800—801 (1952).

## Geometrie.

**Kasner, Edward and John De Cicco:** The osculating conics of physical systems of curves. Math. Mag. 25, 117—124 (1952).

Soit  $F$  un champ de forces dans le plan, on considère la famille  $S_k$  ( $k \neq -1$ ) des trajectoires  $M(t)$  vérifiant l'équation  $M''(t) = F + k F_N$  où  $F_N$  est la composante de  $F$  sur la normale à  $M(t)$  ( $S_0 =$  système des trajectoires ordinaires etc.). Les AA. étudient les coniques osculatrices aux trajectoires d'un système  $S_k$  parallèlement à leur théorie plus ancienne des paraboles osculatrices: les  $\infty^1$  coniques osculatrices aux courbes de  $S_k$  en un élément de contact linéaire du premier ordre enveloppent une conique (dégénérée si  $k = 0$ ), le lieu des centres des  $\infty^1$  coniques est une conique (dégénérée si  $k = 0$ ).

*G. Reeb.*

## Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

**Baker, H. F.:** Note on the foundations of projective geometry. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 363—364 (1952).

Setzt man die Inzidenzaxiome der räumlichen Geometrie voraus, so ist folgender Satz mit dem bekannten Satz von Pappus äquivalent: „Schneidet  $IJ$  die Seiten eines Dreiecks  $DEF$  in  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  und sind  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$  entsprechend die vierten harmonischen Punkte, so schneiden sich  $DP'$ ,  $EQ'$ ,  $FR'$  in einem Punkte.“ — Bem. des. Ref.: Zum Beweise benützt Verf. nicht den vollen Desarguesschen Satz,

sondern nur den Vierseitsatz. Man kann also das Resultat auch wie folgt aussprechen: Gilt in einer ebenen Geometrie über einem Alternativkörper  $A$  der oben genannte Satz, so ist  $A$  ein (kommutativer) Körper. F. W. Levi.

**Gans, David:** Axioms for elliptic geometry. Canadian J. Math. 4, 81—92 (1952)

Verf. gibt eine neue und im Vergleich zu den bisherigen [H. Busemann: Metric methods in Finsler spaces and in the foundations of geometry, Princeton 1942 und L. M. Blumenthal, Trans. Amer. math. Soc. 59, 381—400 (1946)] einfachere axiomatische Charakterisierung des elliptischen Raumes an. Insbesondere kann der zweidimensionale elliptische Raum  $\Sigma$  mit Hilfe der (sechs) folgenden Forderungen ausgezeichnet werden:  $\Sigma$  ist ein kompakter metrischer Raum, der mindestens zwei verschiedene Punkte enthält, wobei zu je zwei verschiedenen und nicht zueinander konjugierten Punkten ein einziger Mittelpunkt und zu je zwei konjugierten genau zwei Mittelpunkte gehören. Die Forderungen 3 und 4 betreffen einige einfache Implikationen des Begriffes der Zwischenpunkte. Die fünfte Forderung postuliert, daß  $\Sigma$  ein im Sinne von Menger-Urysohn zweidimensionaler Raum ist. Forderung 6 postuliert endlich die Existenz von zwei verschiedenen Geraden, von denen jede die Eigenschaft besitzt, daß es für jedes Paar ihrer Punkte  $a, b$  genau zwei Translationen gibt, welche  $a$  in  $b$  überführen. St. Golab.

• **Norden, A. P.** (redigiert von): Hundertfünfundzwanzig Jahre Nichteuclidische Geometrie von Lobačevskij 1826—1951. — Feier der Staatlichen V. I. Ul'janov-Lenin-Universität zu Kazan und der Physiko-Mathematischen Gesellschaft zu Kazan zum 125. Jahrestag der Entdeckung der Nichteuclidischen Geometrie durch N. I. Lobačevskij. Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1952. 207 S. R. 7,50 [Russisch].

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln besprochen. Die Festschrift wird unter der Abkürzung „Neevklid. Geom. Lobačevskogo 1826—1951“ geführt.

**Skopec, Z. A.:** Die Zyklographie des Lobačevskischen Raumes. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4 (50), 145—146 (1952) [Russisch].

## Elementargeometrie:

**Hadwiger, H.:** Ergänzungsgleichheit  $k$ -dimensionaler Polyeder. Math. Z. 55, 292—298 (1952).

Es sei  $G$  eine die volle Translationsgruppe  $T$  umfassende Untergruppe der vollen Bewegungsgruppe des  $k$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R_k$ . Für zwei Polyeder  $A$  und  $B$  aus  $R_k$  werden sodann die Relationen „ $G$ -gleich“, „ $G$ -zerlegungsgleich“ und „ $G$ -ergänzungsgleich“ im klassischen Sinne, jedoch unter sinngemäßer Beschränkung auf die Bewegungen der Gruppe  $G$  erklärt. Verf. zeigt, daß zwei  $G$ -ergänzungsgleiche, eigentliche Polyeder  $A$  und  $B$  des  $R_k$  immer auch  $G$ -zerlegungsgleich sind. Damit wird ein von J. P. Sydler [Commentarii math. Helvet. 16, 266—273 (1944)] für die volle Bewegungsgruppe des  $R_3$  gefundenes Ergebnis in dem angedeuteten Sinne verallgemeinert, doch ist es nicht ohne weiteres möglich, die Beweiskonstruktion des Sonderfalles auf den höher-dimensionalen Fall zu übertragen. Der Beweis gelingt jedoch unter Verwendung eines Sydler'schen Gedankens durch eine neue Einteilung der Polyeder in sogenannte Zylinderklassen sowie durch die Heranziehung eines vom Verf. (dies. Zbl. 41, 472) stammenden Satzes, wonach inhaltsgleiche Parallelotope  $T$ -zerlegungsgleich sind. — Weiter werden zwei Polyeder  $A$  und  $B$  als „ $G$ -selbstergänzungsgleich“ bezeichnet, wenn sie durch die Hinzufügung je gleich vieler mit  $A$  und  $B$  je  $G$ -zerlegungsgleicher Polyeder in  $G$ -zerlegungsgleiche Polyeder übergehen. Verf. zeigt sodann, daß zwei  $G$ -selbstergänzungsgleiche eigentliche Polyeder aus  $R_k$  immer auch  $G$ -zerlegungsgleich sind.

R. Inzinger.



Moser, Leo: On the different distances determined by  $n$  points. Amer. math. Monthly **59**, 85—91 (1952).

Zwischen den durch  $n$  Punkte der Ebene bestimmten Strecken können viele kongruente vorkommen, so daß die Anzahl  $A$  der verschiedenen Abstände erheblich unter die Gesamtstreckenzahl  $\binom{n}{2}$  sinken kann. Anschließend an ein Ergebnis von Erdős [Amer. Math. Monthly **53**, 248—250 (1946)] wird hier gezeigt, daß  $A > \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{n^2}{9}} - 1$  ausfällt. L. Fejes Tóth.

Breidenbach, W.: Über ähnliche seitengebundene Dreiecke. Math.-phys. Semesterber. **2**, 231—237 (1952).

Thébault, Victor: Sur la géométrie du triangle et du tétraèdre. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **66**, 5—12 (1952).

( $\omega$ ) sei ein Kreis, für den die Potenzen der Ecken  $A, B, C$  eines Dreiecks  $T$  seiner Ebene die Werte  $k^2 l^2, k^2 m^2, k^2 n^2$  haben ( $l^2, m^2, n^2$  gegeben,  $k$  ein beliebiger Koeffizient). Verf. beweist: Der trilineare Pol der Chordale der Kreise ( $O$ ), ( $\omega$ ) fällt zusammen mit dem Potenzpunkt der Kreise, die durch  $B$  und  $C$ ,  $C$  und  $A$ ,  $A$  und  $B$  gehen und die Kreise  $(A, kl), (B, km), (C, kn)$  orthogonal schneiden. Ein analoger Satz gilt, wie Verf. zeigt, für ein Tetraeder. Von beiden Sätzen entwickelt Verf. Folgerungen und Sonderfälle. M. Zacharias.

Thébault, Victor: Perspective and orthologic triangles and tetrahedrons. Amer. math. Monthly **59**, 24—28 (1952).

Wir betrachten zwei perspektive Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$  mit der Eigenschaft, daß die von  $A, B$  und  $C$  auf  $B'C', C'A'$  bzw.  $A'B'$  gefällten Lote durch einen Punkt  $O$  und die von  $A', B'$  und  $C'$  auf  $BC, CA$  bzw.  $AB$  gefällten Lote durch einen Punkt  $O'$  hindurchgehen. Verf. gibt einen einfachen Beweis des bekannten Satzes (sowie seines räumlichen Analogons), daß  $O, O'$  und das Zentrum der Perspektivität auf einer zu der Achse der Perspektivität senkrechten Geraden liegen. Ferner werden mehrere Folgerungen hervorgehoben, die sich aus den Beweisen ergeben. L. Fejes Tóth.

Court, N. A.: Isogonal conjugate points for a triangle. Math. Gaz. **36**, 167—170 (1952).

Sind  $M, M'$  zwei isogonal konjugierte Punkte für ein Dreieck  $(T) \equiv ABC$ , so sind die Seiten der Fußpunktdreiecke von  $M', M$  für  $(T)$  die Polaren der Punkte  $M, M'$  für die Kreise um die Ecken von  $(T)$ , die zu dem Fußpunktkreis von  $M, M'$  orthogonal sind. Sind  $PQR, P'Q'R'$  die Fußpunktdreiecke von  $M, M'$ , so liegen die Punkte  $U = (QR', Q'R), V = (RP', R'P), W = (PQ', P'Q)$  auf der Geraden  $MM'$ . Das „kopedale Dreieck“ ( $M_0$ ) mit den Ecken  $P_0 = (QR, Q'R'), Q_0 = (RP, R'P'), R_0 = (PQ, P'Q')$  ist zu  $(T)$  perspektiv; das Perspektivitätszentrum ist der Fernpunkt der zu  $MM'$  senkrechten Richtung. Die trilineare Polare dieses Fernpunktes bezüglich  $(T)$  trifft die Seiten  $BC, CA, AB$  von  $(T)$  in den Schnittpunkten mit  $AU, BV, CW$ . Die Geraden  $AM, BM, CM$  treffen die entsprechenden Seiten des Fußpunktdreiecks von  $M$  in den Ecken eines Dreiecks, das zu dem analogen Dreieck für  $M'$  perspektiv ist; das Perspektivitätszentrum ist der Fernpunkt von  $MM'$ . M. Zacharias.

Marmion, A.: Sur les couples de points isogonaux de milieu donné. Mathesis **61**, 10—20 (1952).

Ein Paar isogonaler Punkte (Winkelgegenpunkte) in einem Dreieck ist ein Paar reeller oder imaginärer Brennpunkte eines dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitts. Ein beliebiger Punkt  $M$  der Dreiecksebene ist Mittelpunkt eines einzigen Inkegelschnitts und Mitte von zwei Paaren isogonaler Punkte, den beiden Paaren von Brennpunkten des Kegelschnitts. Verf. dehnt die bekannten Eigenschaften dieser beiden Paare isogonaler Punkte im Dreieck auf das Tetraeder aus: Es gibt im Tetraeder  $A_1 A_2 A_3 A_4$  für jeden Punkt  $M$  vier Paare isogonaler Punkte mit der Mitte  $M$ . Ihre Trägergeraden bilden ein orthozentrisches Vierkant, d. h. die

Ebene von je zweien von ihnen steht auf der Ebene der beiden andern senkrecht. Sie sind parallel den Asymptoten der Biquadratik durch die acht Mittelpunkte  $O_i$  der vierfach berührenden Kugeln und den Punkt  $M$ . Die Quadriken durch die acht Punkte der vier Paare schneiden die Fernebene in demselben Kegelschnittnetz wie die Quadriken durch die acht Punkte  $O_i$ . Die acht Punkte der vier Paare liegen auf den sechs gleichseitig hyperbolischen Zylindern, deren jeder eine Kante des Tetraeders enthält und die durch  $M$  gelegten Parallelebenen zu den winkelhalbierenden Ebenen jener Kante zu Asymptotenebenen hat. Die vier Trägergeraden liegen auf den vier Kegeln mit dem Scheitel  $M$ , deren jeder durch eine Gerade  $MA_i$  und durch die Parallelen durch  $M$  zu den vier Winkelhalbierenden des Trieders ( $A_i$ ) geht. Für besondere Lagen von  $M$  (Schwerpunkt, Umkugelmittelpunkt) ergeben sich weitere besondere Eigenschaften.

*M. Zacharias.*

**Toscano, L.: Relations métriques de la géométrie du triangle par rapport aux centres isogones et isodynamiques.** *Mathesis* 61, 20—28 (1952).

Wenn man über den Seiten  $BC, CA, AB$  des Dreiecks  $ABC$  nach außen und innen die gleichseitigen Dreiecke  $BCA', CAB', ABC'$  und  $BCA'', CAB'', ABC''$  konstruiert, so schneiden sich  $AA', BB', CC'$  in einem Punkt  $V$  und  $AA'', BB'', CC''$  in einem Punkt  $V'$ , den beiden „isogonischen Punkten“. Sie sind die Winkelgegenpunkte der „isodynamischen Punkte  $W, W'$ “, der Schnittpunkte der drei „Apollonischen Kreise“, der Kreise durch je eine Ecke und die Fußpunkte der von ihr ausgehenden Innen- und Außenwinkelhalbierenden.  $AA' = BB' = CC' = a$  und  $AA'' = BB'' = CC'' = t'$  sind die beiden „Torricellischen Strecken“.  $G$  sei der Schwerpunkt,  $H$  der Höhenschnittpunkt,  $O$  der Umkreismittelpunkt und  $K$  der Lemoinesche Punkt (d. h. der Schnittpunkt der Winkelgegengeraden der Seitenhalbierenden). — Verf. untersucht die metrischen Beziehungen der isogonischen und isodynamischen Punkte zu anderen merkwürdigen Punkten und findet u. a. In den isogonischen Punkten schneiden sich die Kreise, die die Strecken zwischen den Ecken und den Mittelpunkten der gleichseitigen inneren und äußeren Aufsatzdreiecke zu Durchmesser haben.  $(VV'EK)$  und  $(WW'OK)$  sind harmonische Würfe ( $E$  die Mitte von  $GH$ ). Die Kreise  $VV'G, VV'H$  berühren die Eulersche Gerade in  $G$  und  $H$ .

*M. Zacharias.*

**Thébault, Victor: A propos du tranchet d'Archimède.** *Ann. Soc. sci. Bruxelles*, I. Sér. 66, 41—48 (1952).

$AB$  sei eine Sehne eines Kreises  $(O, R)$ . Zwei beliebige Kreise  $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$  berühren  $(O, R)$  in  $A$  und  $B$  von innen. Die Kreise  $(\omega_1, \varrho_1), (\omega_2, \varrho_2)$  berühren zugleich die Kreise  $(O, R), (O_1, R_1), (O_2, R_2)$ . Es sei  $OO_1 = a, OO_2 = b, \vartheta = (\angle AOB)$ ,  $\varphi = (\angle O\omega_1, AB)$ . Dann ist  $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{2}{\cos^2 \vartheta} \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left( \frac{1 + \sin^2 \vartheta}{R} \right) \right]$ . Verf. entwickelt weitere Eigenschaften dieser Figur, die in den Archimedischen Arbelos übergeht, wenn  $AB$  ein Durchmesser des Kreises  $(O, R)$  ist. — Im Anschluß an diese Note teilt Verf. folgenden Satz der Dreiecksgeometrie mit: Die Höhenschnittpunkte der Fußpunktdreiecke der Mittelpunkte der vier Berührungskreise des Dreiecks liegen auf der Hyperbel von Jerabek (dem isogonalen Bild der Eulerschen Gerade).

*M. Zacharias.*

**Michajlov, G. K.: Zur Geometrie des fiktiven Untergrundes.** *Priklad. Mat. Mech.* 16, 511—512 (1952) [Russisch].

Aus physikalischen Erwägungen heraus sucht der Verf. nach besonders lockerem Kugelpackungen, d. h. nach solchen, wo der Quotient des Inhalts der Zwischenräume zum Gesamtinhalt, die sog. „Porosität der Packung“ möglichst groß ist. Nimmt man diejenige Packung, bei der die Kugeln den Tetraedern einer regulären Tetraederteilung des  $R_3$  eingeschrieben sind, so hat diese Packung, bei der jede Kugel von 4 Nachbarn berührt wird, die Porosität 0,6599. Verf. erhält hieraus eine noch lockere Anordnung von der Porosität 0,876, dadurch daß er jede Kugel durch 4 kleinere, ihr einbeschriebene, sich gegenseitig berührende von Tetraederlage ersetzt.

*W. Burau.*

**Jakobi, R.:** Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 30 (1952).

● **Durand, A.:** Sur les cercles bitangents à la parabole. Paris: Librairie Vuibert 1952. 32 p.

Berührt ein Kreis  $(O, r)$  die Parabel  $y^2 = 2px$  in zwei (bezüglich der Achse spiegelbildlichen) Punkten, so ist  $r^2 = 2p \cdot FO$  ( $F$  = Brennpunkt). Die Kreise, die eine Parabel doppelt berühren, bilden also eine von einem Parameter  $FO$  abhängige Mannigfaltigkeit. Die Eigenschaften dieser Familie von Kreisen bilden den Gegenstand der Monographie. Wächst der Parameter  $FO$  von Null bis Unendlich, so geht gleichzeitig auch der Radius von Null bis Unendlich. Solange  $FO < p/2$  ist, sind die Berührungspunkte imaginär, die Berührungssehne aber ist reell und liegt zwischen der Leitlinie und der Scheiteltangente. Kreis und Berührungssehne haben Eigenschaften, die sie als Verallgemeinerung von Brennpunkt und Leitlinie erscheinen lassen, z. B.: Die Tangente von einem Parabelpunkt an einen doppelt-berührenden Kreis ist gleich dem Abstand des Punktes von der Berührungssehne. Den größten Teil der Arbeit bilden Konstruktionsaufgaben und Bestimmungen geometrischer Örter.

*M. Zacharias.*

**Jonas, Hans:** Deutung einer birationalen Raumtransformation im Bereiche der sphärischen Trigonometrie. *Math. Nachr.* **6**, 303—314 (1952).

Verf. betrachtet im metrischen  $R_3$  die birationale Transformation  $x + x' + yz' + zy' = 0$ ,  $y + y' + xz' + xz = 0$ ,  $z + z' + xy' + yx' = 0$ , die die beiden Koordinatentripel involutorisch verbindet. Schränkt man den Wertebereich in geeigneter Weise ein, so können  $x, y, z$  und  $x', y', z'$  als Seitenkosinus zweier sphärischer Dreiecke mit supplementären Winkeln gedeutet werden. Bei konstant gehaltenen Sinusverhältnissen kann man von den Transformationsformeln aus zur Eulerschen Differentialgleichung gelangen und in neuer origineller Weise die elliptischen Funktionen für die sphärische Trigonometrie verwerten. Weiterhin wird ein Gedanke von E. Study, der eine ternäre orthogonale Substitution und ein sphärisches Dreieck durch gewisse Formeln aufeinander bezog, unter der Voraussetzung, daß ein reelles Dreieck mit supplementären Winkeln existiert, auf eine neue Weise begründet und veranschaulicht: die drei Seitenkosinus  $x, y, z$  definieren nämlich als Elemente der Hauptdiagonale die orthogonale Matrix einer räumlichen Drehung, und es gilt der Satz: „Zwei sphärischen Dreiecken mit supplementären Winkeln entsprechen zwei Drehungen des Raums, bei denen sich die vier Eulerschen Parameter der einen wie die reziproken Parameter der anderen verhalten“. Geometrisch ergibt sich, daß die aus den Seiten des ersten Dreiecks konstruierte Drehung unmittelbar und auf anschauliche Weise das zweite Dreieck mit den supplementären Winkeln erzeugt. Schließlich wird noch das Problem des einem sphärischen Dreieck einzubeschreibenden Dreiquadranten-dreiecks behandelt und der Satz bewiesen: „Zur Konstruktion der beiden einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Dreiquadrantendreiecke hat man auf den Seiten von den Mitten aus in dem einen oder dem anderen Umlaufsinne die halben Seiten desjenigen Dreiecks, seine Realität vorausgesetzt, abzutragen, dessen Winkel die Supplemente zu denen des gegebenen sind“. — Die Arbeit ist veranlaßt durch ein den oben genannten Transformationsformeln ähnliches System von Beziehungen, das bei einer Untersuchung des Verf. über die Biegungstheorie von Flächen zweiten Grades auftrat. (Vgl. dies. Zbl. **11**, 418, § 3 der Arbeit.)

*E. Löffler.*

## Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

**Lagrange, René:** Quelques problèmes sur les produits d'inversions. *Ann. sci. Ecole norm. sup., III. Sér.* **69**, 83—108 (1952).

Die Aufeinanderfolge dreier ebener Spiegelungen ist eine Gleitspiegelung, deren Achse durch 2 Höhenfußpunkte des gegebenen Dreiecks bestimmt ist. Im  $R_{n-1}$  ( $n > 3$ ) ist jedoch nicht immer das Produkt von  $n$  Hyperebenenspiegelungen gleich einer  $180^\circ$ -Umwendung um eine Gerade, verbunden mit einer Translation längs derselben. Verf. stellt sich in der vorliegenden Arbeit die Aufgabe, die speziellen  $n$ -eder anzugeben, für die die Aufeinanderfolge der Seitenspiegelungen eine Transformation obiger Art ist. Es erweist sich als zweckmäßig, das Problem gleich konform zu verallgemeinern, d. h. zu fragen, wann das Produkt von  $n$  Inversionen gleich einer konformen Umwendung um einen Kreis ist, verbunden mit zwei Inversionen um Sphären, die orthogonal zu diesem Kreis sind. Hiermit ist aber der Anschluß an frühere Untersuchungen des Verf. gewonnen (siehe dies. Zbl. **36**, 104; **39**, 370). Es kommt dann alles darauf an, zu untersuchen, ob es in dem gegebenen Inversionsprodukt  $U_n \dots U_1$  invariante Sphären gibt und wie man diese findet. Dazu müssen die Elemente  $t_{ij}$  der dem Inversionsprodukt zugeordneten



Matrix  $T = (t_{ij})$  eine Reihe von  $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$  quadratischen Relationen erfüllen, die besagen, daß die Matrix  $T - T'$  den Rang 2 oder 0 hat. In dem Spezialfall, wo es sich um  $n$  Hyperebenen eines Simplex handelt, verbindet dann die fragliche Umwendungsachse die Höhenfußpunkte auf der ersten und letzten Hyperebene. Analoges gilt für den allgemeinen konformen Fall. Die weiteren Größen, wie Drehwinkel und Translationsgröße, die zur Reduktion der Transformation bei Vorliegen obiger Grundbedingungen noch benötigt werden, finden sich dann durch Rechnung.

W. Burau.

Musselman, J. R.: On the rectangular hyperbola. Amer. math. Monthly 59, 11—19 (1952).

Es seien  $A_1, A_2$  und  $A_3$  drei Punkte auf der gleichseitigen Hyperbel  $xy = 1$ ,  $h_1$  die durch  $A_1$  gehende Höhenlinie im Dreieck  $A_1 A_2 A_3$ . Die Gerade  $H_1$  durch  $A_1$ , die mit  $h_1$  und den Asymptoten gleichschenklige Dreiecke bestimmt, nennt Verf. Neigungslinie („slant-line“). Über diese Neigungslinien  $H_i$  und metrisch-invariant damit zusammenhängende Punkte und Linien wird eine Reihe von interessanten Sätzen analytisch abgeleitet.

R. W. Weitzenböck.

Rozenfel'd, B. A.: Zur Klassifikation der Kollineationen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 195—196 (1952) [Russisch].

A collineation in the real 3-dimensional projective space (in homogeneous coordinates) is represented by  $\lambda A$  where  $A$  is a regular 4-rowed real matrix and  $\lambda$  an arbitrary real number  $\neq 0$ . The author writes down the 20 non-similar types of canonical forms of  $A$  according to the theory of elementary divisors and discusses the geometrical characteristics (fixed points, fixed lines etc.) of the corresponding collineations, pointing out some cases which have been omitted in two recent Russian text-books on analytical and projective geometry.

H. Schwerdtfeger.

Pickert, Günter: Der Satz vom vollständigen Viereck bei kollinearen Diagonalepunkten. Math. Z. 56, 131—133 (1952).

Aus den projektiven Verknüpfungssätzen in der Ebene und aus dem Satz V, daß der vierte harmonische Punkt zu drei Punkten einer Geraden mit Hilfe der Vierseitskonstruktion durch die gegebenen drei Punkte eindeutig bestimmt ist, folgt, daß wenn in einem vollständigen Viereck die drei Nebenecken kollinear sind, dies in jedem Viereck der Fall ist. Beim Beweis ist der Satz V nicht entbehrlich.

R. Moufang.

Skopec, Z. A.: Kurven, die durch die Desargues-Konfiguration bestimmt sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 277—280 (1952) [Russisch].

Ein allgemeines Fünfeck der 5 Punkte  $A_1, \dots, A_5$  im  $P_3$  gibt bekanntlich, mit einer allgemeinen Ebene  $\alpha$  geschnitten, zu einer Desargueskonfiguration  $K_D$  Veranlassung. Andererseits geht durch die  $A_i$  ein Bündel von  $\infty^2$  Normkurven  $C^3$ ; diese bestimmen ihrerseits, wie man seit Reye weiß, in ihren Schnitten mit der Ebene  $\alpha$   $\infty^2$  Punktetripel, die lauter bezüglich eines festen Kegelschnitts  $C^2$  autopolare Dreiecke ergeben. Bezüglich  $C^2$  ist dann auch  $K_D$  zu sich selber polar. Der erste Satz der vorliegenden Arbeit besagt dann, daß  $C^2$  dann und nur dann nullteilig ist, wenn sie von wenigstens 2 Geraden der Konfiguration  $K_D$  imaginär geschnitten wird. Im allgemeinen wird  $\alpha$  von keiner der  $\infty^2$  Bündelkurven  $C^3$  berührt; geschieht dies doch, so werden durch  $\alpha$  gleich  $\infty^1$  Kurven berührt, und zwar geschieht die Berührung in den Punkten von  $C^2$ . Von den ausgeschnittenen Dreiecken entarten dann  $\infty^1$ , d. h. außer dem Berührungspunkt  $M$  auf  $C^2$  schneidet eine solche Berührende  $C^3$  nur noch einen Punkt  $M'$  aus  $\alpha$  aus. Der geometrische Ort der Punkte  $M'$  erweist sich als eine mit  $K_D$  verbundene unikursale Kurve 6. Grades, die in den Konfigurationspunkten singular ist. Ist  $K_D$  einer der 3 Ausartungsfälle der Desargueskonfiguration von niederem Rang, die man durch speziellere Lage von  $\alpha$  erreichen kann, so entartet die Kurve 6. Grades jeweils in eine vom 5., 4. oder 3. Grade.

W. Burau.

Inzinger, Rudolf: Eine projektiv invariante Konfiguration von Linienelementen dritter Ordnung. Monatsh. Math. 56, 38—48 (1952).

Nel piano proiettivo un elemento curvilineo del 3° ordine di centro  $T$  e tangente  $t$  è individuato da  $\infty^1$  coniche aventi contatto del 3° ordine fra loro in  $T$  e aventi la tangente  $t$ ; o anche dalla proiettività che esse determinano fra la punteggiata di sostegno  $t$  e il fascio di centro  $T$  in cui si corrispondono  $T$  e  $t$  [correlazione in  $(T, t)$ ]. — Due elementi del 3° ordine in posizione generica hanno due invarianti (E. Bompiani, questo Zbl. 13, 320). Ad essi si possono sostituire tre invarianti legati da una relazione nel modo seguente. Siano i due elementi  $E_{12}$ ,  $E_{21}$  definiti da  $(T_1, t_2)$  e da  $(T_2, t_1)$  e dalle correlazioni in essi. Sia inoltre  $T_3 \equiv t_1 \cdot t_2$  e  $t_3 \equiv T_1 T_2$ . In dette correlazioni a  $T_3$  corrisponde una retta  $p_1$  per  $T_1$  e una retta  $p_2$  per  $T_2$  e a  $t_3$  un punto  $P_2$  su  $t_2$  e un punto  $P_1$  su  $t_1$ ; si ponga  $p_1 \cdot p_2 \equiv Z$ ,  $P_2 P_3 \equiv z$ ,  $T_3 Z \equiv p_3$ ,  $t_3 \cdot z \equiv P_3$ ,  $p_i \cdot t_i \equiv Q_i$ . I birapporti  $J_i = (P_i Q_i T_{i+1} T_{i+2})$ , con  $J_1 J_2 J_3 = -1$  sono gli invarianti cercati. — L'omologia di centro  $P_3$ , asse  $p_3$ , invariante  $J_3$  muta  $E_{12}$  in  $E_{21}$ . La stessa configurazione, con permutazioni circolari, individua tre coppie di elementi del 3° ordine  $E_{12}, E_{21}$ ;  $E_{23}, E_{32}$ ;  $E_{31}, E_{13}$  e i loro invarianti dipendono soltanto dai loro elementi del 2° ordine. — La configurazione determina una conica avente  $T_1 T_2 T_3$  per triangolo autopolare e  $Z, z$  per polo e polare; la polarità rispetto a questa conica è l'unica che lascia la configurazione invariante scambiando gli elementi di una coppia. — Seguono significati metrici degli invarianti, e lo studio delle proprietà affini della configurazione. E. Bompiani.

Thomissen, F. und G. Tromp: Über einige Konstruktionen, die auf den Sätzen von Pascal und Sturm beruhen. *Elemente Math.* 7, 5—8 (1952).

● Locher-Ernst, Louis: Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven. (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus.) Basel: Verlag Birkhäuser 1952. 85 S. Brosch. Schw. Fr. 12,50.

Der Ausdruck „Freie Geometrie“ ist in diesem interessanten und eigenartigen Buch in dem Sinne gebraucht, daß die Darstellung frei ist von willkürlichen Bezugssystemen und damit auch frei von jeder Art von Rechnung. Diese freie Geometrie der Kurven und Bewegungen wird aus dem unmittelbar Anschaulichen heraus in strenger Begriffsbildung und mit logisch einwandfreier Schlußweise entwickelt. Sie ist wesentlich verschieden von dem, was etwa J. Hjelmslev oder E. Cesàro als „Natürliche Geometrie“ bezeichnet haben, oder H. Grassmann in seinen „Grundzügen zu einer rein geometrischen Theorie der Kurven“ gemeint hat. Sie nimmt gewisse Gedanken von Ch. von Staudt und von A. F. Möbius auf, stützt sich auf Untersuchungen von A. Kneser (1889 und 1893) und C. Juel (1913—1915) und führt in ein Gebiet der Geometrie ein, das heute nur wenig gepflegt wird. Das vorliegende Heft, das offenbar später eine Fortsetzung finden soll, behandelt nur die projektiv-topologischen Eigenschaften der krummen Gebilde in der Ebene. Im ersten Abschnitt werden die elementaren Sätze und Begriffe der projektiven Geometrie der Ebene entwickelt, die zum Aufbau einer freien Geometrie der Kurven notwendig sind. Weitere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt. Der zugrunde liegende Kurvenbegriff ist wesentlich allgemeiner als der Begriff der algebraischen oder auch der analytischen Kurve. Deshalb werden für die Untersuchung auch keine analytischen Funktionen verwendet. Vielmehr hat Verf. neue und originelle Methoden und Begriffe entwickelt, die es gestatten, die den Verlauf von ebenen Kurven regelnden Gesetze begrifflich streng und einwandfrei abzuleiten und eine Übersicht über die einfachsten Kurvenformen zu gewinnen. Manche Kurveneigenschaften, die man früher für typisch algebraisch hielt, erweisen sich hier als von viel allgemeinerer Natur. Die wichtigsten Begriffe, die Verf. benutzt und aus anschaulichen Gegebenheiten heraus scharf definiert und gegeneinander abgrenzt, sind der elementare und der einfache Bogen, die Elementarkurve, der  $C$ -Bogen und die Eilinie sowie der Spiralenbogen. Die Struktur dieser verschiedenen Kurvenformen und ihrer Singularitäten wird erschöpfend dargestellt und an Beispielen erläutert. Zu jeder Form wird auch die polare (duale) Gegenform betrachtet. Die Fassung führt zu einer vollständigen Übersicht über die Gebilde zweiter und dritter Ordnung bzw. Klasse und ihre Erzeugung; sie gibt auch noch gewisse Grundsätze für die Erzeugung von Gebilden vierter und fünfter Ordnung bzw. Klasse. Der ungeheure Formenreichtum, der erfaßt ist, zeigt sich in etwa 170 vorzüglich ausgeführten Zeichnungen, die das Verständnis der gedanklichen Operationen wesentlich erleichtern. Der Hinweis auf ungelöste Probleme führt den Verf. zu der Einsicht, „daß man von den Gesetzen, die im Reiche der ebenen Formen walten, noch recht wenig erkannt hat“. Eine Anzahl Aufgaben von verschiedenem Schwierigkeitsgrad bilden den Schluß des Buches. Es wendet sich nach den Worten des Verf. an Leser, die sich für einen strengen Aufbau der geo-

metrischen Formenlehre interessieren, an Naturwissenschaftler, die sich mit den in der Natur auftretenden Gestalten und ihren Metamorphosen beschäftigen und an Künstler, die mit der Freude an den Formen auch erkennend in die Formensprache eindringen möchten.

*E. Löffler.*

### Algebraische Geometrie:

**Turri, Tullio:** *Sulle trasformazioni birazionali del piano con curva di punti uniti di genere minore di 2.* Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **21**, 11—18 (1952).

L'A. démontre qu'une transformation birationnelle du plan ne peut avoir plus d'une courbe de points unis de genre supérieur à 0. Si la transformation a une courbe de points unis de genre supérieur à 1, c'est une transformation de de Jonquières, ou de Geiser, ou de Bertini. Si la courbe de points unis a le genre 1, elle est réductible à une cubique. Si les courbes de points unis sont rationnelles, elles sont réductibles à un nombre fini de points.

*L. Godeaux.*

**Turri, Tullio:** *Sul numero dei circuiti delle curve di punti uniti nelle involuzioni piane reali del secondo ordine.* Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **21**, 27—31 (1952).

L'A. démontre que le nombre des circuits de la courbe unie d'une involution réelle de de Jonquières peut prendre les valeurs  $1, 2, \dots, p + 1$ , où  $p$  est le genre de cette courbe unie. Si  $p$  est pair, ce nombre de circuits peut aussi être nul. Pour une involution réelle de Geiser, le même nombre peut prendre les valeurs de 0 à 4 et pour une involution réelle de Bertini, les valeurs de 1 à 5.

*L. Godeaux.*

**Turri, Tullio:** *Una proprietà delle trasformazioni antibirazionali involutorie in uno spazio qualunque.* Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **21**, 40—42 (1952).

L'A. démontre qu'une transformation involutive antibirationnelle de l'espace  $S_n$  est le produit d'une transformation birationnelle involutive réelle par la transformation des conjugués (qui fait correspondre à un point imaginaire son conjugué).

*L. Godeaux.*

**Atiyah, M. F.:** *A note on the tangents of a twisted cubic.* Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 204—205 (1952).

Verf. benutzt die Darstellung der Tangenten einer kubischen Raumkurve  $C^3$  durch die Punkte einer rationalen normalen  $C^4$  der Kleinschen Quadrik  $Q$  des fünfdimensionalen Raumes, um einige Eigenschaften der  $C^3$  und der  $C^4$  zu beweisen. Die  $C^4$  liegt auf einer Veroneseschen Fläche  $\varphi$  (deren Punkte Bilder der Sehnen der  $C^3$  sind), und die Projektion von  $\varphi$  auf die Hyperebene  $\pi$  der  $C^4$ , vom Pole  $P$  von  $\pi$  in bezug auf  $Q$  aus, deckt sich mit der Fläche, die der Ort der Schnittpunkte von zwei Schmiegungebenen der  $C^4$  ist. Es folgt ein neuer Beweis des Satzes: Vier Tangenten der  $C^3$  besitzen zwei zusammenfallende Stützgeraden nur, wenn ihre Berührungspunkte ein äquianharmonisches Doppelverhältnis bilden.

*E. Togliatti.*

**Segre, Beniamino:** *Una proprietà caratteristica in grande delle curve giacenti su di una quadrica.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **12**, 374—378 (1952).

In einem projektiven Raum von drei (reellen oder komplexen) Dimensionen seien sechs Punktreihen gegeben, deren Nullpunkte alle in einer Ebene  $\alpha$  liegen, welche nicht tangential zu einer der Punktreihen sei. Der bewiesene Satz lautet: Die sechs Schnittpunkte irgendeiner  $\alpha$  benachbarten Ebene mit den sechs Punktreihen liegen dann und nur dann auf einem Kegelschnitt, wenn die sechs Punktreihen auf einer Quadrik liegen, welche  $\alpha$  nicht tangiert. Hieraus folgt, daß die algebraischen Kurven der Ordnungen  $\geq 6$  auf einer Quadrik die einzigen algebraischen Raumkurven sind, welche sechsfach schneidende Kegelschnitte besitzen. Im Gegensatz hierzu werden zwei Beispiele angegeben von algebraischen Raumkurven 10. Ordnung, welche auf keiner Fläche 3. Ordnung liegen können und trotzdem von einer Ebene in allgemeiner Lage in 10 Punkten geschnitten werden, die auf einer ebenen Kurve 3. Ordnung liegen.

*H. Guggenheimer.*



**Gallarati, Dionigi:** Sulle superficie del quinto ordine dotate di punti tripli. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. nat., VIII. Ser. 12, 70—75 (1952).

Ref. hat bewiesen, daß eine Fläche 5. Ordnung  $F^5$ , die einen dreifachen Punkt besitzt, nicht mehr als 24 weitere Doppelpunkte aufweisen kann (dies. Zbl. 13, 222). Verf. betrachtet hier Flächen  $F^5$  mit  $q \geq 2$  dreifachen Punkten.  $X(q)$  sei die höchstmögliche Anzahl weiterer Doppelpunkte. Er findet  $q \leq 5$  und  $X(2) = 20$ ,  $X(3) = 16$ ,  $X(4) = 4$ ,  $X(5) = 0$ . Die Methode der Untersuchung ist dieselbe, die auch von Ref. benutzt worden ist, und besteht in der Projektion der Fläche  $F^5$  aus einem ihrer dreifachen Punkte auf eine Doppelebene und in der Diskussion der möglichen Arten der Verzweigungskurve. Besonders bemerkenswert ist eine Fläche  $F^5$  mit drei dreifachen Punkten und 16 weiteren Doppelpunkten.

*E. Togliatti.*

**Gherardelli, Francesco:** Osservazioni sul gruppo dei punti  $(k+1)$ -pli di una  $g_n^k$  sopra una curva algebrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 398—401 (1952).

Soit sur une courbe  $C$  une  $g_n^r$ , l'A. désigne comme groupes  $k$ -jacobiens les groupes de points  $(k+1)$ -uples des  $g_n^k$  contenues dans  $g_n^r$ . En général (pour  $r > k+1$ ) ces groupes ne constituent pas des séries linéaires; mais pour des courbes  $C$  et des séries  $g_n^r$  particulières, il peut arriver que les groupes  $k$ -jacobiens forment une série linéaire. L'étude de ce fait pour  $k=1$  a été accomplie par G. Gherardelli et par B. Segre. L'A. donne ici l'extension pour  $k$  quelconque des résultats connus pour  $k=1$ .

*G. Ancochea.*

**Nollet, Louis:** Sopra la serie di Severi d'una superficie algebrica. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 273—276 (1952).

Si dimostra con mezzi trascendenti che l'ordine della serie di Severi di una superficie algebrica non può essere uguale ad uno.

*F. Gaeta.*

**Burniat, Pol:** Sur les surfaces canoniques quadruples. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 38, 19—23 (1952).

Dans un autre travail (v. ce Zbl. 39, 164) l'A. avait basé un résultat, important pour le reste, sur une propriété exprimant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une certaine courbe soit celle de diramation effective d'une surface. Mais cette propriété était énoncée sous une forme incorrecte. Dans la Note présente l'A., sur un énoncé rectifié, donne une démonstration juste du dit résultat.

*G. Ancochea.*

**Turrin, Gino:** Infinitely near points on algebraic surfaces. Amer. J. Math. 74, 100—106 (1952).

L'A. donne, pour une surface  $F$  sur un corps quelconque de caractéristique nulle, une démonstration arithmétique (dans le sens de Zariski) du théorème établi dans le cas classique par B. Levi [Ann. Mat. pura appl., II. Ser. 26, 219—253 (1897)] concernant les suites infinies de points  $P_i$  infiniment voisins avec la même multiplicité  $\nu > 1$ . Il précise ce théorème dans ce sens qu'il prouve l'existence d'un entier  $p$  tel que, pour  $q > p$ , tout  $P_q$  se trouve sur une courbe  $\Gamma_q$  multiple d'ordre  $\nu$  pour la surface  $F_q$  qui contient  $P_q$ . De la démonstration il en résulte la possibilité de suites infinies non triviales ce qui est en contradiction avec un résultat que Derwidué (ce Zbl. 34, 86) avait utilisé dans sa réduction des singularités des surfaces au moyen de transformations cremoniennes du  $S_3$ .

*G. Ancochea.*

**Roth, L.: Some threefolds on which adjunction terminates.** Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 233—242 (1952).

L'A. cherche à étendre aux variétés  $V_3$  à trois dimensions les résultats classiques d'Enriques-Castelnuovo [Ann. Mat. pura appl. III. Ser. 6, 165 (1901)] sur les surfaces dont l'adjonction disparaît. On remarque que cette propriété est toujours vérifiée pour les  $V_3$  ayant un système anticanonique  $|A| = |-K|$  effectif. Une simple discussion, selon la dimension et la nature du système caractéristique de

$A$ , montre qu'on obtient des variétés unirationnelles ou représentables sur des espaces linéaires  $S_3$  doubles. F. Gaeta.

**Gaeta, Federico: Détermination de la chaîne syzygétique des idéaux matriciels parfaits et son application à la postulation de leurs variétés algébriques associées.** C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1833—1835 (1952).

Bekanntlich kann man für Hauptklassenideale die Kette der Syzygienmoduln leicht explizit angeben. Verf. gibt dasselbe für Matrixideale an, d. h. für Ideale, die durch die Determinanten höchster Zeilenzahl einer homogenen Matrix erzeugt werden. Im Anschluß daran läßt sich die Hilbertsche charakteristische Funktion und die Ordnung der Mannigfaltigkeit berechnen. Die genaueren Erklärungen und Beweise sollen in einer demnächst erscheinenden längeren Abhandlung durchgeführt werden. W. Gröbner.

**Behrens, Ernst-August: Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie.** Math. Z. **55**, 199—215 (1952).

In dem Buch von A. Weil, Foundations of algebraic geometry (Amer. math. Soc. Colloqu. Publ. **29**, New York 1946) wird für den Fall eines isolierten Schnittpunkts  $P$  zweier in einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $U^n$  der Dimension  $n$  gelegenen Mannigfaltigkeiten  $A^r$  und  $B^s$  eine Multiplizität  $\mu(A, B; P; U)$  erklärt, wobei noch vorauszusetzen ist, daß  $U^n$  in  $P$  nicht singular ist, daß die Dimensionsbeziehung  $r + s = n$  gilt und das Ganze im Raum  $S^N$  stattfindet. Verf. ersetzt die Dimensionsvoraussetzung durch die schwächere  $r + s \leq n$  unter Beibehaltung der übrigen Annahmen und gibt damit also eine Multiplizitätsdefinition, die auch im Falle zweier Kurven des  $S_3$  anwendbar ist. In weiterer Durchführung Severischer Ideen (s. z. B. Severi, dies. Zbl. **7**, 75) gelangt er dabei durch die folgende Übertragung zum Ziel: Man betrachte die den geordneten Punktepaaren des  $S^N$  zugeordnete Segresche Produktmannigfaltigkeit  $S^N \times S^N = S^{N;N}$ . Innerhalb von  $S^{N;N}$  liegt auch das Produkt  $A^r \times B^s$  von der Dimension  $r + s$  mit dem Punkt  $P'$  der von dem mit sich selbst gepaarten Punkt  $P$  herrührt. Eine weitere Mannigfaltigkeit  $M$  wird als Bildmenge der Punktepaare folgender Korrespondenz  $K$  gebildet: 2 Punkte  $X$  und  $Y$  gehören zu  $K$ , wenn ihre Verbindungsgerade einen allgemeinen, fest angenommenen Raum  $L^m$  von  $m = N - r - s$  Dimensionen trifft.  $M$  hat  $2N - r - s$  Dimensionen und ist ein gewisser linearer Schnitt der  $S^{N;N}$ ; der Durchschnitt  $A^r \times B^s \cap M$  hat ebenfalls  $P'$  als isolierten Punkt. Da somit die Voraussetzungen der Weilschen Theorie sich auf den Schnitt von  $A^r \times B^s$  und  $M$  innerhalb von  $S^{N;N}$  anwenden lassen, erklärt Verf.  $\mu(A \times B) \cdot M, P'; S^{N;N}$  als Multiplizität  $\mu$  des Schnittpunkts  $P$  von  $A^r$  und  $B^s$ .  $\mu$  ist dann gar nicht von einer gemeinsamen Einbettung der  $A$  und  $B$  abhängig und erfüllt, wie im einzelnen bewiesen wird, folgende Forderungen: 1) bei  $r + s = n$  stimmt die Multiplizität des Verf. mit der dann auch vorliegenden Weilschen überein. 2) Es gilt  $\mu(A \cdot B, P) = \mu(B \cdot A, P)$ . 3) Bei  $r = 0$ , d. h. wenn  $B$  ein Punkt ist, stimmt  $\mu$  mit der Vielfachheit dieses Punktes auf  $A$  überein. 4)  $\mu$  ist = 1 in dem zu erwartenden Falle, wenn  $A$  und  $B$  in  $P$  regulär sind und ihre Tangentialräume nur  $P$  gemein haben. 5)  $\mu$  ist invariant gegenüber einer in  $P$  sich regulär verhaltenden, birationalen Transformation einer Mannigfaltigkeit  $U$ , in die  $A$  und  $B$  eingebettet sind. Es wird jedoch an 2 Gegenbeispielen gezeigt, daß  $\mu$  nicht assoziativ ist; das bedeutet folgendes: will man eine Schnittmultiplizität für 3 Mannigfaltigkeiten  $A, B, C$  erklären, so kann es durchaus darauf ankommen, ob man die Vielfachheit zwischen  $A \cap B$  und  $C$  oder diejenige zwischen  $A$  und  $B \cap C$  berechnet. W. Burau.

**Kawahara, Yûsaku: On the differential forms on algebraic varieties.** Nagoya math. J. **4**, 73—78 (1952).

In einem Anhang zu seinem bekannten Buche über die Grundlagen der algebraischen Geometrie hat A. Weil, ausgehend von der allgemeinen Differentiationstheorie in Körpern, in groben Zügen den Anfang einer Theorie der Differentialformen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten entwickelt (S. 245—247). Dort findet sich als „ungelöstes Problem“ u. a. der folgende Satz: Jede Differentialform erster Gattung auf einer vollständigen algebraischen Mannigfaltigkeit  $U$  bestimmt auf einer beliebigen Teilmannigfaltigkeit  $V$  von  $U$  wiederum eine Differentialform erster Gattung. Verf. beweist hier diesen Satz unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß  $V$  eine einfache Teilmannigfaltigkeit von  $U$  ist. Die zusätzliche Voraussetzung ist nicht überflüssig, da der Weilsche Satz bei einer Charakteristik  $p \neq 0$  nicht mehr allgemein richtig ist, wie Verf. durch ein an F. K. Schmidt anknüpfendes Gegenbeispiel zeigt. Beweistechnisch hängt die vorliegende Arbeit eng mit zwei Arbeiten von

Koizumi zusammen, welcher den Weilschen Satz bewiesen hat unter der stärkeren Voraussetzung, daß  $U$  keine mehrfachen Punkte besitze (dies. Zbl. 38, 322; 43, 152).  
P. Roquette.

### Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

**Bieberbach, Ludwig:** Vom Vektor im mathematischen Schulunterricht. Math.-phys. Semesterber. 2, 257—262 (1952).

**Knudsen, H. Lottrup:** A note on a vector formula. Quart. appl. Math. 9, 431—435 (1952).

Der Gaußsche Integralsatz für eine skalare Feldfunktion  $\varphi(r)$  oder eine Felddyade  $\Phi(r)$  des Ortsvektors  $r$ :  $\int_A da \varphi = \int_V dv \nabla \varphi$  bzw.  $\int_A da \cdot \Phi = \int_V dv \nabla \cdot \Phi$  wird für ein wirbelfreies Feld durch Einführung der Vektorfunktion  $B(r)$  vermöge  $\varphi = r \cdot B$  bzw.  $\Phi = r B$  umgeformt in  $\frac{1}{2} \int_A da \cdot [r \varepsilon - \varepsilon r] \cdot B = \int_V dv B$ , wobei  $\varepsilon$  die Einheitsdyade ist. Das Volumenintegral der rechten Seite wird wie beim Gaußschen Integralsatz in ein Oberflächenintegral umgewandelt, aber man braucht nicht das Potential  $\varphi(r)$  von  $B(r)$  zu kennen. — Als Beispiel wird mit Hilfe dieses Theorems die Kraft auf einen Körper für eine Zentralkraft hergeleitet, und zwar für die Fälle, daß die Kraft umgekehrt proportional der Entfernung und daß sie umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung ist.  
R. Ludwig.

● **Krames, Josef L.:** Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer. 2. erw. Aufl. Wien: Franz Deuticke 1952. VIII, 267 S. mit 306 Abb. und 2 Tafeln. Brosch. DM 12,—, geb. DM 15,—.

Das auf der bewährten Tradition der von E. Müller inaugurierten „Wiener Schule“ fußende Lehrbuch der Darstellenden Geometrie, dessen Qualitäten bereits in der Besprechung der Erstauflage aus dem Jahre 1946 eingehend gewürdigt worden sind (dies. Zbl. 31, 180), und bei welchem vor allem die Verbindung mit den Elementen der ebenen, sphärischen und räumlichen Kinematik hervorzuheben ist, liegt jetzt in einer neuen, etwas erweiterten Ausgabe vor. Der unverändert gebliebene Lehrstoff wurde durch einen Anhang von 35 Seiten ergänzt, der 170 geschickt ausgewählte (vielfach auch kotierte) Übungsaufgaben enthält, die teils theoretischen Charakter tragen, teils technischen Anwendungsgebieten entnommen sind. Gelegentlich eingestreute Erläuterungen tragen zur Abrundung des behandelten Lehrgutes bei; insbesondere wurde auch die bekannte Papierstreifenkonstruktion einer durch konjugierte Durchmesser gegebenen Ellipse nachgetragen. — Das ausgezeichnete, deutlich auf die Bedürfnisse des Maschinenbauers zugeschnittene Werk hat durch die erfahrene Erweiterung zweifellos noch an Wert gewonnen.  
W. Wunderlich.

**Steward, G. C.:** Plane kinematics. Math. Gaz. 36, 111—120 (1952).

Eine gekürzte Wiedergabe der in dies. Zbl. 43, 154 besprochenen Arbeit mit etwas ausführlicheren historischen Angaben und einem kurzen Ausblick auf weitere Fragen.  
G. Lochs.

**Kiper, Gerd:** Synthese der ebenen Gelenkgetriebe. VDI-Forschungsh. Nr. 433, 36 S. (1952).

**Bowman, F.:** The plane four-bar linkage. Proc. London math. Soc., II. Ser. 54, 135—146 (1952).

Es werden die drei wesentlich verschiedenen Gelenkvierecke, die man aus vier Gliedern gegebener Länge bilden kann, gemeinsam betrachtet und zu einem einzigen Mechanismus vereinigt. Dadurch ist eine symmetrische Behandlung dieser Gelenksysteme mit elementaren Mitteln möglich. — Der gemeinsame Flächeninhalt der drei Girardschen Vierseite (konvexe Kreislage der drei Gelenkvierecke mit gleichem Umkreisradius, gleichem Inhalt und paarweise gleichen Diagonalen), sowie jener der drei gekreuzten Kreislagen wird für den Fall, daß das kürzeste Glied eine



Kurbel bildet (Grashof-Bedingung), ermittelt und untersucht. Zwischen den Quadraten der Seiten- und Diagonallängen der drei Gelenkvierecke bestehen kubische Gleichungen. Ihre Bilder in den drei Koordinatenebenen eines rechtwinkligen Dreibeins können als Normalrisse einer geeigneten ebenen kubischen Kurve des Raumes gedeutet werden. Ihre isolierten Punkte stehen zu den Girardschen Vierseiten in Beziehung. Schließlich werden noch extreme Werte der Diagonallängen untersucht und ein Verfahren zur Trennung der verschiedenen Getriebetypen gegeben.

H. R. Müller.

**Moroškin, Ju. F.:** Die Bestimmung der Konfigurationen von Mechanismen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 533—536 (1952) [Russisch].

Considérons une chaîne cinématique simple. Chacun de ses éléments solides est lié à un espace; la liaison entre deux éléments consécutifs — supposée holonome et de rang donné — peut se traduire au moyen des formules de passage du repère lié à l'un des éléments au repère lié à l'autre. L'A. étudie la structure de ces transformations d'espace à espace et donne des règles, formulées d'une manière abstraite, pour fixer les paramètres indépendants de la configuration. Il serait intéressant d'appliquer ces considérations générales à des exemples concrets. J. Kravtchenko.

**Müller, Hans Robert:** Isometrische Drehvorgänge und Beltramische Verbiegungen im elliptischen Raum. Math. Nachr. 7, 213—218 (1952).

$\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$  seien normierte Quaternionen, also z. B.  $\mathfrak{x}' = \mathfrak{P} \mathfrak{x} \mathfrak{P}$  mit  $|\mathfrak{x}| = |\mathfrak{x}'| = 1$  eine Drehung der Einheitskugel ( $\mathfrak{x}$  = Gangkugel,  $\mathfrak{x}'$  = Rastkugel).  $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$  können bekanntlich auch als normierte Punkte eines elliptischen Raumes angesehen werden, wenn die Entfernung  $\vartheta$  durch  $\cos \vartheta = \frac{1}{2}(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q} \mathfrak{P})$  definiert wird. — Mit der biegebar gedachten Fläche  $\mathfrak{P}_0(u, v)$  sei ein Strahlensystem  $\{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}\}$  starr gekoppelt. Es gilt in Analogie zur euklidischen Geometrie: Handelt es sich um ein Normalensystem, so bleibt es Normalensystem bei jeder Biegung von  $\mathfrak{P}_0$ , bei der die  $\{\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}\}$  mit Erhaltung der Winkel gegen die Fläche mitgeführt werden. Allgemein bleibt Blaschkes „Öffnung“ jeder geschlossenen Kongruenzfläche bei solcher Beltramischen Verbiegung invariant. — Nun werden den Kurven und Flächen des elliptischen Raumes Drehvorgänge  $D_I, D_{II}$  zugeordnet, isometrischen Flächen  $\mathfrak{P}_0, \mathfrak{P}_0^*$  „isometrische Drehvorgänge“  $D_{II}, D_{II}^*$ . Für isometrische Drehvorgänge gilt: 1. Greift man an einer Stelle aus  $D_{II}$  und  $D_{II}^*$  alle entsprechenden  $D_I$  und  $D_I^*$  heraus, so liegen deren Momentanpole auf Kreisen (Polkreise), deren sphärische Mittelpunkte (Pole) in Gang- wie Rastkugel flächentreu aufeinander bezogen sind. In entsprechenden Momentanpolen stimmen die Winkelgeschwindigkeiten überein. 2. Werden die Punkte der Gangkugeln von  $D_{II}$  und  $D_{II}^*$  geeignet (durch eine Drehung) aufeinander bezogen, so beschreiben sie in den Rastkugeln gleiche Bogenelemente (Isometrie der Rastkugeln); im bes. gilt dies auch für die kurvenläufigen Punkte, die auf den Polkreisen liegen und im Augenblick bei  $D_{II}$  bzw.  $D_{II}^*$  kein Flächenstück, sondern nur ein Kurvenstück durchlaufen. — Mit Benutzung der genannten Eigenschaften isometrischer Drehvorgänge läßt sich der Beltramische Satz in diesen deuten. Das kann auf zwei Arten geschehen, je nachdem noch zwei Drehvorgänge  $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}^*$ , die orthogonalen Querflächen des Normalensystems entsprechen, in die Deutung einbezogen werden oder nicht.

E. Rembs.

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

**Tolstov, G. P.:** Über die Bestimmung der Enveloppe einer ebenen Kurvenschar. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4 (50), 173—179 (1952) [Russisch].

**Yannopoulos, Alex. J.:** On a general trihedron of a curve. Math. Mag. 25, 189—190 (1952).

**Scherrer, W.:** Zur elementaren Flächentheorie. Commentarii math. Helvet. 26, 78—80 (1952).

Verf. bemerkt, daß es gelegentlich vorteilhaft ist, zur Bearbeitung einer Raumfläche  $\mathfrak{r}(u, v)$  das Dreibein  $\mathfrak{R}_u, \mathfrak{R}_v, \mathfrak{N}$  zu benutzen ( $\mathfrak{N}$ : 1-Vektor der Normalen,  $u, v$ : Krümmungslinienparameter). „Da diese Methode in dem traditionellen Lehrgang nicht verwendet wird“, werden „ihre Hauptformeln kurz zusammengestellt“.

H. Gericke.

**Cattaneo, Carlo:** Sul legame lineare che intercorre fra le tre forme quadratiche associate a una superficie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser 7, 16—17 (1952).

Soit  $l$  une section normale à la surface dans un point générique  $P$ ,  $P'$  un point voisin à  $P$  sur cette section et  $d\chi$  l'angle de la normale à la surface en  $P'$  avec la normale principale à  $l$  dans le même point.  $\alpha (= ds^2 = PP'^2)$ ,  $\beta, \gamma$  étant les trois formes quadratiques de la surface, la relation classique  $\gamma = -K\alpha - H\beta$  s'écrit  $(d\chi/ds)^2 = -1/\rho^2 + H/\rho - K$ ,  $1/\rho$  étant la courbure normale. Si  $l$  est section principale ( $d\chi = 0$ ) on obtient de cette relation les courbures principales.

M. Haimovici.

**Hartman, Philip:** On unsmooth two-dimensional Riemannian metrics. Amer. J. Math. 74, 215—226 (1952).

Let  $\Phi(u, v)$  be a continuous function on the rectangle  $R: |u| \leq a, |v| \leq b$ , satisfying the inequality  $0 < \Phi < \pi$  and the relation of Hazzidakis

$$\Phi(u_1, v_1) - \Phi(u_2, v_1) + \Phi(u_2, v_2) - \Phi(u_1, v_2) = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} \sin \Phi \, du \, dv$$

for all rectangles in  $R$ . Then, for sufficiently small  $x, y$  there exists one and, up to Euclidean movements of the  $(x, y, z)$ -space, only one surface of Gaussian curvature  $K = -1$  of class  $C''$  whose first fundamental form referred to the asymptotic curves has the Tchebychef form  $ds^2 = du^2 + 2 \cos \Phi \, du \, dv + dv^2$ . The proof of the existence is based on an approximation process of  $\Phi$  by smooth functions and uses some previous results of the author and Wintner. For the uniqueness assertion the following theorem is needed: If a positive definite form  $g_{ik} du^i du^k$  ( $i, k = 1, 2$ ) of class  $C'$  is transformed into another form  $G_{ik} dU^i dU^k$  with the same properties by a transformation  $u^i = u^i(U^1, U^2)$  of class  $C'$ , then the transformation is necessarily of class  $C''$ . From this theorem several interesting consequences are mentioned. If it is true for spaces of dimension  $n > 2$  and matrix  $(g_{ik})$  non-singular (instead of positive definite) remains undecided.

L. A. Santaló.

**Janenko, N. N.:** Unendlich kleine Verbiegungen von Flächen des mehrdimensionalen Euklidischen Raumes und projektiv-invariante Charakterisierung der verbiegbaren Flächen. Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 4 (50), 138—139 (1952) [Russisch].

**Morozova, E. A.:** Kürzeste Linien auf Rotationsflächen mit rektifizierbarem Meridian. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 1135—1138 (1952) [Russisch].

Verf. betrachtete Rotationsflächen  $F$ , auf denen die Bogenlänge  $s$  der als rektifizierbar angenommenen Meridiankurve und der Drehwinkel  $v$  als Parameter eingeführt sind, und beweist dann zuerst folgenden Satz: Eine die Punkte  $A$  und  $B$  auf  $F$  verbindende Kürzeste ist entweder Teil eines Meridians oder ist stückweise durch stetig differenzierbare  $s(v)$  darzustellen, die die Differentialgleichung:  $ds/dv = \pm r(s) \sqrt{r^2(s) - C^2/C}$  ( $C = \text{konst.}$ ) befriedigen. — Glatt heißen ferner solche Punkte von  $F$ , in denen eine Tangente an die Meridiankurve existiert und wo  $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta s / \Delta s = 1$  gilt, wenn  $\Delta s$  die Bogenlänge auf dem Meridianstück, das gegen

den betr. Punkt rückt, ist und  $\Delta s$  die Länge der Sehne des betr. Stücks bedeutet. Werden dann mit  $\bar{\alpha}_K(P)$  und  $\wedge_K(P)$  die Winkel zwischen den rechten (bzw. linken) Halbtangenten an den Meridian und die Geodätische durch  $P$  bezeichnet, so läßt sich der 2. Satz folgendermaßen formulieren: Für jede Kürzeste  $K$  existiert eine Zahl  $C_K$  von der Eigenschaft, daß für alle glatten Punkte auf  $K$  gilt:  $r_P \sin \wedge_K(P) =$

$r_K \sin \alpha_K(P) = C_K$ . Hiermit ist eine vom analytischen Fall her bekannte Eigenschaft der Geodätischen auf Drehflächen weitgehend auf nicht-analytische Drehflächen verallgemeinert.

W. Burau.

**Löbell, Frank:** *Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen.* Math. Z. 56, 208—218 (1952).

Durch einen Punkt  $P$  einer Kongruenzkurve wird ein Flächenstreifen gelegt, der senkrecht zu den Tangenten  $e$  der Kongruenzkurven ist. Weiter sei  $g$  die zu  $e$  normale Komponente des zugehörigen Drehvektors.  $g$  ist eine lineare Vektorfunktion der Tangentenrichtung  $\alpha$  des Streifens. Die gewonnene Affinität  $\alpha \rightarrow g$  (bei festem Punkt  $P$ ) gestattet anschaulich, die Invarianten der Kongruenz zu deuten. Beschreibt  $\alpha$  in der zu  $e$  senkrechten Ebene einen Kreis, so durchläuft der Endpunkt von  $g$  in derselben Ebene eine Ellipse. Den Hauptachsen der Ellipse entsprechen zwei orthogonale Richtungen  $\alpha$ : Hauptneigungsrichtungen. Sie fallen im allgemeinen nicht mit den Hauptachsen zusammen. Der eingeschlossene Winkel sowie die Längen der Halbachsen bilden drei Invarianten. Durch Untersuchung der Schränkung und Spreizung (asympt. Windung und Normalkrümmung) der besprochenen Normalstreifen wird schließlich das vollständige Invariantensystem gewonnen. Anschließend werden Integrierbarkeitsbedingungen aufgestellt. Bei Verschwinden einer der Invarianten handelt es sich um eine Normalenkongruenz (d. h. die Kongruenz besitzt orthogonale Flächen), womit der Zusammenhang mit der Flächentheorie hergestellt ist.

J. Nitsche.

**Krishna, Shri:** *Congruences formed by the tangents to a surface.* Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 66, 31—40 (1952).

Die Arbeit enthält einige mit tensoriellen Methoden und Eisenhardtscher Bezeichnungsweise bewiesene elementare und zumeist bekannte Sätze über Kongruenzen, die aus Tangenten einer Fläche (Brennfläche) bestehen, insbesondere der Sonderfälle, die sich ergeben, wenn man nur die Tangenten längs einer Flächenkurve ins Auge faßt. Die Ausdrucksweise läßt häufig an Exaktheit zu wünschen übrig, da oft unklar bleibt, ob Verf. bloß eine einzige Flächenkurve oder eine Schar von Flächenkurven meint.

K. Strubecker.

**Jonas, Hans:** *Die Bestimmung der Hauptflächen und der Developpablen im pseudosphärischen Strahlensystem und eine Eigenschaft gewisser Evolventenflächen des verbogenen Katenoids.* Math. Nachr. 6, 293—302 (1952).

Nach L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von M. Lucat, 2. Aufl. Leipzig 1910. S. 289 Fußnote, lautet das Bogenelement des sphärischen Bildes einer pseudosphärischen Kongruenz  $ds^2 = E du^2 + G dv^2$ , wobei  $w = \sqrt{EG}$  der Liouvilleschen Differentialgleichung  $\partial^2 \log w / \partial u \partial v = w \cos \Omega$  genügt und  $\Omega$  den konstanten Winkel der Brennebenen bedeutet. Verf. will diese Tatsache mit der Theorie der Bäcklund-Transformation in Beziehung setzen. Es gelingt ihm sogar für den noch allgemeineren Typus einer durch die gegebene pseudosphärische Kongruenz und eine verfügbare Konstante  $\kappa$  definierte Differentialgleichung durch Heranziehung einer zweiten Bäcklund-Transformation einen integrierenden Faktor zu finden und sogar das Integral in geschlossener Form anzugeben. Die erhaltenen Formeln gestatten die Bestimmung der Hauptflächen der pseudosphärischen Kongruenz auf die Kenntnis einer Lösung jener Riccatischen Differentialgleichung zurückzuführen, von der die Komplementärtransformation  $B_{\sigma=0}$  abhängt. Ähnlich bedarf es, wie gezeigt wird, zur Darstellung der Developpablen einer pseudosphärischen Kongruenz, die aus der gegebenen pseudosphärischen Fläche durch die Bäcklund-Transformation  $B_{\sigma}$  erzeugt wird, noch der entgegengesetzten Transformation  $B_{-\sigma}$ . — Zum Schluß wird noch folgendes Ergebnis hergeleitet: Verbindet man die beiden Hauptkrümmungsmitten einer pseudosphärischen Fläche ( $K = -1$ ) mit den beiden in den Abständen  $\pm 1$  markierten Punkten jener Hauptkrümmungstangente, die in der Tangentenebene des betreffenden Evolutenmantels liegt, so beschreiben diese vier Strahlen Normalenkongruenzen. Auf diesen Evolutenmänteln (die bekanntlich auf Katenoiden abwickelbar sind) berühren sie die geodätischen Linien mit der Clairautschen Konstanten 1. Die zweiten Scharen von Krümmungslinien sind auf den zugehörigen Orthogonalflächen durch Quadraturen darstellbar, sobald wieder eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung für die Komplementärtransformation bekannt ist.

K. Strubecker.



## Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Strubecker, Karl: Erlanger Programm und Differentialgeometrie. Math.-phys. Semesterber. 2, 263—278 (1952).

Übersichtliche Einführung in die Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen mit Beispielen und Angaben über das Schrifttum. *W. Blaschke.*

Vasil'ev, A. M.: Über algebraische Operationen, die in der Differentialgeometrie angewendet werden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 509—511 (1952) [Russisch].

Bezugnehmend auf eine frühere Mitteilung des Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 79, 5—7 (1951)] und eine Arbeit von G. F. Laptev [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 78, 197—200 (1951)] werden einige sehr allgemein gehaltene Andeutungen über die Konstruktion von Invarianten bei endlichen Lieschen Gruppen und bei geometrischen Differentialinvarianten gegeben. Unter anderem wird ohne Beweis behauptet, daß der Satz von Gram und das hierauf beruhende Äquivalenzkriterium von Formen auch für jede Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe gültig bleibt. *R. W. Weitzenböck.*

Janenko, N. W.: Über den Zusammenhang zwischen metrischen und projektiven Eigenschaften von Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 685—688 (1952) [Russisch].

Es handelt sich um den Zusammenhang projektiv invarianter Eigenschaften der  $V_m$  in  $E_{m+q}$  mit Verbiegbarkeitsfragen: 1. Für das Bestehen von Eigenverbiegbarkeit ist notwendig, daß  $V_m$  Zerschichtung in  $\infty^r E_{m-r}$  zuläßt, längs deren die  $q$ -Normale konstant bleibt. Notwendig ist ferner die Existenz eines „fokalen“  $(m+q)$ -Beins,  $J_1 \cdots J_r, J_{r+1} \cdots J_m, J_{m+1} \cdots J_{m+q}$  mit fokalen Vektoren  $J_1 \cdots J_r$ . Wenn die Cartanschen Formen  $\omega^1, \dots, \omega^r$  als Differentiale erscheinen ( $\omega^i = du^i$ ), heißt das Bezugssystem holonom. Für den Radiusvektor der eigenverbiegblichen Fläche mit holonomem fokalen Bezugssystem werden Gleichungen angegeben, die seine zweiten Ableitungen als lineare Kombinationen der ersten ausdrücken. Ein analoges Gleichungssystem wird für Tangentialkoordinaten aufgestellt. 2. Im „allgemeinen“ Fall einer  $V_m$  mit  $q = 2, r = 4$ , gekennzeichnet durch das Nichtverschwinden gewisser zweireihiger Determinanten aus Koeffizienten des letzten Gleichungssystems, werden notwendige und hinreichende Bedingungen für Eigenverbiegbarkeit angegeben, Analoga der von Sbrana und Cartan für Hyperflächen erhaltenen Formeln (vgl. Enzykl. math. Wiss. III D 11, Nr. 27; Leipzig 1927). 3. Für mehrdimensionale Flächen kann die infinitesimale Verbiegung ganz analog zur Fläche des  $E_3$  definiert werden. Aber nicht jede Fläche läßt eine infinitesimale Verbiegung zu. Die Klasse der unstarren Flächen ist projektiv invariant. Wenn die allgemeine  $V_m$  in  $E_{m+2}$  eine endliche Verbiegung (Isometrie) und eine infinitesimale zuläßt, so auch eine stetige. Jede allgemeine nichtstarre Fläche kann durch diskret verbiegbare Flächen approximiert werden. Die Verhältnisse werden durch Vergleich mit den 4 Klassen verbiegbarer Hyperflächen der Einteilung von Sbrana und Cartan illustriert. *E. Rembs.*

Decuyper, Marcel: Sur une propriété de la suite de Laplace périodique, de période 4. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 697—699 (1952).

L'A. si propone di determinare le coppie di doppi sistemi coniugati  $M_1(u, v)$  e  $M_3(u, v)$  tali che il 1° e 2° asse di  $M_1$  in ciascun suo punto siano altre sì 1° e 2° asse di  $M_3$  nel punto corrispondente. Dato il doppio sistema coniugato  $M_1(u, v)$ , siano  $M_0$  e  $M_2$  i secondi fuochi delle tangenti alle linee  $v$  ed  $u$  rispettivamente: il 1° asse del doppio sistema coniugato  $M_1(u, v)$  è la retta comune ai piani osculatori in  $M_1$  alle linee  $u$  e  $v$  e su di esso l'involuzione di Slotnick (determinata dai due fuochi e dalle intersezioni coi piani focali del 2° asse  $M_0 M_2$ ) possiede oltre a  $M_1$  un secondo punto unito  $M_3$ . Utilizzando il riferimento mobile  $M_0 M_1 M_2 M_3$  l'A. dimostra che

le sole coppie che godono della proprietà richiesta sono le coppie non consecutive di una successione di Laplace  $M_0 M_1 M_2 M_3$  periodica di periodo 4. Tali coppie dipendono da 6 funzioni arbitrarie di un argomento mentre le coppie di superficie aventi in comune la sola congruenza dei primi assi rispetto a un doppio sistema coniugato comune dipendono da 10 funzioni arbitrarie di un argomento, secondo un risultato dello stesso A. (questo Zbl. 36, 232).

P. Buzano.

Wunderlich, Walter: Über die  $L$ -Torsen der Flächen 2. Klasse. Arch. der Math. 3, 44—49 (1952).

„In gewissem Sinn dual zu den im Rahmen der konformen Geometrie betrachteten und nach G. Darboux 1871 benannten  $D$ -Kurven... sind vom Standpunkt der Laguerreschen Kugelgeometrie jene einer Fläche umschriebenen Torsen von Interesse, deren Schmiegkugeln die Ausgangsfläche berühren.“ Auf solche  $L$ -Torsen hat Ref. 1926 hingewiesen. Entsprechend zu einem Ergebnis von G. Darboux wird in einfacher Weise gezeigt: Die Gratlinien der einer Fläche zweiter Klasse umschriebenen  $L$ -Torsen sind geodätische Linien auf den konfokalen Flächen. Wegen der Laguerreinvarianz der  $L$ -Torsen ergeben sich Verallgemeinerungen.

W. Blaschke.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Janenko, N. N.: Über die Klasse einer Riemannschen Metrik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 533—536 (1952) [Russisch].

Es werden notwendige und hinreichende Kriterien dafür angegeben, daß eine  $m$ -dimensionale reelle Riemannsche Metrik  $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$  von einem „Typ“  $t \geq 3$  die Klasse  $q$  hat, also sich in einem euklidischen  $E_{m+q}$  realisieren läßt, aber in keinem von geringerer Dimension. — Sind  $\omega^i, \omega_\alpha^j, i = 1, \dots, m, \alpha, \beta = 1, \dots, m+q$  Cartansche Formen,  $J_\alpha$  das Bezugssystem (Repère) und  $J_{m+s} J_\alpha = \delta_{m+s, \alpha}, s = 1, \dots, q$ , ferner  $\psi_i^s, \psi_j^s, \theta_i^s$  Abkürzungen für  $\omega_i^{m+s}, \omega_{m+s}^j$ , so kann man das Problem so formulieren: Ist es möglich, das System der Formen  $\omega^i, \omega_j^i = \Gamma_{jk}^i \omega^k$  ( $\Gamma_{jk}^i$  die nichtholonomen Koeffizienten des Zusammenhangs) so durch  $\psi_i^s, \psi_j^s, \theta_i^s$  ( $s = 1, \dots, q$ ) zu ergänzen, daß die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind? — Man betrachtet insbesondere die Integrabilitätsbedingungen  $d\omega_j^s = [\omega_j^k \omega_k^s] + [\psi_j^s \psi_k^s]$ . Durch Herabziehen des

Index werden sie auf die Form gebracht:  $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - [\omega_i^k \omega_{kj}^s] = R_{ij,kl} [du^k du^l] = \sum_{s=1}^q [\psi_i^s \psi_j^s]$  und die Formen  $[\Omega_{ij}^s] = \Phi_{ij}$  gebildet. — Nach Formulierung einiger Sätze über die Umwandlung bzw. gegenseitige Abhängigkeit der Integrabilitätsbedingungen für Metriken vom Typ  $t \geq 3$  bzw.  $t \geq 4$  wird als Hauptsatz ausgesprochen: Dafür, daß die Metrik des Typs  $t \geq 3$  die Klasse  $q$  hat, ist notwendig und hinreichend: 1. Bedeuten  $\varphi_i$  lineare Formen, so hat für beliebiges  $i = 1, \dots, m$  das Gleichungssystem  $[\Phi_{ij} \varphi_i] = 0$  genau  $q$  unabhängige Lösungen  $\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^q, [\varphi_i^1 \dots \varphi_i^q \varphi_j^1 \dots \varphi_j^q] \neq 0$ . 2. Die Größen

$$L_{ijst} = [\Omega_{ij} \varphi_i^1 \dots \varphi_i^{s-1} \varphi_i^{s+1} \dots \varphi_i^q \varphi_j^1 \dots \varphi_j^{t-1} \varphi_j^{t+1} \dots \varphi_j^q] / [\varphi_i^1 \dots \varphi_i^q \varphi_j^1 \dots \varphi_j^q]$$

sind Skalarprodukte der Klasse  $q$ , d. h. die Gleichungssysteme  $L_{ijst} = \sum_{\tau=1}^p a_{is}^\tau a_{jt}^\tau$  haben Lösungen für  $p = q$  und nicht für  $p < q$ . 3. Es muß  $[\Delta_{ij}^s \varphi_i^1 \dots \varphi_i^q] = 0$  sein ( $i, i_1, \dots, i_q = 1, \dots, m$ ), wenn man  $d\psi_i^s - [\omega_i^j \psi_j^s] = \Delta_{ij}^s$  setzt. Für Metriken des Typs  $t \geq 4$  fällt letztere Bedingung weg. Da  $\psi_i^s = \sum_{\tau=1}^q a_{is}^\tau \varphi_i^\tau$  gilt, ist zugleich die Methode zur Bestimmung der  $p$  angegeben. Danach ist aber das System der Ableitungsgleichungen vollständig integrierbar.

E. Rembs.

Patterson, E. M.: Simply harmonic Riemann extensions. J. London math. Soc. 27, 102—107 (1952).

A Riemann extension  $R^{2n}(A^n; c_{ij})$  of an affine connected space  $A^n$  of coordinates  $x^i$  and symmetric connection  $\Gamma_{ij}^h$  with a given symmetric tensor  $c_{ij}$  in  $A^n$  is defined to be the  $2n$ -dimensional space of coordinates  $x^i, \xi_i$  ( $\xi_i = x^{i+n}$ ) whose line element is

$$ds^2 = (-2 \Gamma_{ij}^h \xi_h + c_{ij}) dx^i dx^j + 2 dx^i d\xi_i$$

It is shown that  $R^{2n}$  is simply harmonic (defined earlier by the author, see this Zbl. 42, 404) if and only if  $I_{ij}^n$  satisfies a certain set of algebraic conditions. The space  $A^n$  is then also said to be simply harmonic and is denoted by  $SA^n$ . It is also shown that the Riemann extension  $R^{2n}(R^n; c_{ij})$  of a space  $R^n$  of Riemannian connection is simply harmonic if and only if  $R^n$  is simply harmonic. These results lead to a method for constructing new types of simply harmonic spaces. In an earlier paper (loc. cit.) the author proved that a  $R^{2n}$  admitting a strictly parallel field of null  $n$ -planes is simply harmonic. This reduces to a special case of the above theorem, since such a  $R^{2n}$  is a Riemann extension of a flat space, and a flat space is simply harmonic.

H. Rund.

**Yano, Kentaro:** On groups of homothetic transformations in Riemannian spaces. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 105—117 (1952).

A homothetic transformation, denoted h. t., in a Riemannian space is defined as one for which the corresponding distances are always in the same constant ratio. Such transformations have been studied by B. Shanks (this Zbl. 39, 177). The author gives some further results on groups of h. t. obtained by the use of Lie derivatives, a tool which seems to be very indicated for the study of such transformations. If  $\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x) dt$  is an infinitesimal transformation and  $Xg_{ij}$  denotes the Lie derivative of  $g_{ij}$ , the h. t. are characterized by  $Xg_{ij} = 2c g_{ij}$ . If  $c = 0$ , we have a motion; if  $c \neq 0$ , a proper h. t. After some results on groups of h. t. the author gives necessary and sufficient conditions that an  $r$ -parameter group of conformal transformations (or affine collineations) contain a subgroup of h. t. Finally, conditions are given in order that given an  $r$ -parameter group of transformations in an  $n$ -dimensional space ( $r \leq n$ ) a Riemannian metric exists for which the given group is a group of h. t.

L. A. Santaló.

**Hlavatý, Václav:** Intrinsic deformation theory of subspaces in a Riemann space. J. rat. Mech. Analysis 1, 49—72 (1952).

Let  $V_n$  be a  $n$ -dimensional Riemannian space ( $n \geq 2$ ) referred to the coordinates  $\xi^i$  and consider a set  $(V_m)$  of subspaces  $V_m$  ( $1 \leq m < n$ ) defined by  $\xi^i = \varphi^i(\tau; \nu)$  such that in a certain region  $R$  through each point of  $V_n$  there is only one  $V_m$ ;  $\tau^a$  ( $a = 1, 2, \dots, m$ ) are the coordinates in  $V_m$  and  $\nu^h$  ( $h = m+1, m+2, \dots, n$ ) are the parameters which determine each  $V_m$ . This configuration is investigated with respect to an infinitesimal transformation  $*\xi^i = \xi^i + \varepsilon V^i(\xi)$  where  $\varepsilon \rightarrow 0$  is a constant and  $V^i(\xi)$  is a contravariant vector field over  $R$ . The theory is independent of the transformations  $\xi^{i'} \leftrightarrow \xi^i$ ,  $\tau^{a'} \leftrightarrow \tau^a$ ,  $\nu^{h'} \leftrightarrow \nu^h$  in which, respectively, only the  $\xi$ 's,  $\tau$ 's, or  $\nu$ 's are involved. (Under more restricted assumptions the same problem was considered by the author; see this Zbl. 40, 378). To this purpose a special tensor calculus is developed and some operators are defined whose application on the objects of  $(V_m)$  is investigated. Two interesting applications are given: a) a necessary and sufficient condition that the family  $(V_m)$  be preserved under an infinitesimal transformation; b) if  $(V_m)$  is a family of totally geodesic subspaces, a necessary and sufficient condition is given in order that this property be preserved under an infinitesimal transformation.

L. A. Santaló.

**Spencer, D. C.:** Cauchy's formula on Kähler manifolds. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 76—80 (1952).

Auf jeder berandeten Untermannigfaltigkeit  $B$  einer Kählerschen Mannigfaltigkeit gibt es einen Kern, der für komplex-analytische Formen eine Cauchysche Formel relativ zu jeder Untermannigfaltigkeit von  $B$  liefert. Die Beschränkung auf Mannigfaltigkeiten mit Rand ist wesentlich. Im Beweis ist die zweite Voraussetzung (4.1) wegen eines Satzes von B. Eckmann [C. r. Acad. Sci., Paris 229, 199 (1949)] überflüssig.

H. Guggenheimer.



**Libermann, Paulette:** Sur les structures presque paracomplexes. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2517—2519 (1952).

Eine parakomplexe Struktur des  $R^{2n}$  wird durch eine Vektortransformation  $J$  ( $JJ = +1$ ) gegeben; die Eigenvektoren von  $J$  sollen zwei supplementäre  $R^n$  in  $R^{2n}$  aufspannen. Diese Struktur ist invariant gegenüber der Gruppe  $L_n \times L_n$ . Der  $R^{2n}$  mit dieser Struktur kann auch aufgespannt werden von den „parakomplexen“ Vektoren  $z = x + jy$ ,  $j^2 = -1$ . Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit  $V^{2n}$  heißt fast-parakomplex, wenn ihr tangentialer  $R^{2n}$  eine stetige parakomplexe Struktur trägt, d. h. wenn auf  $V^{2n}$  zwei differenzierbare, linear unabhängige Felder von Berührungs- $n$ -Elementen gegeben sind. Sind beide Felder integrierbar, so heißt die Mannigfaltigkeit parakomplex. Die geometrischen Kriterien dafür, daß eine fast-parakomplexe Struktur parakomplex ist, sind völlig analog denen, die man bei fast-komplexen Strukturen antrifft. Die Verf. zeigt weiter, wie man analog mit einer parahermiteschen Geometrie arbeiten kann. So werden die fast-parahermiteschen isotropen Strukturen vollständig beschrieben. *H. Guggenheimer.*

**Libermann, Paulette:** Formes différentielles sur une variété symplectique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 395—397 (1952).

Diese Note faßt ein Heft der vervielfältigten Veröffentlichungen des topologischen Kolloquiums Strasbourg zusammen. Die Differentialalgebren auf fast-komplexen und symplektischen Mannigfaltigkeiten werden untersucht, insbesondere durch Gegenüberstellung des Stern-Operators  $*$  von Hodge-Bidal-de Rham [vgl. Commentarii math. Helvet. **19**, 1—49 (1946)] und die Arbeit des Ref. in Commentarii mat. Helvet. **25**, 257—297 (1951)], der auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit definiert werden kann, und das Stern-Operators  $*$  von Ch. Ehresmann und Verf. (dies. Zbl. **34**, 200), der eine fastkomplexe Struktur voraussetzt. Die wichtigsten neuen Ergebnisse sind: Der zur quadratischen alternierenden Differentialform  $\Omega$  von maximalem Rang gehörende Operator  $A$ ,  $A\varphi_p = (-1)^p * (*\varphi_p \wedge \Omega)$ , hängt nur von  $\Omega$ , nicht von einer mit  $\Omega$  vertauschbaren Metrik (d. h. einer fasthermiteschen Struktur) ab. Auch die Zerlegung der Formen in Klassen hängt nur von  $\Omega$  allein ab. Der Operator  $f$ ,  $f\varphi_p = (\varphi_p \wedge \Omega^{n-p})^*$  ist ein Automorphismus des Vektorraumes der  $p$ -Formen  $\varphi_p$ , seine Eigenformen sind diejenigen, welche nur einer Klasse angehören.  $f$  liefert die Zerlegung von Lepage (dies. Zbl. **37**, 145). Ist eine Form  $\varphi$  harmonisch bezüglich  $*$ , so sind alle Formen der Klassenzerlegung von  $\varphi$  sowie  $\varphi \wedge \Omega$  auf symplektischen Mannigfaltigkeiten harmonisch bezüglich  $*$ . (Die harmonischen Formen bezüglich  $*$  haben nicht die Eigenschaften der harmonischen Formen von Hodge-de Rham-Bidal).

*H. Guggenheimer.*

**Yano, Kentaro:** On harmonic and Killing vector fields. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 38—45 (1952).

In einer kompakten  $V_n$  mit einfacher Orientierung verschwindet das Raumintegral jeder Divergenz, da es ja keine Begrenzung gibt. Ist  $R_{\mu\lambda}$  der Ricci-Tensor und  $\xi^k$  ein beliebiges Vektorfeld, so folgt unter Berücksichtigung der Formel für  $V_{[\mu} V_{\lambda]} \xi^k$  die bemerkenswerte Identität für  $V_n$  dieser Art

$$\int (R_{\mu\lambda} \xi^\mu \xi^\lambda + (V_\mu \xi^k) V_k \xi^\mu - (V_\mu \xi^\mu) V_\lambda \xi^\lambda) dv = 0.$$

Aus dieser ergibt sich für den Fall einer positiv definiten Metrik und eines harmonischen Feldes  $\xi^k$  (Rotation und Divergenz Null) u. a. sofort daß für  $R_{\mu\lambda} \xi^\mu \xi^\lambda \geq 0$  das Feld  $\xi^k$  kovariant konstant sein muß und außerdem nur das Gleichheitszeichen gelten kann. [Satz von Bochner, Bull. Amer. math. Soc. **52**, 776—797 (1946) und dies. Zbl. **38**, 344, **40**, 243]. Ebenso ergibt sich für den Fall positiv definiter Metrik und eines Killingschen Feldes  $\xi^k$  (Deviation und Divergenz Null) u. a. sofort, daß für  $R_{\mu\lambda} \xi^\mu \xi^\lambda \leq 0$  genau dasselbe gilt (Satz von Bochner). — Des weiteren wird bewiesen, daß in einer  $V_n$  der betrachteten Art, die eine einparametrische Bewegungs-

gruppe gestattet, die Liesche Ableitung in bezug auf diese Gruppe verschwindet für jeden  $p$ -Vektor, dessen Divergenz und Rotation beide verschwinden (Theorem auch von Y. Muto, Literaturangabe fehlt, und Verallgemeinerung eines Theorems von Bochner). — Schließlich wird in einer  $V_n$  der betrachteten Art noch ein Kriterium von de Rham (de Rham und K. Kodaira, Harmonic integrals. Lectures delivered at the Institute for Adv. Study 1950) für Killingsche Felder abgeleitet, und es wird bewiesen, daß die einzigen affinen Kollineationen (d. s. Transformationen die die Übertragung invariant lassen) die Bewegungen sind. *J. A. Schouten.*

**Aragnol, André:** Géométrie globale des espaces d'éléments linéaires à connexion euclidienne. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1426—1428 (1952).

L'A. étend au cas des connexions euclidiennes d'éléments linéaires la formule intégrale de Chern donnant la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une variété plongée dans un espace de Riemann. Les notations sont celles d'un travail antérieur de A. Lichnérowicz (ce Zbl. **39**, 175). *P. Lelong.*

**Kosambi, D. D.:** Path-spaces admitting collineations. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **3**, 1—11 (1952).

Es wird untersucht, wann der Raum der Bahnen (1)  $\ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}) = 0$ ,  $\dot{x}^i = dx^i/dt$ ,  $\ddot{x}^i = d\dot{x}^i/dt$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) eine kontinuierliche Transformationsgruppe des Ur-raumes  $x^i$  in sich zuläßt. Die von Verf. bewiesenen Sätze beziehen sich teils auf Gruppen, für die weder eine formale Reihenenwicklung der Gruppe noch der  $\alpha^i$  vorhanden ist, teils auf solche, für die dies zutrifft und  $\alpha^i$  von der Form

$$\alpha^i = A^i + A^i_j \dot{x}^j + \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k + A^i_{jkl} \dot{x}^j \dot{x}^k \dot{x}^l + \dots$$

ist. In die erste Kategorie gehören u. a. folgende Ergebnisse. Der Raum gestattet eine Translationsgruppe  $T_n$  bzw. eine Untergruppe der homogenen linearen Gruppe, falls  $\alpha^i$  von der Form  $\alpha^i = \alpha^i(\dot{x})$  bzw.  $\alpha^i = \dot{x}^i H(x, \dot{x}) + x^i J(x, \dot{x})$  ist.  $H$  und  $J$  sind dabei absolute Invarianten der ersten Erweiterung der fraglichen Gruppe. In die zweite Kategorie gehört folgender Satz. Der allgemeinste Raum, der eine Liesche Gruppe zuläßt, hat ein  $\alpha^i$  der Gestalt  $\alpha^i = \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k + \lambda^i$ . Dabei gestattet der Affinzusammenhang  $\Gamma^i_{jk}$  und der kontravariante Vektor  $\lambda^i$  die gegebene Gruppe. Verf. leitet auch einige Ergebnisse über projektiv-ebene Räume her. — Methodisch verwendet Verf. die zu (1) gehörigen Variationsgleichungen und die verallgemeinerten Lieschen Operatoren  $\mathfrak{L}$ . Bei der Behandlung der Integrabilitätsbedingungen dieser Variationsgleichungen ist es dabei wesentlich, daß  $\mathfrak{L}$  mit allen Differentialoperatoren vertauschbar ist. *O. Varga.*

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

**Waag, E. J. van der:** Sur les plans osculateurs. I, II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **55**, 41—51, 52—62 = Indagationes math. **14**, 41—51, 52—62 (1952).

Es sei  $\mathfrak{C}$  stetiges Streckenbild in den  $E_3$  und  $t_P$  die Tangente an  $\mathfrak{C}$  im Punkt  $P$  von  $\mathfrak{C}$  (falls sie existiert), ferner sei  $E(A, B, C)$  bzw.  $E(A, t_P)$  bzw.  $E(t_0, t'_P)$  diejenige Ebene, welche aufgespannt ist durch die 3 Punkte  $A, B, C \in \mathfrak{C}$  bzw. durch  $A$  und  $t_P$  bzw. durch  $t_0$  und die Parallele  $t'_P$  zu  $t_P$  durch  $O$  (vorausgesetzt daß diese Ebenen eindeutig bestimmt sind). Verf. gibt nun folgende 8 Definitionen für den Begriff der Schmiegeebene an  $\mathfrak{C}$  in  $O \in \mathfrak{C}$ , nämlich:  $s_1 = \lim E(t_0, P)$  für  $P \rightarrow O$ ;  $s_2 = \lim E(P', O, P'')$  für  $P', P'' \rightarrow O$  falls  $O$  auf  $\mathfrak{C}$  stets zwischen  $P'$  und  $P''$  liegt;  $s_3 = \lim E(t_0, t'_P)$  für  $P \rightarrow O$ ;  $s_4 = \lim E(O, P', P'')$  für  $P', P'' \rightarrow O$ ;  $s_5 = \lim E(O, t_P)$  für  $P \rightarrow O$ ;  $s_6 = \lim E(P', P'', P''')$  für  $P', P'', P''' \rightarrow O$ ;  $s_7 = \lim E(P', t_{P''})$  für  $P', P'' \rightarrow O$ ;  $s_8 = \lim E(t_P, t'_{P''})$  für  $P', P'' \rightarrow O$ , wenn  $t'_{P''}$  die Parallele durch  $P'$  zu  $t_{P''}$ . Existiert eine Umgebung  $U$  von  $O$  auf  $\mathfrak{C}$  derart, daß z. B.  $E(A, B, C)$  für je 3 verschiedene Punkte  $A, B, C$  von  $U$  eindeutig bestimmt ist und existiert  $s_1$ , so sagen wir, es sei  $s_1$  „definiert vor dem Grenzübergang“, abgekürzt: v. d. G.; und entsprechend für  $s_2$  usw. Gezeigt wird u. a. folgendes: Die

Existenz von  $s_3$  (v. d. G.) in  $O$  zieht im allgemeinen die Existenz in  $O$  keiner der  $s_2, s_4, \dots, s_8$  nach sich; ebenso folgt aus der Existenz von  $s_4$  in  $O$  nicht die von  $s_3$  in  $O$ . Hingegen zieht die Existenz von  $s_4$  in  $O$  an  $\mathfrak{C} = (y = f(x), z = g(x))$  (v. d. G.) diejenige von  $s_3$  in  $O$  nach sich, wenn in  $O$  die Tangente existiert. Schließlich existieren sämtliche  $s_1, \dots, s_8$  in  $O$  (v. d. G.), wenn  $s_6$  oder  $s_7$  oder  $s_8$  in  $O$  (v. d. G.) existiert und wenn in jedem Punkt einer Umgebung von  $O$  auf  $\mathfrak{C}$  die gewöhnliche Tangente (vgl. Verf., dies. Zbl. 44, 189) vorhanden ist.

*O. Haupt.*

**Mirguet, Jean:** Sur la convexité d'un domaine, extérieur à la véritable double courbure. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 398—399 (1952).

Cette note poursuit des travaux antérieurs (ce Zbl. 29, 168 et 42, 162).  $S$  désigne une „orthosurface“ à paratingent supérieur fini,  $(T)$  l'ensemble des points de  $S$  où le biptg. contient toutes les directions de plans de l'espace,  $(A)$  l'extérieur sur  $S$  de l'ensemble des points où  $S$  possède la véritable double courbure. L'A. montre que tout point  $M$  de  $(A)$  dans le voisinage duquel  $(T)$  est dénombrable, est intérieur à un domaine convexe de  $(A)$ . Une autre condition locale est donnée permettant la même conclusion.

*Chr. Pauc.*

**Bouligand, Georges:** Sur les transformations de contact de l'espace. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 908—910 (1952).

$M = M(x, y, z, p, q) = M(m, \omega)$  représente une transformation de contact dans l'espace euclidien à trois dimensions, définie dans un voisinage de l'élément du premier ordre  $(m_0, \omega_0)$  telle que les vecteurs  $M_x + p M_z, M_y + q M_z, M_p$  et  $M_q$  soient fonctions continues de  $(m, \omega)$  et définissent un plan  $P(m, \omega)$ . L'A. définit une notion de régularité pour les suites de triplets  $(m, \omega) = (m_0, \omega_0), (m', \omega'), (m'', \omega'')$  convergeant vers  $(m_0, \omega_0)$  telle que le plan défini par les images  $M = M_0, M' = M_0, M'' = M_0$  tende vers  $P_0 = P(m_0, \omega_0)$ .

*Chr. Pauc.*

**Menger, Karl:** A topological characterization of the length of paths. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 66—69 (1952).

$T$  denotes a compact metrizable topological space. For any metrization of  $T$ , the length  $l$  of paths (directed curves)  $\mathfrak{P}$  is (A): additive: if  $\mathfrak{Q}$  is consecutive to  $\mathfrak{P}$ , then  $l(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}) = l(\mathfrak{P}) + l(\mathfrak{Q})$ ; (B) lower semi-continuous; (C) regular: if, for each  $n$ ,  $\mathfrak{P}_n$  is a path from  $p$  to  $p_n$  and  $\lim l(\mathfrak{P}_n) = 0$ , then  $\lim p_n = p$ . If  $\lambda$  is any non-negative, finite or infinite function defined on all paths of  $T$ , having properties (A), (B) and (C), then, for every  $L < \infty$ , the set of all paths  $\mathfrak{P}$  for which  $\lambda(\mathfrak{P}) \leq L$ , is compact (Generalized Caratheodory's Theorem). By metroid is meant a set in which every two points have a finite or infinite „distance“ such that  $d(p, p) = 0, d(p, q) > 0$  if  $p \neq q, d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$ . Main Theorem: In order that  $\lambda$  be the length in a metroid  $M$  which (1) contains a path of length  $d(p, q)$  from  $p$  to  $q$  whenever  $d(p, q) < \infty$ , (2) can be mapped on  $T$  in a one-to-one continuous way and so that  $l(P) = \lambda(P)$  for every path, it is necessary and sufficient that  $\lambda$  have the properties (A), (B), (C). Complements: If  $T$  is  $\lambda$ -connected [i. e., contains, for any two points  $p, q$  a path  $P$  for which  $\lambda(P) < \infty$ ], then the  $M$ -distances can be chosen to be finite. If  $T$  is locally  $\lambda$ -connected [i. e., contains, if  $\lim p_n = p$ , a path  $P_n$  from  $p$  to  $p_n$  such that  $\lim \lambda(P_n) = 0$ ], then there exists an  $M$  which can be mapped on  $T$  topologically. Hint to the proof for sufficiency and complements: Assuming that  $\lambda$  has properties (A), (B), (C), the function  $d(p, q) = \text{g. l. } \lambda(\mathfrak{P})$  for all paths  $\mathfrak{P}$  from  $p$  to  $q$ , if  $p$  and  $q$  are path-connected,  $= \infty$  if there is no path joining  $p$  to  $q$ , makes  $T$  a metroid  $T^*$ . (B) secures the identity of the  $d$ -length  $l$  and  $\lambda$ . The existence of the path required in (1) follows from the definition of  $d$ , property (C) and the generalized Caratheodory theorem. If we define (see remark below) the convergence of a sequence  $p_1, \dots, p_n, \dots$  to  $p$  in  $T^*$  by  $\lim d(p, p_n) = 0$ , then the identical (or canonical) mapping  $x \leftrightarrow x$  of  $T^*$  on  $T$  is continuous on account of (C). If  $T$  is  $\lambda$ -connected,  $d(p, q)$  is finite. If  $T$  is locally  $\lambda$ -connected, then  $\lim p_n = p$  in  $T$  implies  $\lim d(p, p_n) = 0$ , in other words  $\lim p_n = p$  in  $T^*$ . [Remark: There is no indication in the note concerning the definition of convergence adopted in a metroid. The conjecture above is interpretation of the reviewer. If it is correct, the proof for necessity must involve a new technique, namely to establish the lower semi-continuity of the length in the metroid  $M$  satisfying (1) and (2). The classical proof rests on the property for  $d(p, p_n)$  and  $d(p_n, p)$  to tend to 0 if  $p_n \rightarrow p$ .]

*Chr. Pauc.*

**Besicovitch, A. S. and S. J. Taylor:** On the set of distances between points of a general metric space. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 209—214 (1952).

In einem geeigneten metrischen Raum  $L$  wird ein rektifizierbarer Bogen  $B$



und eine Teilmenge  $E$  von  $B$  positiven linearen Maßes konstruiert derart, daß die Menge der Entfernungen (in  $L$ ) je zweier Punkte von  $E$  kein Intervall  $(0, a)$  enthält. Damit ist gezeigt, daß ein früher (Besicovitch und Miller, dies. Zbl. 30, 244) für rektifizierbare Bogen im euklidischen  $E_2$  (und allgemeiner im  $E_n$ ) bewiesener Satz für beliebige metrische Räume nicht gilt. [Bogen = topologisches Streckenbild;  $E \subset B$  heißt linear meßbar, wenn die Menge  $E'$  der Zahlen  $s(O, X)$  Lebesgue-meßbar ist, wobei  $s(O, X)$  die Bogenlänge auf  $B$  zwischen dem festen Punkt  $O \in B$  und dem beliebigen Punkt  $X \in E$  bezeichnet; das Lebesguesche Maß von  $E'$  ist das lineare Maß von  $E$ ].

*O. Haupt.*

**Straus, E. G. and F. A. Valentine:** A characterization of finite dimensional convex sets. Amer. J. Math. 74, 683—686 (1952).

Verf. gibt eine Kennzeichnung der Konvexität einer Menge von innen heraus mit Hilfe des Verhaltens größter konvexer Teilmengen:  $M$  sei abgeschlossen und zusammenhängend und  $n + 1$  die Maximalanzahl linear unabhängiger Punkte von  $M$ ;  $M$  ist dann und nur dann konvex, wenn es zu jedem Punkt  $x$  von  $M$  genau eine  $x$  enthaltende, größte konvexe Teilmenge der Dimension  $\geq n - 1$  gibt.

*G. Aumann.*

**Ohmann, D.:** Eine Minkowskische Ungleichung für beliebige Mengen und ihre Anwendung auf Extremalprobleme. Math. Z. 55, 299—307 (1952).

Es sei im  $n$ -dimensionalen Raum eine beliebige beschränkte Menge  $A$  vom inneren bzw. äußeren Lebesgueschen Maß  $m(A)$  bzw.  $M(A)$  vorgegeben. Verf. definiert in geeigneter Weise das gemischte innere bzw. äußere Maß  $m(A, K, \dots, K)$  bzw.  $M(A, K, \dots, K)$  zwischen  $A$  und einem zentralsymmetrischen konvexen Körper  $K$  und beweist das Ungleichungspaar

$$m(A, K, \dots, K)^n \geq m(A) m(K)^{n-1}, \quad M(A, K, \dots, K)^n \geq M(A) M(K)^{n-1},$$

das eine Verallgemeinerung einer Minkowskischen Ungleichung für konvexe Körper darstellt.

*L. Fejes Tóth.*

**Besicovitch, A. S.:** Variants of a classical isoperimetric problem. II. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 3, 42—49 (1952).

Problem I: this Zbl. 33, 306. Problem II: Among the convex sets with a given length of boundary and a given circumradius find one  $I_0$  of maximum area. The answer is: a symmetrical lens. Hint to the proof: Use is made of the following property  $\mathfrak{M}$ : for a fixed length of an arc  $AMB$  joining two fixed points  $A$  and  $B$ , the area between the chord  $AB$  and the arc  $AMB$  reaches its maximum value when  $AMB$  is a circular arc.  $I_0$  is either a lens or a circular triangle. The arcs forming  $I_0$  are of the same radius. If  $I_0$  is a circular triangle then all its sides are equal. Any regular circular triangle can be changed into a quadrangle inscribed in the same circle, with the same length of boundary, and having a greater area. Problem III: Find a convex set  $I$  with boundary of length  $l$  contained in a bounded closed set  $P$ , and having the largest possible area. Definitions and notations:  $r_0$ : radius of a largest circle included in  $P$ ;  $C(r)$ ,  $0 < r \leq r_0$ : union of all the circles (discs) of radius  $r$  included in  $P$ ;  $\Lambda$ : length of;  $\text{Fr}$ : frontier (boundary) of. Answer: (i) if  $l > \Lambda C(r_0)$ ,  $I = C(r)$  for the value of  $r$  for which  $l = \Lambda C(r)$ , (ii) if  $\Lambda C(r) \geq l > 2\pi r$ ,  $I =$  either  $C(r_0)$  or a part of  $C(r_0)$  between a pair of its circles. Hint to the proof:  $\text{Fr } C(r) - \text{Fr } P$  is a sum of open arcs.  $\mathfrak{M}$  is again used. If at all points of a closed convex curve  $I$  the upper curvature does not exceed  $1/r$ , then any circle of radius  $r$  having contact with  $I$  and lying together with  $I$  on the same side of the common tangent is included in  $I$ . Problem IV: Find a convex set  $I$  with boundary of length  $l$  containing a convex set  $P$ , and having the largest possible area. Definitions and notations:  $r_0$ : radius of the circum-circle of  $P$ ;  $D(r)$ : intersection of all circles (discs) of radius  $r \geq r_0$  including  $P$ . Answer:  $I = D(r)$  for the value of  $r$  for which  $l = \Lambda D(r)$ . Proof analogous to that of Problem III.

*Chr. Pauc.*

**Ohmann, D.:** Extremalprobleme für konvexe Bereiche der euklidischen Ebene. Math. Z. 55, 346—352 (1952).

Wir betrachten ein in einem zentralsymmetrischen konvexen Bereich  $B$  einbeschriebenes affin reguläres Sechseck  $A_1 \dots A_6$  und verschieben die Teilbogen  $A_1 A_2$ ,  $A_3 A_4$  und  $A_5 A_6$  der Randkurve von  $B$  so, daß sie ein konvexes

Gebiet begrenzen. Ein solches Gebiet wird ein allgemeines Reuleauxdreieck genannt. Verf. betrachtet konvexe Bereiche, deren Breite in jeder Richtung mit der halben Breite von  $B$  übereinstimmt, und zeigt, daß unter diesen ein allgemeines Reuleauxdreieck minimalen Inhalt besitzt. Das ist eine Verallgemeinerung eines Lebesgueschen Satzes, nach dem unter allen Bereichen gleicher konstanter Breite das Reuleauxdreieck minimalen Inhalt besitzt. Mit Hilfe des oben erwähnten Satzes werden die Bereiche minimalen Inhalts bestimmt, für welche Dicke  $\Delta$  und Umfang  $L$  bzw.  $\Delta$  und Durchmesser  $D$  unter der Bedingung  $2\sqrt{3}\Delta \geq L \geq \pi\Delta$  bzw.  $\frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta \geq D \geq \Delta$  vorgegeben sind. *L. Fejes Tóth.*

**Green, John W.:** On the chords of a convex curve. II. *Portugaliae Math.* 11, 51—55 (1952).

$w$  und  $D$  seien Breite bzw. Durchmesser einer Eilinie  $C$ . Eine Sehne  $AB$  von  $C$  wird right-subtended (r.-s.) genannt, wenn es in  $A$  und  $B$  zwei aufeinander senkrechte Stützgeraden von  $C$  gibt. Dann gilt: 1. Zu jedem  $C$  umschriebenen Rechteck  $R$  gibt es eine r.-s. Sehne der Länge  $\geq w/\sqrt{2}$  und  $\geq D/2$ ; beide Grenzen lassen sich nicht verbessern. 2. Für jedes  $R$  gibt es zwei r.-s. Sehnen der Länge  $\geq w(2 - \sqrt{2})$ . 3. Für die größte r.-s. Sehne von  $C$  besteht die Vermutung  $\geq D/\sqrt{2}$ ; bewiesen wird nur, daß für die Grenze mindestens  $(\sqrt{7} - 1)D/3$  gilt. 4. Als obere Grenze für die kürzeste r.-s. Sehne von  $C$  wird  $\leq D/\sqrt{2}$  für jedes  $R$  bewiesen;  $C$  ist ein Kreis, wenn keine r.-s. Sehne kleiner ist. 5. Es gibt stets eine r.-s. Sehne  $\leq w$ ; hierin kann  $w$  nicht durch einen kleineren Wert ersetzt werden. *W. Süss.*

**Goldberg, Michael:** Rotors in spherical polygons. *J. Math. Physics* 30, 235—244 (1952).

The term „rotor“ is applied to convex curves which may be rotated in polygons through every orientation while keeping contact with each side of the polygon. In a previous paper the author has considered the rotors on the plane (this Zbl. 31, 278) and the present paper deals with the rotors on the sphere. It is shown that rotors can be constructed in regular spherical polygons of any number  $n$  of sides. For  $n = 2$  (lune bounded by two meridians) the rotors coincide with the spherical curves of constant width. However these curves can not be a rotor in a spherical quadrilateral, i. e. for  $n = 4$  the spherical rotors do not coincide with the curves of constant width. Some general properties of the spherical rotors and the calculation of the principal dimensions of particular rotors are given. *L. A. Santaló.*

**Eggleston, H. G.:** Measure of asymmetry of convex curves of constant width and restricted radii of curvature. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* 3, 63—72 (1952).

Der Asymmetriekoeffizient  $\mu(G)$  eines ebenen konvexen Bereiches  $G$  vom Flächeninhalt  $|G|$  wird nach A. S. Besicovitch (dies. Zbl. 35, 384, 515) durch  $\mu(G) = 1 - |G_0|/|G|$  definiert, wo  $G_0$  den in  $G$  enthaltenen konvexen Mittelpunktbereich mit größtmöglichem Flächeninhalt  $|G_0|$  bedeutet. Für konvexe Bereiche konstanter Breite gilt  $\mu(G) \leq \mu(D)$ , wo  $D$  ein Reuleaux-Dreieck bezeichnet (dies. Zbl. 42, 164). Verf. verschärft dieses Resultat unter der zusätzlichen Bedingung, daß für die Krümmungsradien  $\varrho$  in allen Punkten der Randkurve von  $G$  stets  $1 - d \leq \varrho \leq d$  gilt, wo  $\frac{1}{2} \leq d < 1$  ist und  $G$  die konstante Breite  $b = 1$  aufweist. Er zeigt, daß dann  $\mu(G) \leq \mu(D_a)$  ausfällt, wobei  $D_a$  den äußeren Parallelbereich eines Reuleaux-Dreiecks der Breite  $b = 2d - 1$  im Abstand  $1 - d$  bezeichnet. *H. Hadwiger.*

**Ohmann, D.:** Eine Abschätzung für die Dicke bei Überdeckung durch konvexe Körper. *J. reine angew. Math.* 190, 125—128 (1952).

Tarski's planking problem is essentially that of proving that, if  $K_1, \dots, K_m$  are convex bodies which together cover a convex body  $K$ , then the sum of the

width of  $K_1, \dots, K_m$  is not less than the width of  $K$ . The paper purports to solve this problem by proving a slightly more precise result. The „proof“ is erroneous, being based on the assumption that a certain density function is non-negative, while the construction of this density ensures that it is sometimes negative. The planking problem was solved by Thøger Bang (this Zbl. 39, 391).

C. A. Rogers.

**Chern, Shiing-Shen:** On the kinematic formula in the Euclidean space of  $n$  dimensions. Amer. J. Math. 74, 227—236 (1952).

L. A. Santalo und Ref. haben 1936/37 (unter erheblichen Einschränkungen) die „kinematische Hauptformel“ für den Euklidischen  $E_3$  bewiesen. Ist nämlich  $G$  ein ruhendes,  $G'$  ein bewegtes Gebiet mit Poincarés „kinematischer Dichte“  $dG'$ , so gilt

$$\int K(GG') dG' = 8\pi^2 \{VK' + AM' + MA' + KV'\}.$$

$GG'$  bedeutet darin den Durchschnitt beider Gebiete,  $K(GG')$  die Gesamtkrümmung seines Randes. Ferner  $V, A, M, K$  Rauminhalt, Oberflächenmaß, Integral der mittleren Krümmung und Gesamtkrümmung für den Rand von  $G$ , entsprechend für  $G'$ . Hier wird diese Formel auf den Euklidischen  $E_n$  verallgemeinert:

$$\int K(GG') dG' = J_n \left\{ M_{n-1} V' + VM'_{n-1} + \frac{1}{n} \sum_0^{n-2} \binom{n}{k+1} M_k M_{n-2-k} \right\}.$$

Darin ist  $J_n = I_1 I_2 \dots I_{n-1}$  und  $I_{n-1}$  die Oberfläche der Einheitskugel im  $E_n$ , ferner sind  $M_i = \left[ \binom{n-1}{i} \right]^{-1} \int S_i dA$  die verallgemeinerten mittleren Krümmungen der Ränder,  $S_i$  die symmetrischen Grundfunktionen der Hauptkrümmungen der Ränder und  $dA$  sein  $(n-1)$ -dimensionales Flächenelement. Die Ränder werden (mindestens) als 2-mal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Zum Beweis werden nach E. Cartan erhebliche Hilfsmittel aus Riemanns Geometrie verwendet. Die Schwierigkeiten rühren daher, daß der Rand des Durchschnittes  $GG'$  im allgemeinen Kanten hat. Anwendungen auf gefaserte Räume sind vorgesehen.

W. Blaschke.

**Santaló, L. A.:** Integral geometry in Hermitian spaces. Amer. J. Math. 74, 423—434 (1952).

In einem  $n$ -dimensionalen elliptisch-hermiteschen Raum werden für lineare Untermannigfaltigkeiten  $L_r$  Dichten bestimmt. Ist  $L_r^0$  eine  $r$ -dimensionale lineare Untermannigfaltigkeit, die bei den Transformationen der Untergruppe  $I_r$  der unitären Gruppe  $U$  des Raumes invariant bleibt, so ist die Dichte  $dL_r$  von  $L_r$  nichts anderes als das Raumelement des durch  $U/I_r$  bestimmten homogenen Raumes. Die analytischen Ausdrücke für die Dichte bekommt Verf. unter Verwendung der Cartanschen Methode des beweglichen Bezugssystems, nach einem von ihm (dies. Zbl. 41, 312) und S. S. Chern [Ann. of Math., II. Ser. 43, 178—189 (1942)] herrührenden Verfahren. Dazu wird ein  $n$ -Simplex gewählt, dessen Eckpunkte in bezug auf das absolute Gebilde des Raumes selbstkonjugiert sind. Die Relativkomponenten des beweglichen Bezugssystems mögen durch die Pfaffschen Formen  $\omega_{kj}$  ( $k, j = 0, 1, \dots, n$ ) bestimmt sein und  $\omega_{pj}^*$  bezeichne die zu ihnen konjugierten Formen. Im Falle einer Untergruppe  $I_r$  müssen  $\omega_{rk} = 0$  sein für  $0 \leq j \leq r, r+1 \leq k \leq n$ . Die Dichte  $dL_r$  ist dann, bis auf einen konstanten Faktor, durch den Absolutbetrag des äußeren Produktes  $dL_r = \Pi \omega_{is} \omega_{js}^*, 0 \leq i \leq r, r+1 \leq s \leq n$  der  $2(r+1)(n-r)$  nicht verschwindenden Pfaffschen Formen bestimmt. Die kinematische Dichte, d. h. das Raumelement für die Gesamtgruppe  $U$  ist, abgesehen von einem konstanten Faktor, durch  $du = \Pi \omega_{jk} \omega_{jk}^* \Pi \omega_{hk}, j < k, k, h \leq n$  bestimmt. Ist  $C_p$  eine  $p$ -dimensionale analytische Mannigfaltigkeit  $x^i = x^i(t_1, \dots, t_p)$ , so existiert für dieselbe ein invariantes Integral  $J_p$ . Dasselbe kann folgendermaßen definiert werden. Sind die projektiven Koordinaten  $x^i$  so normiert, daß  $x^i x^{*i} = 1$  ist, und setzt man  $\Omega^p = \Sigma dx^{i_1} dx^{*i_1} \dots dx^{i_p} dx^{*i_p}$ , wobei die Summation über die einzelnen äußeren Formen sich auf sämtliche Kombinationen  $i_1 \dots i_p$  von 1 bis  $n$  erstreckt, dann ist  $J_p(C_p) = p! (2\pi i)^{-p} \int_{C_p} \Omega^p$ . Für eine algebraische Mannigfaltigkeit  $C_p$  ist  $J_p(C_p)$  die

Ordnung derselben. Sind  $C_r$  und  $C_h$  zwei Mannigfaltigkeiten, für die  $r+h \geq n$  ist, und wird  $C_r$  durch die Transformation  $u \subset U$  in  $u C_r$  überführt, so findet Verf.

$$\int_U J_{h+r-n}(C_h \cap u C_r) du = J_h(C_h) J_r(C_r).$$



Dabei ist das Raumelement  $du$  so normiert, daß das Gesamtmaß von  $U$  gleich eins ist. Falls an Stelle von  $C_r$  eine lineare Untermannigfaltigkeit  $L_r$  betrachtet wird, so ergibt sich

$$\int_{U/\Gamma_r} J_{h+r-n}(C_h \cap L_r) dL_r = J_h(C_h);$$

wieder ist  $dL_r$  so normiert, daß der Gesamthinhalt von  $U/\Gamma_r$  gleich eins ist.

O. Varga.

## Topologie:

McShane, E. J.: Partial orderings and Moore-Smith limits. Amer. math. Monthly 59, 1—11 (1952).

Die §§ 1—5 enthalten eine ausführliche, mit elementaren Beispielen belegte Besprechung der Begriffe gerichtetes System, Moore-Smithsche Folge, vom Verf. als Netz bezeichnet, sowie des zugehörigen Konvergenzbegriffes. Ist  $A$  ein gerichtetes System, so heiße jede Abbildung  $f|A$  von  $A$  (in eine Menge  $M$ ) ein Netz (in  $M$ ). ( $A$  heißt gerichtet, wenn in  $A$  eine zweistellige, transitive Relation  $a < b$  erklärt ist derart, daß aus  $a, b \in A$  die Existenz eines  $c \in A$  folgt mit  $a < c$  und  $b < c$ .) Es seien (§ 6)  $A$  und  $B$  gerichtete Systeme, ferner  $f|A$  und  $g|B$  Netze in  $M$ . Dann heißt  $g$  Teilnetz von  $f$ , wenn eine eindeutige Abbildung  $a \rightarrow a(b)$  von  $B$  in  $A$  existiert derart, daß  $g(b) = f(a(b))$  für alle  $b \in B$  und daß zu jedem  $a' \in A$  ein  $b' \in B$  existiert mit der Eigenschaft: Aus  $b \in B$  und  $b' < b$  folgt  $a' < a(b)$ . — Im § 7 wird darauf hingewiesen, daß in jedem topologischen Raum  $R$  die Bikompaktheit der Menge  $X \subset R$  gleichwertig ist mit jeder der beiden folgenden Eigenschaften: (1) Jedes Netz von Punkten von  $X$  besitzt einen Häufungspunkt in  $X$ ; (2) Jedes Netz von Punkten von  $X$  besitzt ein Teilnetz, das gegen einen Punkt von  $X$  konvergiert. Dabei wird als Häufungspunkt des Netzes  $f|A$  jeder Punkt  $p \in R$  erklärt, für den jede Umgebung  $U(p)$  die Punkte eines mit  $f|A$  konfinalen Netzes enthält [d. h. zu jedem  $a \in A$  existiert ein  $a' \in A$  mit  $a < a'$  und  $f(a') \in U$ ]. — In § 8 wird ein durch die Relation  $<$  teilweise geordnetes System  $T$  als „Dedekind-vollständig“ bezeichnet, wenn für jedes (nicht leere) vermöge  $<$  gerichtete Teilsystem von  $T$  aus der Existenz einer oberen bzw. unteren Schranke (in  $T$ ) die Existenz eines Supremums bzw. Infimums folgt. Ist  $f|A$  ein Netz in einem solchen  $T$ , so heißt  $f|A$  konvergent in  $T$ , wenn vermöge  $<$  gerichtete Teilsysteme  $M$  bzw.  $N$  von  $T$  existieren mit  $\inf M = \sup N$  und wenn für beliebiges  $m \in M, n \in N$  gilt  $n < f(a) < m$  für schließlich alle  $a$  [d. h. für alle  $a \in A$  mit  $a' < a$  für passendes  $a' = a'(m, n)$ ]. Weitere Veröffentlichungen darüber werden in Aussicht gestellt. (Bemerkung des Ref.: Zu § 6 vgl. auch G. Nöbeling, dies. Zbl. 43, 163.)

O. Haupt.

Vulich, B. Z.: Über die Fortsetzung stetiger Funktionen in topologischen Räumen. Mat. Sbornik, n. Ser. 30 (72), 167—170 (1952) [Russisch].

Let  $A$  be a dense subset of a topological space  $S$ . It is proved that the following conditions are equivalent: (i) each continuous real function on  $A$  can be extended to a continuous function on  $S$ ; (ii) if  $f$  is any continuous real function on  $A$ , if  $A_1, A_2 \subset A$ , if  $f(x) \leq a$  for  $x \in A_1$  and  $f(x) \geq b$  for  $x \in A_2$  ( $a < b$ ), then  $A_1 \cdot \bar{A}_2 = \emptyset$ . — Real functions may assume the values  $\pm \infty$ .

R. Sikorski.

Tong, Hing: Some characterizations of normal and perfectly normal spaces. Duke math. J. 19, 289—292 (1952).

Der Verband  $M$  sei eine Erweiterung des Verbandes  $L$ , so daß in  $M$  das Supremum und Infimum jeder abzählbaren Teilmenge von  $L$  existieren; die Menge dieser Suprema heiße  $L_\sigma$ , die der Infima  $L_\delta$ . Ferner sei  $s \cap \bigcup_n t_n = \bigcup_n (s \cap t_n) \in M$  und  $s \cap \bigcap_n t_n = \bigcap_n (s \cap t_n) \in M$ ,

wenn  $s \in M$  und  $t_n \in L$ . Als Verallgemeinerung eines Satzes von Hausdorff [Math. Z. 5, 292—309 (1919)] wird bewiesen, daß es zu jedem  $s \in L_\delta$  und  $t \in L_\sigma$  mit  $s \subset t$  ein  $u \in L_\sigma \cap L_\delta$  mit  $s \subset u \subset t$  gibt. Zusammen mit dem Urysohn'schen Lemma liefert dies den bisher nur in metrischen Räumen bekannten Hahn'schen Einschiebungssatz über reelle Funktionen sogar in jedem normalen topologischen Raum  $R$ : (1) Ist  $f$  eine oberhalb und  $g$  eine unterhalb stetige in  $R$  definierte Funktion und  $f \leq g$ , so gibt es eine stetige Funktion  $h$  mit  $f \leq h \leq g$ . Vermöge der gleichen Schlüsse wie bei Hausdorff folgt hieraus der von Tietze in metrischen Räumen aufgestellte Satz: (2) Zu jeder in  $R$  erklärten nach unten beschränkten Funktion  $\Phi$ , die in einer abgeschlossenen Menge  $A$  stetig ist, existiert eine stetige Funktion  $h$  mit  $h \leq \Phi$ , die in  $A$  mit  $\Phi$  zusammenfällt; ferner der Tietze-Urysohn'sche Erweiterungssatz, nach dem jede in einer abgeschlossenen Teilmenge  $A$  von  $R$  definierte stetige Funktion zu einer in  $R$  stetigen Funktion fortgesetzt werden kann. Aus (2) und damit auch aus (1) folgt umgekehrt wieder, daß  $R$  normal ist. — In ähnlicher Weise wird jeder der beiden folgenden von Tietze in metrischen Räumen bewiesenen Sätze zur Charakterisierung eines im Sinne von Čech vollständig normalen Raumes  $R$  benutzt: (1) Jede in  $R$  unterhalb stetige Funktion ist die Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen. (2) Jede in  $R$  unterhalb stetige Funktion  $\Phi$ , die in einer abgeschlossenen Menge  $A$  stetig ist, läßt sich als Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen darstellen, die in  $A$  mit  $\Phi$  übereinstimmen. K. Krickeberg.

**Efremovič, V. A.: Invariante Definition des topologischen Produkts.** Uspechi mat. Nauk 7, Nr. 1 (47), 159—161 (1952) [Russisch].

Let  $\{X_\alpha\}$ , with  $\alpha \in A$ , denote an arbitrary class of topological spaces and let  $R$  denote the set of all systems  $\{x_\alpha\}$  with  $x_\alpha \in X_\alpha$ . A. Tychonoff introduced in  $R$  the notion of neighbourhood and obtained in this manner a space  $\prod_\alpha X_\alpha$  called topological product of  $X_\alpha$ . The author shows that an equivalent topology in  $R$  can be obtained also by means of the notion of closure, defined (invariantly) for every set  $P \subset R$  in the following manner:  $\{x_\alpha\} \in P$  if and only if for every decomposition of  $P$  into a finite sum  $P_1 + P_2 + \dots + P_n$  of disjoint sets there exists an index  $i_0$  such that, for every  $\alpha \in A$ , the point  $x_\alpha$  belongs to the closure of the projection of  $P_{i_0}$  into  $X_\alpha$ . K. Borsuk.

**Efremovič, V. A.: Die Geometrie der Nachbarschaft. I.** Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 189—200 (1952) [Russisch].

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung eines Teiles der früher angekündigten Ergebnisse über infinitesimale Räume (vgl. dies. Zbl. 42, 167). Es wird bewiesen, daß für metrische Räume ein Aquimorphismus dasselbe ist wie eine umkehrbar eindeutige und umkehrbar gleichmäßig stetige Abbildung. Es wird weiter gezeigt, daß ein infinitesimaler Raum (in dem die  $\delta$ -Beziehung gewissen vier Axiomen genügt) ein vollständig regulärer topologischer Raum ist, sowie daß ein bikompakter topologischer Raum auf eine und nur eine Weise mit einer infinitesimalen Struktur versehen werden kann. Schließlich wird gezeigt, daß eine Reihe fundamentaler Begriffe der Theorie der metrischen Räume infinitesimalen Charakter haben, d. h. allein durch die  $\delta$ -Beziehung definiert werden können. Hierzu gehören Begriffe wie Zusammenhang im Cantorsche Sinne (Verkettung), Totalbeschränktheit, Vollständigkeit. E. Burger.

**Myškis, A. D.: Über den Zusammenhang der infinitesimalen Räume mit den Erweiterungen topologischer Räume.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 879—882 (1952) [Russisch].

Sei  $M$  ein regulärer topologischer Raum,  $R$  ein regulärer Erweiterungsraum, in dem  $M$  überall dicht ist. Dann wird  $M$  zu einem infinitesimalen Raum im Sinne von Efremovič (dies. Zbl. 42, 167), indem zwei Mengen in  $M$  als unendlich benachbart betrachtet werden, wenn ihre abgeschlossenen Hüllen in  $R$  einen nicht-leeren Durchschnitt haben. Sei umgekehrt in  $M$  ein Nachbarschaftsbegriff erklärt, so wird bei geeigneter Fassung des Endenbegriffes für  $M$  die Menge der Enden von  $M$  zusammen mit den Punkten von  $M$  ein Erweiterungsraum  $\tilde{R}$  von  $M$ . Geht man dabei von dem durch  $R$  in  $M$  induzierten Nachbarschaftsbegriff aus, so wird  $\tilde{R}$  äquivalent zu  $R$ . Unter gewissen zusätzlichen Bedingungen für den Nachbarschaftsbegriff in  $M$  gilt auch umgekehrt: Konstruiert man zu diesem Nachbarschaftsbegriff den Raum  $\tilde{R}$ , so stimmt der von  $\tilde{R}$  in  $M$  induzierte Nachbarschaftsbegriff mit dem ursprünglichen überein. E. Burger.

**Smirnov, Ju.: Über Nachbarschaftsräume im Sinne V. A. Efremovičs.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 895—898 (1952) [Russisch].

In Analogie zu bekannten Bikompaktisierungsverfahren in der Theorie der topologischen Räume beweist Verf., daß es zu jedem infinitesimalen Raum (i. R.)  $P$  im Sinne von Efremovič (dies. Zbl. 42, 167) einen eindeutigen maximalen infinitesimalen Erweiterungsraum  $u P \supset P$  gibt, in welchem  $P$  überall dicht ist. Ein i. R. ist dann und nur dann maximal, wenn seine Topologie bikompakt ist. Auf diese Weise wird eine eindeutige Beziehung zwischen allen i. R., die einen vorgegebenen vollständig regulären Raum  $R$  erzeugen, und allen bikompakten Erweiterungen von  $R$  hergestellt. Diese Beziehung wird genauer untersucht. Im Falle eines metrischen Raumes  $P$  gilt:  $P$  ist dann und nur dann vollständig, wenn

kein Punkt von  $uP - P$  dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Weiter untersucht Verf. den Zusammenhang zwischen den i. R. und den Weilschen gleichmäßigen Strukturen: Jede gleichmäßige Struktur erzeugt einen i. R. Jeder i. R. kann aus (im allgemeinen mehreren) gleichmäßigen Strukturen erhalten werden. Letztere ist eindeutig bestimmt, falls der i. R. total-beschränkt im Sinne von Efremovič ist.

*E. Burger.*

**Smirnov, Ju. M.:** Über Nachbarschaftsräume im Sinne V. A. Efremovičs. *Uspechi mat. Nauk* 7, Nr. 4 (50), 135—136 (1952) [Russisch].

**Jaffard, Paul:** Sur la complétion d'un espace uniforme quelconque. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 502—503 (1952).

In this note, the author states and proves a theorem which refines and simplifies Theorem 2 of N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chapt. II, p. 102 (this Zbl. 26, 431). The author's theorem is the following: Let  $E$  be a uniform space (not necessarily separated). There exists a space  $\hat{E}$  which is complete and in which  $E$  is embedded;  $E$  is dense everywhere in  $\hat{E}$ ;  $\hat{E} - E$  is separated;  $\hat{E}$  is unique to isomorphisms and is „universal“ in the sense that any complete space  $E'$  containing  $E$  contains a subspace  $E''$  isomorphic with the extension  $\hat{E}$  of  $E$  just defined. — The short demonstration of this theorem is very elegant.

*C. Racine.*

**Cohen, Herman J.:** Sur un problème de M. Dieudonné. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 290—292 (1952).

Le Réf. a posé la question de savoir si pour un espace normal  $E$ , le filtre des voisinages de la diagonale  $\Delta$  de  $E \times E$  est toujours le filtre des entourages d'une structure uniforme sur  $E$  [*J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. 23, 65—76 (1944)]. L'A. montre d'abord que si cette propriété est vraie,  $E$  est nécessairement „collectionwise normal“ au sens de R. Bing [*Canadian J. Math.* 3, 175—186 (1951)]; comme R. Bing a donné des exemples d'espaces normaux qui ne sont pas „collectionwise normal“, la réponse à la question posée plus haut est négative. L'A. donne ensuite une autre formulation en termes de recouvrements ouverts, de la condition du début; cela lui permet, grâce à un autre exemple de R. Bing, de prouver que cette condition n'est pas nécessairement vérifiée par tous les espaces „collectionwise normal“.

*J. Dieudonné.*

**Dugundji, J.:** Note on CW polytopes. *Portugaliae Math.* 11, 7—10 (1952).

A geometric complex  $P$  is a point set composed of an arbitrary collection  $\Sigma$  of closed Euclidean cells such that every face of a cell  $\sigma \in \Sigma$  belongs to  $\Sigma$  and that the intersection of any two cells of  $\Sigma$  is a face of both of them. By a CW polytope (in the sense of J. H. C. Whitehead) one understands a space homeomorphic to a geometric complex  $P$  with the following topology:  $U \subset P$  is open if and only if for each closed cell  $\sigma \in \Sigma$  the set  $U \cap \sigma$  is open in the Euclidean topology of  $\bar{\sigma}$ . It is shown in the paper that every CW polytope  $P$  is paracompact. Moreover it is proved that if  $A$  is a closed subset of any metric space  $X$ , then for every continuous mapping  $f$  of  $A$  into  $P$  there exists a neighbourhood  $W$  of  $A$  and a continuous extension  $f^*$  of  $f$  over  $W$  such that  $f^*(W) \subset P$ . The paper contains also some results concerning the vector spaces. In particular, it is proved that any real vector space with the weak topology is an absolute retract (for metric spaces).

*K. Borsuk.*

**Sitnikov, K.:** Über stetige Deformationen nicht-abgeschlossener Mengen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 82, 845—848 (1952) [Russisch].

Es wird der folgende Deformationssatz für nicht-abgeschlossene Mengen bewiesen: Sei in einer  $n$ -dimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit  $M$  eine beliebige Menge  $A$  gegeben und ein  $\Delta$ -Zyklus  $z$  (über einem beliebigen Koeffizientenbereich), der auf einem gewissen Kompaktum  $\Phi \subset M - A$  liegt. Seien  $g = \{g_\theta\}$  und  $h = \{h_\theta\}$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , Deformationen der Mengen  $A$  bzw.  $\Phi$ , wobei  $g_\theta A$



und  $h_\theta \Phi$  für jeden Wert von  $\theta$  punktfremd sind. Sei weiter  $h_1 z \sim 0$  in  $M - g_1 A$ . Dann ist auch  $z \sim 0$  in  $M - A$ . — Hierbei sind  $\Delta$ -Zyklen und Homologien im Sinne des Verf. (dies. Zbl. 43, 383, 2. Referat) zu verstehen. — Der Satz gilt auch für eine beliebige offene Mannigfaltigkeit  $U$  unter der Bedingung, daß man zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Kompaktum  $\Phi \subset U$  so angeben kann, daß  $\varrho(x, g_\theta x) < \varepsilon$  für alle  $x \in A - \Phi$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  ist.

*E. Burger.*

**Sitnikov, K.:** Über die Dimension der nichtabgeschlossenen Punktmengen des Euklidischen Raumes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 31–34 (1952) [Russisch].

Verf. beweist unter Benutzung seines Deformationssatzes (s. vorst. Ref.) die folgende Verallgemeinerung eines bekannten dimensionstheoretischen Satzes von Alexandroff auf nichtabgeschlossene Mengen  $A$  im euklidischen  $R^n$  und beantwortet damit eine von Alexandroff (dies. Zbl. 15, 375) gestellte Frage. Sei  $A$  eine beliebige  $r$ -dimensionale Menge in  $R^n$ ,  $0 \leq r < n - 1$ . Dann berandet jeder  $\Delta$ -Zyklus von einer Dimension  $< n - r - 1$  (über beliebigem Koeffizientenbereich), der in  $R^n - A$  liegt und in einer offenen Menge  $U \subset R^n$  berandet, auch in  $U - A$ . Andererseits existiert eine  $n$ -dimensionale offene Kugel  $U \subset R^n$  und ein in  $U - A$  liegender ganzzahliger  $(n - r - 1)$ -dimensionaler Zyklus, der nicht in  $U - A$  berandet. Hierbei sind die Begriffe  $\Delta$ -Zyklus und Homologie im Sinne des Verf. (dies. Zbl. 43, 383, 2. Referat) zu nehmen. — Bezüglich der Frage des Zusammenhanges dieses Satzes mit dem allgemeinen Dualitätssatz des Verf. (dies. Zbl. 43, 383) gilt: Der erste Teil des Satzes kann aus einer gewissen Verschärfung dieses Dualitätssatzes gewonnen werden, während hierzu für den zweiten Teil noch eine gewisse Homologiecharakterisierung der Dimension nötig ist, für die jedoch kein unabhängiger Beweis bekannt ist.

*E. Burger.*

**Mišenko, E. F.:** Über eine elementare Klasse von nicht-abgeschlossenen Mengen und einen Dualitätssatz für sie. Mat. Sbornik, n. Ser. 31 (73), 183–188 (1952) [Russisch].

Alexandroff (dies. Zbl. 33, 133) hat im Anschluß an seinen allgemeinen Dualitätssatz für nicht-abgeschlossene Mengen in der  $n$ -Sphäre  $S^n$  die Frage nach der Existenz eines elementaren Dualitätsbereiches gestellt. Ein solcher ist ein System  $\mathfrak{S}$  von Teilmengen in Sphären beliebiger Dimension, wobei mit  $A \subset S^n$  auch die Komplementärmenge  $S^n - A$  sowie jedes topologische Bild von  $A$  in einer  $S^m$  zu  $\mathfrak{S}$  gehört, und für jedes  $A \in \mathfrak{S}$ ,  $A \subset S^n$  für  $A$  und seine Komplementärmenge  $B = S^n - A$  die Dualität  $\Delta_p^c A | \Delta_p^c B$  der Bettischen Gruppen mit kompakten Trägern bei jeder Wahl dualer Koeffizientenbereiche gilt. Verf. beweist die Existenz eines elementaren Dualitätsbereiches, der alle gehäuteten Polyeder umfaßt. Der Bereich aller zweiseitigen Homologieretrakte, d. h. der Mengen  $A \subset S^n$ , die für jedes  $p \leq n$  und beliebigen Koeffizientenbereich den Alexandroffschen Bedingungen  $(J^p)(a^p)$ ,  $(ur^p)$  genügen, ist nämlich ein solcher elementarer Dualitätsbereich. Nach den Ergebnissen von Alexandroff hat Verf. hierzu nur noch zu zeigen, daß die Komplementärmenge eines jeden zweiseitigen Homologieretraktes wieder zweiseitiger Homologieretrakt ist.

*E. Burger.*

**Yang, Chung-Tao:** On cohomology theories. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 348–351 (1952).

The unrestricted Čech cohomology theory and the Alexander cohomology theory are defined (both based on all open coverings) for arbitrary spaces. The agreement of these two cohomology theories for compact Hausdorff spaces was already proved by E. H. Spanier (this Zbl. 35, 248) and the isomorphism of the absolute cohomology groups of paracompact spaces for both theories was proved by W. Hurewicz, J. Dugundji and C. H. Dowker (this Zbl. 31, 283). The author proves the agreement of these two cohomology theories for fully spaces (and for arbitrary coefficient groups) and deduces the validity of the homotopy axiom and

of the map excision theorem for both theories in this case. For arbitrary spaces C. H. Dowker proved the agreement of these two cohomology theories in a recent paper [Ann. of Math. **56**, 84—95 (1952)]. The author's research is independent of Dowker's and their proofs are different. The definition of the Alexander cohomology groups used by the author is due to A. D. Wallace and is different from the one used by Dowker, but they are equivalent. *K. Morita.*

**Heller, Alex:** On equivariant maps of spaces with operators. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 223—231 (1952).

Wenn in zwei Räumen  $X$  und  $Y$  die gleiche topologische Gruppe  $G$  operiert, so heiße eine Abbildung  $f$  von  $X$  in  $Y$  äquivariant, wenn sie mit den Operationen von  $G$  vertauschbar ist. Ist  $\lambda$  die kanonische Projektion von  $X \times Y$  auf  $Y$ , so ist eine notwendige Bedingung für die Existenz einer äquivarianten Abbildung von  $X$  in  $Y$  bezüglich  $G$ , daß ein rechtes Inverses der Abbildung  $\lambda/G$  von  $(X \times Y)/G$  in  $Y/G$  existiert. Wenn  $X$  ein Hauptfaserraum ist, so ist die Bedingung auch hinreichend, und die Menge der äquivarianten Abbildungen ist eindeutig auf die der rechten Inversen von  $\lambda/G$  bezogen. Insbesondere sind die Schnittflächen eines Faserraums eindeutig auf die äquivarianten Abbildungen des zugehörigen Hauptfaserraumes in die Faser (bezüglich der Gruppe des Faserraumes) bezogen. Weitere Anwendungen beziehen sich auf die Äquivalenz der verschiedenen Definitionen von Tensoren durch Faserräume und auf Systeme von stetigen Funktionen auf Sphären. *H. Guggenheimer.*

**Heller, Alex:** Singular homology in fibre bundles. Ann. of Math., II. Ser. **55**, 232—249 (1952).

In dieser Arbeit wird die Theorie der äquivarianten Homologie von S. Eilenberg (dies. Zbl. **29**, 419) statt für diskrete Gruppen von Operatoren für topologische Gruppen von Operatoren aufgebaut, und zwar für semi-simpliziale Komplexe. In dieser Gestalt ergibt sich ein einigermaßen reichhaltiger algebraischer Apparat, der sich für die Behandlung von Faserräumen eignet. Insbesondere wird für jede Operatorengruppe ein Faserraum konstruiert, der universell ist für jeden Hauptfaserraum mit der gegebenen Gruppe, und dessen Basis ein semi-simplizialer Komplex ist. Damit läßt sich für diesen Fall auch allgemein der charakteristische Ring definieren. *H. Guggenheimer.*

**Floyd, E. E.:** On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces. Trans. Amer. math. Soc. **72**, 138—147 (1952).

$X$  est un espace topologique localement compact de dimension finie dont les groupes d'homologie de Čech sont finis.  $T$  est une application périodique de  $X$  dans  $X$  dont la période est un nombre premier  $p$ : Soit  $L$  l'ensemble des points fixes de  $T$  et soit  $Y$  l'espace des trajectoires de  $T$ . L'A. démontre la formule (1):  $\chi(x) + (p-1)\chi(L) = p\chi(Y)$  [où  $\chi(A) = \sum (-1)^i \dim H_i(A)$ ] et la relation (2)  $\sum \dim H_i(L) \leq \sum \dim H_i(X)$ . Les deux formules, à peu près évidentes dans le cas très particulier où  $X, L, Y$  sont des complexes finis et où  $T$  est une application simpliciale, nécessitent des démonstrations délicates faisant intervenir à peu près tous les résultats essentiels de la théorie de P. A. Smith. Ces formules admettent des applications, immédiates mais très importantes, à certains problèmes de points fixes. *G. Reeb.*

**Jackson, James R.:** On homotopy groups of function spaces. Amer. J. Math. **74**, 241—252 (1952).

Bezeichnungen:  $X, Y$  sind topologische Räume. Es ist  $x_0 \in X_0 \subset X$  und  $y_0 \in Y_0 \subset Y$ .  $\Omega$  ist der Raum aller stetigen Abbildungen  $f: (X, X_0) \rightarrow (Y, Y_0)$ , d. h.  $f(X) \subset Y$  und  $f(X_0) \subset Y_0$ . Entsprechend:  $\Omega_0 =$  Raum aller  $f: (X, X_0) \rightarrow (Y, y_0)$  und  $\mathcal{P} =$  Raum aller  $f: X_0 \rightarrow Y_0$ . Die Abbildungsräume werden mit der „compact-open“ Topologie von Arens [Ann. of Math., II. Ser. **47**, 480—495 (1946)] und Fox [Bull. Amer. math. Soc. **51**, 429—432 (1945)] versehen. Jede konstante Abbildung mit dem Wert  $y_0$  wird ebenfalls mit  $y_0$  bezeichnet. Verf. beweist u. a. den folgenden Hauptsatz. Voraussetzungen:  $X_0$  ist Retrakt von  $X$ . Die Retraktions-

abbildung von  $X$  auf  $X_0$  werde mit  $\varrho_0$  bezeichnet.  $X, X_0, Y$  sollen gewisse zusätzliche Bedingungen erfüllen. [Diese Bedingungen sind jedenfalls dann erfüllt, wenn  $X$  ein absoluter Umgebungsretrakt (ANR), z. B. ein lokal-endliches Polyeder, ist.] Behauptung: Die Abbildung  $\theta$  von  $\Omega$  in  $\Psi$  ( $\theta f = f|_{X_0}$ ) induziert einen Homomorphismus  $\theta^*$  von  $\pi_m(\Omega, y_0)$  auf  $\pi_m(\Psi, y_0)$ . — Die Abbildung  $j$  von  $\Omega_0$  in  $\Omega$  ( $j f = f$ ) induziert einen Isomorphismus  $j^*$  von  $\pi_m(\Omega_0, y_0)$  auf den Kern der Abbildung  $\theta^*$ . — Die Abbildung  $\varrho$  von  $\Psi$  in  $\Omega$  ( $\varrho f = f \varrho_0$ ) induziert einen Isomorphismus  $\varrho^*$  von  $\pi_m(\Psi, y_0)$  in  $\pi_m(\Omega, y_0)$ , für den  $\theta^* \varrho^*$  die identische Abbildung ist. — Folgerungen: Für  $m \geq 2$  (alle  $\pi_m$  abelsch) ist  $\pi_m(\Omega, y_0)$  isomorph der direkten Summe  $\pi_m(\Omega_0, y_0) + \pi_m(\Omega_0, y_0)$ . Allgemein (also auch für  $m = 1$ ) gilt:  $\pi_m(\Omega, y_0)$  ist eine Erweiterung spezieller Art („split extension“) von  $\pi_m(\Omega_0, y_0)$  mit der Faktorgruppe  $\pi_m(\Omega, y_0)/\pi_m(\Omega_0, y_0) = \pi_m(\Psi, y_0)$ . Verf. gibt eine Reihe von Anwendungen des Hauptsatzes an. Es soll hier nur die Anwendung auf die Torus-Homotopiegruppen von Fox (dies. Zbl. 38, 366) angegeben werden:  $T^r$  sei der  $r$ -dimensionale Torus (=  $r$ -faches topologisches Produkt von 1-Sphären),  $T^0$  = Punkt. Es wird definiert:  $\tau_r^m(Y, y_0) = \pi_m(Y^{T^{r-1}}, y_0)$ . Vgl. auch Yuh-Lin Jou, dies. Zbl. 42, 415. Die  $r$ -te Torus-Homotopiegruppe stimmt mit  $\tau_r^m(Y, y_0)$  überein. Aus dem Hauptsatz folgt ( $X = T^r$ ,  $X_0 = T^{r-1}$ ,  $Y_0 = Y$ ;  $m \geq 1$ ): 1.  $\tau_r^m$  ist eine „split extension“ von  $\tau_{r-1}^{m+1}(Y, y_0)$  mit der Faktorgruppe  $\tau_r^m(Y, y_0)/\tau_{r-1}^{m+1}(Y, y_0) = \tau_{r-1}^m(Y, y_0)$ . 2. Da  $\tau_{r-1}^{m+1}$  abelsch ist, ergibt sich durch Induktion:

$$\tau_{r-1}^{m+1}(Y, y_0) \simeq \sum_{j=2}^r \binom{r-2}{j-2} \pi_{m+j-1}(Y, y_0). \quad \text{— Den Satz von Fox über die Struktur der Torus-}$$

Homotopiegruppen erhält man aus 1. und 2. für  $m = 1$ .

F. Hirzebruch.

**Eilenberg, Samuel und Saunders MacLane: Cohomology groups of Abelian groups and homotopy theory. IV.** Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 325—329 (1952).

Seien  $K$  ein Simplicialkomplex mit geordneten Ecken,  $L_1, \dots, L_r$  Unterkomplexe von  $K$  und  $L = L_1 \cup \dots \cup L_r$ . Seien  $\Pi$  und  $G$  abelsche Gruppen. Verff. definieren eine Produktverknüpfung  $[x_1, \dots, x_r; y] \in H^q(K, L; G)$ , wobei die  $x_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) Kohomologieklassen aus  $H^n(K, L_i; \Pi)$  sind und  $y \in H^q(\Pi, n; G) = H^q(K(\Pi, n); G)$  (Bezeichnungen wie in Teil I—III; dies. Zbl. 37, 395; 39, 190; 42, 414). Für  $q < rn$  verschwindet das Produkt, für  $q = rn$  geht es in das Cupprodukt  $x_1 \cup \dots \cup x_r$  mit einer durch  $y$  bestimmten Koeffizientenpaarung  $\Pi \otimes \dots \otimes \Pi \rightarrow G$  über. Durch Vermittlung des Prismas  $K \times I$  über  $K$  wird ferner aus dem genannten Produkt noch ein weiteres „heruntergedrücktes“ (depressed) Produkt  $\langle x_1, \dots, x_{r-1}, x_r; y \rangle \in H^{q-1}(K, L; G)$  mit ähnlichen Eigenschaften definiert, wobei jetzt  $x_i \in H^n(K, L_i; \Pi)$  ( $i = 1, \dots, r-1$ ),  $x_r \in H^{n-1}(K, L_r; \Pi)$ ,  $y \in H^q(\Pi, n; G)$  ist. — Mit Hilfe dieser Produkte wird das Problem der Homotopieklassifizierung der Abbildungen eines  $q$ -dimensionalen Komplexes  $K^q$  in einen stetig-zusammenhängenden Raum  $Y$  mit  $\pi_i(Y) = 0$  für  $1 \leq i < n$  und  $n < i < q$  ( $1 < n < q$ ) gelöst. Es werden nämlich — ohne Beweis — der folgende Erweiterungs- und Homotopiesatz angegeben. Satz 1: Seien  $f, g: K^n \cup L \rightarrow Y$  zwei auf  $K^{n+1} \cup L$  erweiterbare Abbildungen mit  $f|_L = g|_L$ . Dann gilt für die Differenz ihrer zweiten Obstruktionen  $z^{q+1}(f) - z^{q+1}(g) = [(f-g)^* i^n; k^{q+1}] + [g^* i^n, (f-g)^* i^n; k^{q+1}]$ . Dabei ist  $f^*$  der durch eine Erweiterung  $f'$  von  $f$  auf  $K^q \cup L$  induzierte Homomorphismus  $H^n(Y; G) \rightarrow H^n(K; G)$  und  $(f-g)^*$  der entsprechende Differenzhomomorphismus  $H^n(Y; G) \rightarrow H^n(K, L; G)$ . Weiter bezeichnet  $i^n \in H^n(Y; \pi_n(Y))$  das Bild  $\kappa^* b^n$  von  $b^n$  bei dem durch die Abbildung  $\kappa$  (vgl. Eilenberg-MacLane, dies. Zbl. 36, 126) erzeugten Homomorphismus  $\kappa^*: H^n(\pi_n(Y), n; G) \rightarrow H^n(Y; G)$ , wobei  $b^n$  eine gewisse ausgezeichnete Kohomologiekategorie in  $H^n(\pi_n(Y), n; \pi_n(Y))$  ist. Schließlich ist  $k^{q+1}$  die Eilenberg-MacLanesche Invariante  $k_n^{q+1}(Y) \in H^{q+1}(\pi_n(Y), n; \pi_q(Y))$  (vgl. dies. Zbl. 36, 126). Satz 2: Seien  $f_0, f_1: K^q \cup L \rightarrow Y$  zwei Abbildungen mit  $f_0|_{K^{q-1} \cup L} = f_1|_{K^{q-1} \cup L}$ . Dann sind  $f_0$  und  $f_1$  dann und nur dann homotop rel.  $L$ , wenn es ein  $e^{n-1} \in H^{n-1}(K, L; \pi_n(Y))$  gibt, so daß für die Differenz-Kohomologiekategorie  $d^q(f_0, f_1) \in H^q(K, L; \pi_q(Y))$  gilt  $d^q(f_0, f_1) + [e^{n-1}; S k^{q+1}] + [f_0^* i^n, e^{n-1}; k^{q+1}] = 0$ . Dabei ist  $S: H^{q+1}(\pi_n(Y), n+1; G) \rightarrow H^q(\Pi, n; G)$  der Einhängungshomomorphismus aus Note I. — Für  $q = n+1$ ,  $n > 1$  gehen diese Sätze in die entsprechenden Sätze von Steenrod ( $Y = n$ -Sphäre) (dies. Zbl. 30, 416), Postnikov ( $n > 2$ ) (dies. Zbl. 37, 262), Whitney und Postnikov ( $n = 2$ ) (dies. Zbl. 40, 258 und 34, 257) über. Der Fall  $n = 1$  wird in der Note nicht behandelt. Jedoch geben Verff. an, daß sie Teilergebnisse erhalten haben, die die bekannten Ergebnisse von Robbins ( $q = 2$ ) (dies. Zbl. 24, 361) und Olum ( $q > 2$ ) [Bull. Amer. math. Soc. 53, 1132 (1947)] umfassen. E. Burger.

**Gordon, I. I.: Klassifikation der Abbildungen eines  $n$ -dimensionalen Komplexes in den  $n$ -dimensionalen reellen projektiven Raum.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 16, 113—146 (1952) [Russisch].

Diese Arbeit enthält die vollständigen Beweise der von Verf. in zwei Noten (dies. Zbl. 34, 112 und 42, 175) angekündigten Ergebnisse über die Klassifikation der Abbildungen eines  $n$ -dimensionalen Komplexes  $K^n$  in den  $n$ -dimensionalen reellen projektiven Raum  $P^n$ . Die Methode besteht im wesentlichen in einer Klassifizierung der entsprechenden Überlagerungsabbildungen bei deckbewegungstreuer Homotopie. Letzteres geschieht nach dem bekannten Muster der



Abbildungen eines  $n$ -Komplexes in die  $n$ -Sphäre  $S^n$  durch Betrachtung der Differenzkette zweier Abbildungen, die auf dem  $(n-1)$ -Gerüst des Urbildkomplexes übereinstimmen. Für den Fall einer geschlossenen Pseudomannigfaltigkeit  $K^n = M^n$  werden die Ergebnisse zu einer vollständigen Aufzählung der Abbildungsklassen ausgebaut (Bezeichnungen wie in den zitierten Referaten): 1. Für ungerades  $n$  und orientierbare  $M^n$  sind die Klassen der Abbildungen  $f: M^n \rightarrow P^n$  mit  $\Phi_0(f) = \Phi$  eindeutig durch den Grad von  $f$  bestimmt, wobei genau alle geraden Zahlen als Grad vorkommen. Für die zu einer festen Untergruppe  $\Phi_0 \neq \Phi$  vom Index 2 gehörenden Abbildungen sind die Klassen gleichfalls durch den Grad bestimmt, wobei entweder alle geraden oder alle ungeraden Zahlen als Grad auftreten. Für ungerades  $n$  und nichtorientierbare  $M^n$  existieren zu jeder Untergruppe  $\Phi_0$  vom Index 2 in  $\Phi$  und auch zu  $\Phi_0 = \Phi$  selbst genau zwei Klassen. 2. Für gerades  $n$  und orientierbare  $M^n$  wird die Klasse der Abbildung  $f$  mit  $\Phi_0(f) = \Phi$  eindeutig durch den absoluten Betrag des Grades der Überlagerungsabbildung  $f: M^n \rightarrow S^n$  bestimmt, wobei diese Grade beliebige ganze Zahlen sein können. Weiter existieren zu jeder Untergruppe  $\Phi_0$  vom Index 2 genau zwei Abbildungsklassen. Für gerades  $n$  und nichtorientierbare  $M^n$  existieren zwei Klassen mit  $\Phi_0(f) = \Phi$ , und zu einer Untergruppe  $\Phi_0$  vom Index 2, für welche die zugehörige zweiblättrige Überlagerung  $L^n$  über  $M^n$  orientierbar ist, bestimmen sich die Abbildungsklassen durch den absoluten Betrag des Grades der Überlagerungsabbildung  $L^n \rightarrow S^n$ , wobei als Grade entweder alle geraden oder alle ungeraden Zahlen vorkommen. Für nichtorientierbare  $L^n$  gibt es eine oder zwei Klassen (beide Fälle kommen vor und lassen sich durch eine gewisse Homologiebedingung unterscheiden). Diese Ergebnisse liefern insbesondere eine vollständige Übersicht über die Abbildungen einer geschlossenen Fläche in die projektive Ebene (dies. Zbl. 42, 175).

*E. Burger.*

**Puppe, S. D.: Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten.** Math. Z. 56, 33—48 (1952).

Seifert (dies. Zbl. 11, 178) hat gezeigt, daß die von ihm eingeführten Verschlingungsinvarianten von Überlagerungen des Knotenaußenraumes in gewissen Fällen die Unterscheidung von Knoten gestatten, deren Minkowskische Einheiten übereinstimmen. Demgegenüber zeigt Verf. hier, daß die Minkowskischen Einheiten eines Knotens durch die Torsionskoeffizienten und Verschlingungsinvarianten der zweifachen zyklischen Überlagerung bestimmt sind. Und zwar ist bei geeigneter Festsetzung der Orientierungen die zur ungeraden Primzahl  $p$  gehörige Minkowskische Knoteninvariante  $C_p = \left( \frac{(-1)^{[\lambda/2]}}{p} \right) \cdot \prod_{e=1 \pmod{2}} v_{p^e}$ , wobei  $\lambda$  die Anzahl der

Torsionskoeffizienten ist, die  $p$  in ungerader Potenz enthalten,  $\left( \frac{n}{p} \right)$  das Legendresche Restsymbol und  $v_{p^e}$  die zu  $p^e$  gehörige Seifertsche Verschlingungsinvariante der zweifachen zyklischen Überlagerung bedeutet. Dabei ist  $v_{p^e} = 1$  zu setzen, wenn  $p^e$  nicht der  $p$ -Beitrag eines Torsionskoeffizienten ist. Wesentliches Hilfsmittel beim Beweis des Satzes ist die von Seifert (l. c.) angegebene Berechnung der Verschlingung der Torsionsgruppe der zweifachen zyklischen Knotenüberlagerung aus der quadratischen Form des Knotens.

*E. Burger.*

**Fox, R. H.: On the complementary domains of a certain pair of inequivalent knots.** Indagationes math. 14, 37—40 = Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 55, 37—40 (1952).

Die beiden Knoten  $k_1$  bzw.  $k_2$ , die aus je zwei Kleeblattschlingen — nämlich 1. aus zwei äquivalenten bzw. 2. aus zwei zueinander spiegelbildlichen — zusammengesetzt sind, haben isomorphe Fundamentalgruppen (Fgr.), sind aber nach Seifert. (dies. Zbl. 8, 181) nicht äquivalent. Verf. zeigt, daß ihre Komplementäräume  $R - k_1$ ,  $R - k_2$  nicht homöomorph sind. [Man kennt inäquivalente Verkettungen, deren Komplementäräume homöomorph sind; vgl. J. H. C. Whitehead, dies. Zbl. 16, 44.] — Eine Untergruppe (Ugr.)  $H$  der Fgr.  $G$  eines topologischen Raumes  $Z$  heiße peripher, wenn für jede kompakte echte Teilmenge  $A$  von  $Z$  die Fgr.  $G^*$  von  $Z - A$  eine zu  $H$  isomorphe Ugr.  $H^* = e H e^{-1}$  enthält, wobei  $e$  einen die Grundpunkte von  $G$  und  $G^*$  in  $Z$  verbindenden Weg bezeichnet. Ist  $Z$  topologisch auf einen Raum  $Z'$  abgebildet, so entsprechen bei dem durch die Abbildung induzierten Isomorphismus von  $G$  auf  $G'$  den peripheren Ugr. von  $G$  die peripheren Ugr. von  $G'$ . Ist  $Z = R - k$  der Komplementärraum eines Knotens  $k$ , so wird eine maximale

periphere Ugr.  $H$  von  $G$  erzeugt durch die beiden Kurven  $x, y$ , die Meridiankurve und in  $R - k$  zu Null homologe Parallelkurve einer  $k$  umgebenden Torusfläche sind; die zu  $H$  konjugierten Ugr. sind ebenfalls peripher. — Für die beiden Knoten  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ) bestimmt Verf. bis auf innere Automorphismen alle Homomorphismen von  $G_i$  in die symmetrische Gruppe  $P$  des Gerades 5, bei denen  $x_i$  in einen Zyklus der Ordnung 5 übergeht und das Bild von  $G_i$  nicht-kommutativ ist. Für  $i = 2$ , aber nicht für  $i = 1$ , gibt es darunter Homomorphismen, bei denen der Durchschnitt jeder maximalen peripheren Ugr.  $g_i H_i g_i^{-1}$  mit der Kommutatorgruppe von  $G_i$  auf das Einselement von  $P$  abgebildet wird. Also sind  $R - k_1$  und  $R - k_2$  nicht homöomorph. E. Pannwitz.

Maunsell, F. G.: A note on Tutte's paper: „The factorization of linear graphs.“ J. London math. Soc. **27**, 127—128 (1952).

Verf. bringt einen einfachen Beweis mit elementaren Mitteln für einen Satz von Tutte (dies. Zbl. **29**, 233). Ist  $N$  ein Graph und sind  $a_r$  und  $a_s$  zwei seiner Knotenpunkte, so werde mit  $N_{rs}$  der Graph bezeichnet, den man aus  $N$  durch Streichung von  $a_r$  und  $a_s$  und aller mit  $a_r$  und  $a_s$  inzidierenden Kanten erhält. Ein Knotenpunkt  $a_i$  von  $N$  heißt singulär, wenn für jeden Knotenpunkt  $a_j$   $N_{ij}$  keinen Faktor 1. Grades enthält. — Der Satz lautet: Ist  $N$  ein Graph gerader Ordnung ohne Faktor 1. Grades und sind  $a_r$  und  $a_s$  Knotenpunkte, die durch einen Kantenzug in  $N$  verbindbar sind, der keinen singulären Punkt enthält, dann ist auch  $N_{rs}$  ohne Faktor 1. Grades. H. Künneht.

Luce, R. Dunarn: Two decomposition theorems for a class of finite oriented graphs. Amer. J. Math. **74**, 701—722 (1952).

This paper contains an exhaustive study of finite oriented graphs which are subjected to the conditions that at most two edges exist between any pair of vertices, and whenever two edges do exist between a pair of vertices they shall have the opposite orientation. Such a graph is called a network. A network is said to be of degree 0 if it is not connected. A network  $N$  is of degree  $k \geq 1$  if there exists a set of  $k$  distinct edges whose removal from the network will result in a subnetwork of degree 0 (containing all vertices of  $N$ ), while the removal of any set of  $h < k$  edges results in a connected subnetwork (containing all vertices of  $N$ ). The network  $N$  is said to be  $k$ -minimal if the removal of any edge of  $N$  results in a subnetwork of degree  $k - 1$ . A network is called minimal if it is connected and 1-minimal. The first decomposition theorem of the author states that every network of degree  $k$  is the sum of  $k + 1$   $k$ -minimal subnetworks, and admits that the study of any network may be reduced to the study of minimal networks. The second decomposition theorem concerns with minimal networks which are no trees, and throws light on the structure of these networks. Finally, a special class of minimal networks is investigated the members of which have a particularly simple structure. T. Szele.

### Angewandte Geometrie:

Poivilliers, Georges: Méthode de formation de l'image plastique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2245—2247 (1952).

La méthode repose sur la correction de calage en site des faisceaux perspectifs par relèvement dans un plan normal à la base, obtenu en remplaçant l'intersection de segments capables par celle de cordes. L'image plastique est formée sans tâtonnements quelle que soit la forme de la surface couverte. La présente Note est relative à son application au cas des couples tronqués par des nuages ou des étendues d'eau et à sa généralisation au cas de vues obliques ou panoramiques.

M. Piazzolla-Beloch.

Poivilliers, Georges: Discrimination et correction de l'influence des déformations locales transversales des faisceaux perspectifs. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2321—2324 (1952).

L'A. donne une méthode qui permet d'éliminer l'influence des déviations transversales des rayons perspectifs nuisibles pour la formation de l'image plastique, déviations produites, comme il semble selon l'A., par des anomalies de la réfraction atmosphérique. *M. Piazzolla-Beloch.*

**Poivilliers, Georges:** Discrimination et correction de l'influence des déformations locales latérales des faisceaux perspectifs dans le cheminement photogrammétrique aérien. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2407—2409 (1952).

Dans cette Note l'A. observe que les déviations locales latérales des rayons perspectifs entraînent des erreurs d'éloignement des points de connexion des couples dans le cheminement photogrammétrique aérien. — Il démontre que ces déviations peuvent être décelées et leur influence éliminée. *M. Piazzolla-Beloch.*

**Poivilliers, Georges:** Méthode de cheminement photogrammétrique aérien. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 2504—2507 (1952).

La présente Note est relative à une méthode de cheminement fournissant des lois rigoureuses de cumul des erreurs systématiques. Ces erreurs sont rendues aussi constantes que possible en maintenant la base fixe en grandeur et direction suivant l'axe des  $x$ . Les erreurs provenant des déformations locales anormales des faisceaux perspectifs sont éliminées. Les opérations sont réduites à un seul passage. *M. Piazzolla-Beloch.*

## Theoretische Physik.

**Aržanyč, I. S.:** Die Resolventen der Grundaufgaben der Feldtheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 545—548 (1952) [Russisch].

In der Hydrodynamik, Elastizitätstheorie und Elektrodynamik besteht die Aufgabe, bei bestimmten Randwerten Vektoren zu finden, deren Wirbel und Quellen vorgegeben sind. Im vorliegenden Mitteilung wird gezeigt, wie diese Probleme mit Hilfe der Resolventen von Integralgleichungen gelöst werden können. *H. Falkenhagen.*

**Adem, Julián and Marcos Moshinsky:** On matrix boundary value problems. Quart. appl. Math. 9, 424—431 (1952).

Es wird eine Reihe Probleme der klassischen Physik diskutiert, die sich auf ein Matrix-Randwertproblem zurückführen lassen. Dieses kann dann nach einer von Moshinsky ausgearbeiteten Methode gelöst werden. *W. Thirring.*

**Poincelot, Paul:** Sur la notion de vitesse de groupe. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 599—602 (1952).

## Mechanik:

**Truesdell, Clifford A.:** A program of physical research in classical mechanics. Z. angew. Math. Phys. 3, 79—95 (1952).

**Stumpff, K.:** Hauptgleichung und Entwicklungssätze in punktmechanischen Problemen, insbesondere in der Zweikörperbewegung. Astron. Nachr. 280, 97—112 (1952).

Die Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem, allgemeine Möglichkeiten zu finden, wie man in mechanischen Problemen die Zeit durch andere unabhängige Variable ersetzen und mit deren Hilfe eine einfache Darstellung der Lösung erzielen kann. Der Zusammenhang zwischen der Zeit und einer solchen neuen unabhängigen Variablen wird als Hauptgleichung des Problems bezeichnet. Verf. beschäftigt sich vorwiegend mit neuen Variablen, deren Zusammenhang mit der

Zeit  $\tau$  in der Form  $q(\tau) = \int_0^\tau f(\xi) d\xi$  dargestellt werden kann. Die Funktion  $f$  soll zwecks Monotonie von  $q$  mit  $\tau$  wesentlich positiv sein, ist sonst beliebig. Z. B. läßt



sich eine Transformation dieser Art angeben, um die im Zweikörperproblem übliche exzentrische Anomalie zu gewinnen, die auf dem Weg über die Keplersche Gleichung eine einfache Darstellung der Bewegung liefert. Anwendungen auf das allgemeine Zweikörperproblem mit Abhängigkeit des Kraftgesetzes von einer beliebigen Potenz des Radiusvektors werden diskutiert. Schließlich werden eine Reihe von allgemeinen Prinzipien besprochen, welche Art von Transformation bei beliebigen mechanischen Problemen aussichtsreich ist, insbesondere die Gesichtspunkte behandelt, die bei einer Anwendung der Methode auf das Dreikörperproblem zu beachten sind.

*F. Schmeidler.*

**Sul'gin, M. F.:** Zur Theorie der Lagrangeschen Gleichungen für nicht-konservative Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 373—376 (1952) [Russisch].

L'A. présente quelques applications nouvelles de l'artifice utilisé par lui dans un travail antérieur (ce Zbl. 43, 388) et qui revient à remplacer le système (A) de  $n$  équations de Lagrange:  $d(\partial T/\partial \dot{q}_i)/dt - \partial T/\partial q_i = Q_i$  d'un système holonome à  $n$  degrés de liberté par le système (B) de  $2n$  équations à  $2n$  inconnues du type (A), mais avec  $Q_i \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . L'A. montre ensuite comment la connaissance d'une intégrale première de (A) et d'une intégrale première de (B) permet de former une intégrale première nouvelle de (A), ce qui constitue une extension du théorème classique de Poisson. — L'A. donne des applications à des cas particuliers.

*J. Kravtchenko.*

**Sul'gin, M. F.:** Das Poissonsche Theorem für die Gleichungen der Dynamik mit Bindungsfaktoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 453—456 (1952) [Russisch].

Es wird gezeigt, daß für ein mechanisches System, das durch holonome Nebenbedingungen eingeschränkt ist, die Poissonschen Klammersausdrücke Integrale sind. Der Beweis wird durch direkte Ausrechnung der Zeitableitung dieser Klammer unter Benutzung der von Lagrangeschen Faktoren abhängigen kanonischen Gleichungen geführt. Wegen der Invarianz der Poissonschen Klammern gegen kanonische Transformationen erhält man dieses — nicht neue — Ergebnis auch durch Zurückführung auf ein bindungsfreies System.

*W. Haacke.*

**Easthope, C. E.:** The existence of a spin integral in the motion of a rigid body in rolling contact with a rough surface. Math. Gaz. 36, 20—29 (1952).

Ein starrer Körper rolle ohne zu gleiten auf einem anderen starren Körper. Eingeprägte Kräfte sollen nur längs der Verbindungslinie von Berührungspunkt und Schwerpunkt angreifen. Es werden die Bedingungen dafür gesucht, daß die Impulskomponente nach dieser Geraden konstant ist. Es gelingt eine vollständige Lösung des Problems. Außer dem trivialen Fall, daß die genannte Gerade im Raum fest ist, gibt es noch zwei Fälle: entweder ist sie im Körper fest und Trägheitshauptachse eines symmetrischen Kreisel oder der Körper ist kinetisch symmetrisch zu seinem Schwerpunkt und die relative Geschwindigkeit des Berührungspunktes ist parallel zur Drehgeschwindigkeit der Achse.

*G. Hamel.*

**Heinrich, G.:** Die Mißweisungen des künstlichen Kreiselhorizontes nach Fleuriais. Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 113—125 (1952).

**Bödewadt, U. T.:** Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft. Math. Z. 55, 310—320 (1952).

Verf. behandelt den Fall des symmetrischen Kreisels, wenn die äußeren Kräfte sich zu einer bezüglich der körperfesten Koordinatenachsen (= Trägheitsachsen) konstanten Drehkraft reduzieren. Die Eulerschen Gleichungen, die in diesem Falle nur die Komponenten der Drehgeschwindigkeit als unbekannte Größen enthalten, lassen sich mit Hilfe der Fresnelschen Integrale in endlicher Form integrieren. Daraus werden dann die endlichen Drehungswinkel als Funktionen der Zeit ermittelt.

*V. Válcovici.*

● Hartog, J. P. den: *Mechanische Schwingungen*. 2. Aufl. Übersetzt und bearb. von Gustav Mesmer. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. 427 S. mit 299 Abb. Ganzleinen DM 42,—.

Die erste deutsche Auflage des Buches, die im Jahre 1936 erschienen war, wurde ausführlich im Zbl. f. Mech. 5, 212 (1937) besprochen. Sie hatte seinerzeit großen Anklang gefunden, zumal Verf. es versteht, den Leser auf anschauliche Art auch mit komplizierteren Schwingungsvorgängen vertraut zu machen und meist nur einfache Rechenverfahren für die praktische Schwingungstechnik angibt. — Vorteilhaft hat sich sicher auch die große Anzahl von Übungsbeispielen ausgewirkt, welche den Leser zum selbständigen Nachrechnen anleiten. Nachdem inzwischen die dritte amerikanische Auflage erschienen ist, wird nunmehr vom Bearbeiter und Übersetzer eine zweite deutsche Auflage vorgelegt, welche sich im wesentlichen an den amerikanischen Originaltext hält. Es ist zu erwarten, daß auch die neue Auflage, welche sehr lebendig geschrieben ist, großen Anklang finden wird. *H. Neuber.*

Blaquière, Augustin: *Synchronisation des oscillateurs décrits par des équations non linéaires*. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1741—1743 (1952).

Crossley, F. R. Erskine: *A hyperelliptic function as a nonlinear oscillation*. J. Math. Physics 30, 214—225 (1952).

Ein Körper bewege sich reibungsfrei unter dem Einfluß der Schwerkraft auf einer Ellipse, deren eine Achse der Länge 1 senkrecht und deren andere Achse der Länge  $\sqrt{1 - e^2}$  horizontal steht. Für die Höhenkoordinate  $x$  gilt dann (Maximalhöhe  $x = h$ )

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2g \frac{(h-x)(1-x^2)}{1-e^2 x^2} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\omega^2 \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_0}{1 - e^2 \cos^2 \varphi},$$

wobei  $x = -\cos \varphi$ ,  $h = -\cos \varphi_0$  gesetzt ist; mit  $\sin(\varphi/2) = k \sin \zeta$  und  $k = \sin(\varphi_0/2)$  werden das hyperelliptische Integral

$$L(e, k, \zeta) = \int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1 - e^2 (1 - 2k^2 \sin^2 \zeta)^2}{1 - k^2 \sin^2 \zeta}} d\zeta = \omega t,$$

ihre Umkehrfunktion  $\zeta = \text{ham } \omega t$  und  $\sin \zeta = \text{sham } \omega t$  eingeführt. Das „vollständige hyperelliptische Integral“  $L' = L(e, k, \pi/2)$  liefert mit  $4L'/\omega$  die Periode der Schwingung. Für 30 verschiedene Zahlenpaare  $e, k$  werden Tabellen für  $L(e, k, \zeta)$  [vierstellig, für  $\zeta: 10^\circ (10^\circ) 90^\circ$ ] angegeben; Verf. gibt Kurven für die Schwingungsdauer;  $\varphi - \dot{\varphi}/\omega$ -Kurven veranschaulichen die Bewegungsvorgänge (wie beim gewöhnlichen Pendel können auch hier volle Umläufe stattfinden). *L. Collatz.*

Morduchow, M. and L. Galwin: *On double-pulse stability criteria with damping*. Quart. appl. Math. 10, 17—23 (1952).

Verff. beschäftigen sich mit der Bewegungsdifferentialgleichung zweiter Ordnung, deren Belegungsfunktion impulsartig verläuft. Die Stabilitätsverhältnisse für diesen Fall sind unter anderem vom Referenten früher bereits studiert worden und werden in der vorliegenden Arbeit in erweiterter Form untersucht, für den Fall einer zusätzlichen Dämpfung. Die Ergebnisse werden numerisch ausgewertet und durch Beispiele erläutert. *M. J. O. Strutt.*

Syngé, J. L.: *On a case of instability produced by rotation*. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 724—728 (1952).

Bei einem Körper mit Rotationssymmetrie liege der Schwerpunkt zwar auf der Symmetrieachse aber außerhalb der Strecke, welche die beiden Krümmungsmittelpunkte zu den Enden der Achse verbindet. Es gibt dann eine stabile und eine instabile Ruhelage. Daß die instabile durch Rotation stabilisiert werden kann, ist bekannt, überraschend ist aber, daß unter Umständen die stabile Lage durch Rotation unstabil werden kann. *G. Hamel.*

Pöschl, Th.: Über Hauptschwingungen mit endlichen Schwingweiten. Ingenieur-Arch. 20, 189—194 (1952).

Unter Hauptschwingungen versteht Verf. den Sonderfall, daß alle beteiligten Koordinaten gleichzeitig durch die Ruhelage hindurchgehen und gleichzeitig ihre Maxima erreichen. Die dann bestehenden Beziehungen zwischen den Koordinaten werden als Grenzkurven bezeichnet. Ihre Bestimmung ist i. a. leichter als die vollständige Integration, führt z. B. beim Doppelpendel auf eine Differentialgleichung erster Ordnung.

*G. Hamel.*

Haacke, Wolfhart: Die stabilen Lagen eines ebenen  $n$ -fachen Pendels mit vertikal periodisch erschüttertem Aufhängepunkt. J. reine angew. Math. 190, 51—64 (1952).

Verf. stellt zunächst die Bewegungsgleichungen eines erschütterten  $n$ -fachen ebenen Pendels auf. Durch Anwendung einer verallgemeinerten Hauptachsentransformation gelingt es, die Bewegungsdifferentialgleichungen zu entkoppeln. Er geht sodann auf die möglichen Mittellagen ein, wobei vom Floquetschen Theorem Gebrauch gemacht wird. Die Stabilitätsverhältnisse in den Parameterebenen werden mit Hilfe der vom Verf. so genannten Struttischen Karten untersucht. Die numerischen Ergebnisse werden zunächst auf das Doppelpendel angewandt und durch ein Zahlenbeispiel erläutert. Ein ausführliches Schrifttumsverzeichnis beschließt die Arbeit.

*M. J. O. Strutt.*

Pestel, E.: Ermittlung der Wirk- und Blindleistung bei mittelbarem Antrieb des einfachen Schwingers. Z. angew. Math. Mech. 32, 88—90 (1952).

Castro Brzezicki, A. de: Unendlich kleine Schwingungen dissipativer Systeme. Gac. mat., Madrid 4, 11—14 (1952) [Spanisch].

Beth, H. J. E.: Über die Ableitung der Formeln für den schiefen Wurf. Euclides, Groningen 27, 146—150 (1952) [Holländisch].

## Elastizität. Plastizität:

Truesdell, C.: The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. J. rat. Mech. Analysis 1, 125—171 (1952).

Einer Anregung von v. Mises folgend, soll versucht werden, die lineare Theorie der isotropen elastischen Stoffe und die klassische Theorie der isotropen zähen Flüssigkeiten zu verallgemeinern. Auf diese Weise sollen auch ganz neue Bereiche von Erscheinungen erklärt werden, die von der linearen Theorie nicht einmal annähernd erfaßt werden. An Stelle einer Deduktion makroskopischer Gleichungen aus speziellen Annahmen über das Verhalten der Elemente des Mediums werden unter Vermeidung aller molekularen Spekulationen von vornherein nur makroskopische Veränderliche und Hypothesen verwendet. Die ersten drei Abschnitte vermitteln die Theorie der isotropen Funktionen im dreidimensionalen Raum sowie die klassischen Ergebnisse und neuere Entwicklungen über kontinuierliche Medien (Deformationsmaß, Erhaltungssätze, Thermodynamik der Deformation). In vier später zu veröffentlichenden Kapiteln sollen die allgemeinen Theorien der Elastizität und Flüssigkeitsdynamik, der Medien mit elastischen und Flüssigkeitseigenschaften sowie die Auswertung des gegenwärtigen Standes der nichtlinearen Theorien behandelt werden.

*J. Pretsch.*

Sternberg, E. and M. A. Sadowsky: On the axisymmetric problem of the theory of elasticity for an infinite region containing two spherical cavities. J. appl. Mech. 19, 19—27 (1952).

Behandelt wird das Gleichgewichtsproblem für einen unendlich ausgedehnten elastischen Körper, der zwei kugelförmige Hohlräume von gleichem Radius besitzt. Die eingepprägten Kräfte bestehen aus Zugspannungen, die auf die Wandungen der Hohlräume ausgeübt werden, sowie einem homogenen Spannungsfeld im Unend-



lichen. Ferner wird Axialsymmetrie der Kräfte in bezug auf die Symmetrieachse der beiden Kugeln vorausgesetzt sowie Symmetrie derselben hinsichtlich der durch die Kugeln festgelegten Symmetrieebene. Die in Dipolarkoordinaten gegebene Lösung stützt sich auf die Spannungsfunktion. Der Sonderfall, daß die Wände der Hohlräume spannungsfrei vorausgesetzt werden und das Spannungsfeld im Unendlichen ein hydrostatisches ist, wird numerisch behandelt. Die Ergebnisse zeigen, wie die Lösung aufgefaßt werden kann als das Ergebnis der Überlagerung des Feldes zweier Spannungsquellen. Das Verfahren läßt sich verallgemeinern. *E. Hardtwig.*

**Belenkij, M. Ja.:** Ein gemischtes Problem der Elastizitätstheorie für einen unendlich langen Streifen. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 283—292 (1952) [Russisch].

Ausgehend von der durch Muschelišvili für ebene elastostatische Probleme angegebenen Darstellung der Spannungen und Verschiebungen mit Hilfe von holomorphen Funktionen wird zunächst die Aufgabe der Bestimmung der Spannungen und Verschiebungen bei Vorgabe von Normal- und Schubspannung am Rande des unendlich langen Streifens  $|\operatorname{Im} z| \leq 1$  auf ein System von vier reellen Integralgleichungen vom Faltungstyp zurückgeführt, dessen durch Fouriertransformation erhältliche Lösung im Falle verschwindender Randschubspannung angegeben wird. Mit Hilfe dieser Formeln wird dann ein System von zwei reellen Integralgleichungen aufgestellt, dessen Lösungsfunktionen die Normalspannung längs des ganzen Randes bestimmen für den Fall, daß ursprünglich längs der Teile  $L_1$  auf  $y = +1$  und  $L_2$  auf  $y = -1$  an Stelle der Normalspannung die Verschiebung  $v$  in  $y$ -Richtung vorgegeben ist. Bestehen  $L_1$  und  $L_2$  aus endlich vielen Intervallen, so ist die Lösung eindeutig; in Anlehnung an Methoden von Muschelišvili wird ihre stetige Abhängigkeit vom Integralgleichungssystem gezeigt. Die sich hieraus ergebende Möglichkeit der angenäherten Lösung wird für den Fall durchdiskutiert, daß  $L_1 \equiv L_2 \equiv L$ ,  $v(y = +1) = -v(y = -1)$  längs  $L$  und  $\sigma_y \equiv 0$  außerhalb von  $L$  vorgegeben sind; ein Zahlenbeispiel ist durchgerechnet. *H. Richter.*

**Langefors, Börje:** Analysis of elastic structures by matrix transformation with special regard to semimonocoque structures. *J. aeronaut. Sci.* 19, 451—458 (1952).

Für elastische Strukturen bestimmter sogenannter semimonocoker Bauart — gelenkverbundene Stäbe, befestigt an schubaufnehmenden Blechen — wird der lineare Zusammenhang zwischen den an den Stäben wirkenden Kraftgrößen  $P_i$  einerseits und den am System wirkenden äußeren Lasten  $Q_j$  und den statisch Unbestimmten  $X_j$  andererseits mit Hilfe von Matrizenoperationen dargestellt. Die mechanischen Überlegungen beschränken sich auf das Aufstellen der Gleichung  $(1) P = CX + DQ$  mit den Spaltenmatrizen  $P = (P_i)$ ,  $X = (X_j)$ ,  $Q = (Q_j)$ , wo die Elemente der Matrizen  $C$  und  $D$  in der Weise bestimmt werden, daß am statisch bestimmten Hauptsystem alle Kräfte  $X_j$  und  $Q_j$  gleich Null gesetzt werden bis auf eine einzige, die zu 1 gemacht wird. Alle weiteren Operationen laufen dann rein mechanisch als Matrizenmultiplikationen ab und lassen sich z. B. mit Hilfe von Lochkartenmaschinen ausführen. Man gewinnt die erforderlichen Beziehungen aus der Formänderungsarbeit  $U = \frac{1}{2} P' V P$  mit einer Flexibilitätsmatrix  $V$ , deren Diagonalelemente (Skalare und zweireihige Untermatrizen) aus den Formänderungsarbeiten an den Elementen (Blechen und Stäben) festliegen. Die Forderungen  $\partial U / \partial X_j = 0$  führen auf das lineare Gleichungssystem  $V_X X = u_X - V_{XQ} Q$  mit  $V_X = C' V C$  und  $V_{XQ} = C' V D$ , dessen Auflösung die Unbestimmten  $X_j$  ergibt. Mit  $X_j$  und  $Q_j$  erhält man die Kräfte  $P_i$  aus (1). Das Ganze verläuft analog der Behandlung elektrischer Netze mittels Matrizen. — Mitunter ist eine Unterteilung des Gesamtsystems in Teilsysteme vorteilhaft, wenn nur gewisse Teile variiert werden, während die übrigen unverändert bleiben. — Zur Reduktion der Anzahl der Unbekannten werden verschiedene Möglichkeiten unter formal gleichem Gesichtspunkt einer Matrizenoperation behandelt. — Schließlich wird das Vorgehen an einem Beispiel erläutert. *R. Zurmühl.*

**Angles d'Auriac, Paul:** Sur une forme géométrique des conditions d'équilibre des surfaces déformables. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 294—295 (1952).

Durch Einführung zweier Hilfsflächen, der Fläche  $\Sigma$  (Bild der Kräfte) und der Fläche  $\Sigma_1$  (Bild der Momente), erhält Verf. die Möglichkeit, die Gleichgewichtsbedingungen bei der Deformation verbiegbaren Flächen besonders einfach zu formulieren. Bei unendlich wenig verbiegbaren Flächen ergeben sich Vereinfachungen.

Noch einfacher wird die Behandlung des Biegungsproblems in der vorliegenden Form, wenn die gegebene Fläche eine Rotationsfläche ist. *E. Hartwig.*

**Federhofer, Karl:** Stabilität der Kreiszylinderschale mit schwach veränderlicher Wandstärke. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1952, 7—10 (1952).

**Clark, R. A., T. I. Gilroy and E. Reissner:** Stresses and deformations of toroidal shells of elliptical cross section. With applications to the problems of bending of curved tubes and of the Bourdon gauge. *J. appl. Mech.* 19, 37—48 (1952).

**Darevskij, V. M.:** Lösung einiger Fragen aus der Theorie der zylindrischen Schale. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 159—194 (1952) [Russisch].

Aus der früher aufgestellten [*Priklad. Mat. Mech.* 15, 531—562 (1951)] Partikularlösung für eine unendlich lange kreiszylindrische Schale mit Elementarbelastung werden Lösungen für eine Schale mit einer Einzel- oder Linienlast hergeleitet. Außerdem werden für solche Größen, die in den singulären Punkten (Angriffspunkte der Einzellast, Endpunkte der Streckenlast) unendlich große Werte annehmen, asymptotische Formeln aufgestellt, die in der Umgebung dieser Punkte gültig sind. Diese Formeln dürften allerdings nur eine geringe praktische Bedeutung haben, da die klassische Schalentheorie, von der der Verf. ausgeht, gerade für die Umgebung dieser Punkte falsche Ergebnisse liefert. *A. Kromm.*

**Žgenti, V. S.:** Zur Berechnung einer dünnen flachen Schale von der Form eines Rotationsparaboloids. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 331—334 (1952) [Russisch].

Zunächst werden die Grundgleichungen der flachen parabolischen Rotationschalen in „fast kartesischen Koordinaten“ hingeschrieben, die man aus dem Schnitt der Schalenmittelfläche mit zwei vertikalen, orthogonalen Scharen paralleler Ebenen erhält. Sodann werden diese Grundgleichungen mit Hilfe einer komplexen Darstellung auf ein einfacheres Gleichungssystem zurückgeführt, dessen Lösung in einer allgemeinen Form hingeschrieben wird. *A. Kromm.*

**Wang, Chi-teh and G. V. R. Rao:** A study of an analogous model giving the nonlinear characteristics in the buckling theory of sandwich cylinders. *J. aeronaut. Sci.* 19, 93—100 (1952).

**Schäfer, Manfred:** Über eine Verfeinerung der klassischen Theorie dünner, schwach gebogener Platten. *Z. angew. Math. Mech.* 32, 161—171 (1952).

Der klassischen Theorie der Biegung elastischer Platten liegen die Voraussetzungen zugrunde, daß erstens die Dicke klein gegenüber den anderen Plattenabmessungen und zweitens die Durchbiegung klein gegenüber der Plattendicke sein soll. Bei Plattenproblemen können als Folge der Vereinfachungen dieser Theorie grundsätzliche Schwierigkeiten auftreten, weil sich nur zwei unabhängige Randbedingungen befriedigen lassen, während im allgemeinen deren drei sind. E. Reissner hat [*J. Math. Physics* 23, 184—191 (1944); *J. appl. Mech.* 13, 250—251 (1945); dies. Zbl. 30, 43] eine Verfeinerung der klassischen Plattentheorie entwickelt, die ohne übermäßige Steigerung der Rechenarbeit zu einem System von Differentialgleichungen führt, bei dem es möglich und notwendig ist, sämtliche drei Randbedingungen zu befriedigen. Diese Theorie erweist sich bereits in grundsätzlicher Hinsicht von Bedeutung, darüber hinaus aber von praktischem Nutzen, indem sie gewisse Fälle der Belastung und Lagerung einzubeziehen gestattet, bei denen die Ergebnisse der klassischen Theorie mit den experimentellen Resultaten nicht in Einklang zu bringen sind. Verf. knüpft in seiner Arbeit an die Grundgleichungen der Elastostatik an und bringt den Unterschied der neuen gegenüber der klassischen Plattentheorie klar zum Ausdruck. Als Beispiel wird eine am Rand frei gelagerte Rechteckplatte durchgerechnet, wobei die Reissnersche Theorie in weitem Umfang zur Anwendung gelangt. *R. Gran Olsson.*

**Jung, Hans:** Über eine Anwendung der Fouriertransformation in der Plattenstatik. *Math. Nachr.* 6, 343—354 (1952).

Ein Plattenstreifen mit beliebigen Randbedingungen trage an beliebiger Stelle eine transversale Punktlast oder eine parallel zu den Streifenrändern orientierte Linienlast. Verf. löst dieses Problem der Plattenbiegung, indem er sowohl die Lastfunktion als auch die elastische Fläche der Platte als Fourierintegrale anschreibt und die frei verfügbare Parameterfunktion aus den ebenfalls transformierten Randbedingungen bestimmt. In dieser Weise werden speziell die unendliche Kragplatte mit Randlast und der beiderseits eingespannte Plattenstreifen mit Linien-, Punkt- oder Momentenlast behandelt. Bei der Anwendung einer geeigneten Symbolik (nach Doetsch) lassen sich solche Lösungen kürzer und eleganter aufbauen als etwa durch einen Grenzübergang von der Fourier-Reihe zum Integral. Hingegen bieten die nach dem Spiegelungsprinzip konstruierten Lösungen für die Rechteckplatte, die Verf. kurz diskutiert, kaum praktische Vorteile gegenüber den bekannten Lösungen in einfachen Reihen ohne Einschluß der Fourierintegrale. *S. Woinowsky-Krieger.*

Illing, Edith: The bending of thin anisotropic plates. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 12—28 (1952).

Unter Benutzung der auf Stevenson [Philos. Mag., VII. Ser. 33, 639—661 (1942)] zurückgehenden komplexen Zusammenfassung der Plattengleichungen wurden die Lösungsprinzipien für die orthotrope Platte entwickelt und auf die eingespannte Kreisplatte angewandt. Für eine bestimmte Lastverteilung, die noch einen Parameter  $n$  enthält, läßt sich die Gl. für die Durchbiegung  $w$  in geschlossener Form integrieren. Zu  $n = 4$  gehört die Gleichlast, zu  $n = 5$  die mit  $x$  linear anwachsende (also nicht mehr pol-symmetrische) Last — es ist interessant, daß die Form der Funktion  $w(r, \varphi)$  in diesen beiden Fällen die gleiche ist wie im isotropen Fall. Bei der mit  $r$  quadratisch anwachsenden Last, welchen Fall die Verfasserin zum Schluß noch untersucht, wirkt sich die Anisotropie auch auf die Form (der jetzt vom Winkel abhängigen) Durchbiegung aus. *K. Marguerre.*

Conte, Samuel D.: The circular plate with excentric hole. Quart. appl. Math. 9, 435—440 (1952).

Mit Hilfe bipolarer Koordinaten wird die Plattengleichung für die Kreisplatte mit exzentrischem Loch integriert. Das Ergebnis erscheint in Form einer unendlichen Doppelsumme, deren Koeffizienten aus endlichen Reihen zu errechnen sind. *H. Neuber.*

Sen Gupta, A. M.: Bending of a cylindrically aeolotropic circular plate with eccentric load. J. appl. Mech. 19, 9—12 (1952).

Stippes, M. and A. H. Hausrath: Large deflections of circular plates. J. appl. Mech. 19, 287—292 (1952).

Grigorev, A. S.: Über die Verbiegung einer kreisförmigen Platte jenseits der Elastizitätsgrenze. Priklad. Mat. Mech. 16, 111—115 (1962) [Russisch].

Gerard, George: Linear bending theory of isotropic sandwich plates by an order-of-magnitude analysis. J. appl. Mech. 19, 13—15 (1952).

Flügge, W.: The optimum problem of the sandwich plate. J. appl. Mech. 19, 104—108 (1952).

Conway, H. D. and M. K. Huang: The bending of uniformly loaded sectorial plates with clamped edges. J. appl. Mech. 19, 5—8 (1952).

Berger, E. R.: Zur Berechnung des Einflußfeldes der quadratischen Platte. Ingenieur-Arch. 20, 207—210 (1952).

Hirsch, R. A.: The effect of a rigid circular inclusion on the bending of a thick elastic plate. J. appl. Mech. 19, 28—32 (1952).

Okubo, H.: Approximate approach for torsion problem of a shaft with a circumferential notch. J. appl. Mech. 19, 16—18 (1952).

Goodier, J. N. and H. J. Plass: Energy theorems and critical load approximations in the general theory of elastic stability. Quart. appl. Math. 9, 371—380 (1952).



Die zur Berechnung der Knicklast von geraden Stäben benutzte energetische Methode, wonach die Knicklast aus dem Verhältnis der Formänderungsenergie zur Stabverkürzung errechnet wird, wird auf allgemeinere Stabilitätsprobleme erweitert, wobei die von Trefftz formulierten Beziehungen [Z. angew. Math. Mech. 13, 160—165 (1933)] benutzt werden. Mit Hilfe eines Variationsprinzips gelangt Verf. zu Gleichungen, welche die Berechnung des jeweiligen kritischen Kräftesystems mit einer angenommenen, die Randbedingungen erfüllenden Verformung gestatten.

H. Neuber.

Teissier du Cros, François: Sur la rupture d'un prisme fragile suivant un plan de symétrie longitudinal. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 296—297 (1952).

Teissier du Cros, François: Sur les points d'un prisme élastique, où la rupture s'amorce lorsqu'il est soumis à des efforts croissants. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 47—49 (1952).

Verf. behandelt Bedingungen für den Eintritt des Bruches eines prismatischen elastischen Körpers, dessen Seitenflächen im Laufe der Zeit monoton zunehmenden stetigen Belastungen unterworfen sind. Insbesondere wird der „kritische“ Bereich untersucht, in dem der Bruch entsteht und es werden Fälle angegeben, in denen die kritischen Punkte dem Rande angehören.

F. Reutter.

Beck, Max: Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes. Z. angew. Math. Phys. 3, 225—228 (1952).

Maggio, Frank di, Alexander Gomza, William E. Thomas e Mario G. Salvadori: Instabilità laterale di travi inflesse e compresse. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 12, 524—529 (1952).

Swenson jr., George W.: Analysis of nonuniform columns and beams by a simple D. C. network analyzer. J. aeronaut. Sci. 19, 273—275 (1952).

Langhaar, H. L.: Torsion of curved beams of rectangular cross section. J. appl. Mech. 19, 49—53 (1952).

Kosmodamianskij, A. S.: Die Biegung eines ebenen, krummen, anisotropen Balkens durch eine am Ende angreifende Kraft. Priklad. Mat. Mech. 16, 249—252 (1952) [Russisch].

Karunes, B.: On the distribution of stress in a deep beam containing two equal circular holes. Indian J. Phys. 26, 197—200 (1952).

Wuest, Walter: Der Krümmungseffekt bei dickwandigen Hochdruckrohren beliebiger asymmetrischer Querschnittsformen. Z. angew. Math. Mech. 32, 90—92 (1952).

Mežlumjan, R. A.: Über die Funktion der Querdeformation. Priklad. Mat. Mech. 16, 491—494 (1952) [Russisch].

Okubo, H.: The stress distribution in a shaft pressfitted with a collar. Z. angew. Math. Mech. 32, 178—186 (1952).

Die Spannungen in Radmittelfläche und Wellenachse sowie die Druckverteilung auf der Berührungsfläche von Rad und Welle werden näherungsweise unter der vereinfachten Annahme berechnet, daß auf der Berührungsfläche keine Schubspannung wirkt und die Druckverteilung nicht durch Zugspannungen auf den Seitenflächen beeinflusst wird.

J. Pretsch.

Melan, E.: Wärmespannungen in einer Scheibe infolge einer wandernden Wärmequelle. Ingenieur-Arch. 20, 46—48 (1952).

Berman, M. E.: Zur Frage nach dem Mechanismus der Deformation zylindrischer Spiralfedern von kreisförmigem Querschnitt mit kleinem Steigungswinkel. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 689—691 (1952) [Russisch].

Minckovskij, M. Š.: Die Tragfähigkeit eines zentral belasteten keilförmigen Fundaments. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 281—284 (1952) [Russisch].

Kammerer, Albert: *Stabilité de l'équilibre élastique des matériaux. Cas des corps sans cohésion et des liquides.* C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1735—1736 (1952).

Pailloux, Henri: *Un passage de l'élasticité à la résistance des matériaux.* C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 49—51 (1952).

Moskvitin, V. V.: *Über wiederholte plastische Deformationen.* Priklad. Mat. Mech. **16**, 323—330 (1952) [Russisch].

Ein Körper  $K$  aus elastoplastischen Material mit Ähnlichkeit von Verzerrungs- und Spannungsdeviator, konstanter rein elastischer Kompressibilität und linearer Abhängigkeit der Spannungsintensität von der Deformationsintensität werde durch äußere Volum- und Oberflächenkräfte  $\mathfrak{J} \cdot t$  und  $\mathfrak{K} \cdot t$  bei Änderung des  $t$  von 0 bis 1 überall in den plastischen Bereich übergeführt. Gestalt von  $K$ ,  $\mathfrak{J}$  und  $\mathfrak{K}$  seien so beschaffen, daß für alle  $t$  mit erreichter durchgehender Plastizierung der Deformationstensor  $\mathfrak{D}$  von der Gestalt  $\mathfrak{D}_0 \cdot \varphi$  ist, wo  $\mathfrak{D}_0$  nur von den Koordinaten abhängt, während  $\varphi$  allein Fließgrenze, Verfestigungsquote und Parameter  $t$  enthält. Dann gilt der Satz: Wird  $K$  nach erreichter Plastizierung durch monotonen Fall des  $t$  auf einen Wert  $\tau \geq 0$  gleichmäßig entlastet, so können die entstehenden Differenzen von Deformations- und Spannungsmatrix gedeutet werden als Deformations- und Spannungsmatrix eines fiktiven Körpers  $K^*$  der gleichen Gestalt und gleicher Verfestigungsquote, jedoch doppelter Fließgrenze mit der Beanspruchung  $(t - \tau) \cdot (\mathfrak{J}, \mathfrak{K})$ . Der gegebenenfalls in  $K^*$  entstehende plastische Bereich deckt sich dabei mit dem in  $K$  durch Entlastung entstehenden Bereich nochmaliger Plastizierung. — Durchrechnung des Beispiels der dickwandigen Hohlkugel aus inkompressiblem elastoplastischen Material bei Beanspruchung durch Innendruck.

H. Richter.

Hill, R.: *A note on estimating yield-point loads in a plastic-rigid body.* Philos. Mag., VII. Ser. **43**, 353—355 (1952).

Wird für rein-plastisches Material das plastische Potential so normiert, daß im Spannungsraum die zugehörige Hyperfläche  $\pi(\sigma)$  der Hyperfläche  $\Phi(\sigma)$  der Fließfunktion eingeschrieben ist, dann gilt das Prinzip der maximalen plastischen Leistung  $W$  für den Vergleich der wahren Spannungs-Fließ-Lösung zu einer jeden anderen, für die die Spannungen im Gleichgewicht sind und innerhalb von  $\pi(\sigma)$  liegen. Ist nun für ein zweites Material mit  $\pi'(\sigma) \subset \Phi'(\sigma)$  an jeder Stelle  $\Phi'(\sigma) \subset \pi(\sigma)$ , so folgt bei gleicher Beanspruchung:  $W' \leq W$ . Für die Approximation empirisch gegebener  $\pi(\sigma) \subset \Phi(\sigma)$  durch ein Modell mit  $\pi_m(\sigma) \subset \Phi_m(\sigma)$  werden  $\gamma'$  möglichst groß und  $\gamma''$  möglichst klein so gewählt, daß  $\gamma' \Phi_m \subset \pi$  und  $\Phi \subset \gamma'' \pi_m$  gelten. Die Ersetzung des realen Materials durch das Modell mit  $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma' + \gamma'')$  liefert dann  $W$  mit einem relativen Fehler von höchstens  $(\gamma''/\gamma' - 1)/2$ . Dagegen kann die Spannung lokal wesentlich höhere Abweichungen zeigen. — Numerische Beispiele: Die Approximation empirischer Ergebnisse für Kupfer und Aluminium durch Misessches  $\Phi$  und Lévy-Misessches  $\pi$  liefert einen maximalen relativen Fehler von resp. 1% und 1,5%. Die Ersetzung des Misesschen  $\Phi$  und  $\pi$  durch Trescasches  $\Phi$  mit Misesschen  $\pi$  ergibt maximal 8% Abweichung für  $W$ .

H. Richter.

Freiberger, W.: *A problem in dynamic plasticity: The enlargement of a circular hole in a flat sheet.* Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 135—148 (1952).

The sheet is divided into a plastic and an elastic part; the plastic part is again subdivided into two regions; one (II) where as usual equations of equilibrium apply and the thickness  $h$  is considered constant, and one (I) in which inertia terms are taken into account and  $h$  is a variable; the study applies mainly to region (I). Denoting by  $\sigma_r$  and  $\sigma_\theta$  radial and tangential stress, Mohr's yield criterion,  $(\sigma_z = 0)$  becomes  $\sigma_\theta - \sigma_r = \text{const} = Y$  and it is assumed that in (I),  $\sigma_\theta = 0$ . Then in (I) we have one equation of motion and the continuity equation, hence two equations with independent variables  $x = r$ , and  $t$  and dependent variables  $h(r, t)$  and  $u(r, t)$

where  $u$  is the radial velocity. With  $c^2 = Y/\rho$  ( $\rho =$  constant density) these are:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{c^2}{h} \frac{\partial h}{\partial r} = -\frac{c^2}{r}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + h \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{hu}{r},$$

equations that obviously show analogy to the equations of gasdynamic for the non steady one-dimensional case. The characteristics are investigated. In particular it is seen that under certain initial conditions „simple wave“ solutions exist with one rectilinear set of characteristics; these are studied in greater detail. In general, of course, the characteristics of these (non linear) equations are not rectilinear and problems may be solved by a numerical method using the characteristic form of the equations.

*H. Geiringer.*

Ševčenko, K. N.: Die ebene elasto-plastische Deformation eines Zylinders, der einem im Gleichgewicht befindlichen System von zwei Punktkräften unterworfen ist. Priklad. Mat. Mech. 16, 35—44 (1952) [Russisch].

Beim Querwalzen eines Kreiszyllinders entstehen in seiner Mitte oft Hohlräume, beim Abpressen zwischen zwei Ebenen Risse. Zweck vorliegender Arbeit ist es, die Ursache dieser Erscheinungen aufzuklären. Verf. stellt zunächst die Hertzsche Lösung für das ebene Zylinderproblem in Bipolarkoordinaten dar. Der elastisch-plastische Zustand im selben Belastungsfall wird unter folgenden Annahmen behandelt: (a) Inkompressibilität des Materials; (b) lineares Gesetz der Materialverfestigung bei plastischer Deformation; (c) durchweg dieselbe analytische Form für die Spannungskomponenten wie im rein elastischen Zustand. Die das Verhältnis zwischen Spannung und Deformation bestimmende Funktion ergibt sich dann aus einer Telegraphengleichung. Die Kenntnis dieser Funktion führt zur Abgrenzung der beiden plastischen Zonen, die sich bei weiter anwachsender Last vereinigen. Die für die Zylindermitte gezeichnete Spannungs-Deformationskurve zeigt bei einer gewissen Laststufe einen Knick. Dieser läßt auf einen instabilen plastischen Zustand schließen, der möglicherweise die Rissebildung verursacht.

*S. Woinowsky-Krieger.*

Šapiro, G. S.: Das elasto-plastische Gleichgewicht eines Keils und die unstetigen Lösungen in der Theorie der Plastizität. Priklad. Mat. Mech. 16, 101—106 (1952) [Russisch].

Bulygin, V. Ja.: Über die elasto-plastische Torsion prismatischer Stäbe. Priklad. Mat. Mech. 16, 107—110 (1952) [Russisch].

Ram, G. Sri and G. V. R. Rao: Buckling of an  $N$ -section column. J. aeronaut. Sci. 19, 66—67 (1952).

Sokolovskij, V. V.: Der Spannungszustand einer plastischen Masse innerhalb eines von einem Kreiskegel verschiedenen Kegels. Priklad. Mat. Mech. 16, 487—490 (1952) [Russisch].

Naghdi, P. M.: Bending of elastoplastic circular plates with large deflection. J. appl. Mech. 19, 293—300 (1952).

Pride, Richard A.: Plastic buckling of a simply supported plate in compression. J. aeronaut. Sci. 19, 69—70 (1952).

Fastov, N. S.: Der Einfluß einer plastischen Deformation auf die Diffusion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 309—312 (1952) [Russisch].

Ishihara, Akira, Natsuki Hashitsume and Masao Tatibana: Statistical theory of rubberlike elasticity. V. The stress birefringence. J. appl. Phys. 23, 308—312 (1952).

Satašvili, S. Ch.: Räumliches Problem der Theorie stationärer elastischer Schwingungen bei vorgegebenen Verschiebungen am Rande des Mediums. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 809—811 (1952) [Russisch].

In Verallgemeinerung der in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 37, 110) behandelten Aufgabe wird der Fall untersucht, daß der vom elastischen Medium



erfüllte dreidimensionale Bereich  $T$  mit der äußeren Oberfläche  $S_0$  in seinem Inneren sich nicht berührende Löcher  $T_j$  mit den Oberflächen  $S_j$  besitzt;  $j = 1, \dots, m$ . Zu den in genanntem Referat angeführten Elementarquell-Lösungen  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{R}_\nu$  mit Quellstörungen in Punkten  $Q = (\xi, \eta, \zeta)$  von  $S = S_0 + S_1 + \dots + S_m$  treten resp. Zusatzglieder  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{k}_\nu$ , die Quellstörungen in beliebig fest gewählten Punkten  $\alpha_j \in T_j$  darstellen und die (wegen Verzichtes auf die Vektorsymbolik unübersichtlicher geschriebene) Gestalt haben:

$$\mathfrak{h} = k_2^{-2} \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \operatorname{grad} f_j^{(1)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{k}_\nu = k_2^{-2} \mathbf{r}_{\alpha_\nu} \times \sum_{j=1}^m \varepsilon_j \operatorname{grad} f_j^{(2)}$$

mit  $\varepsilon_j = 1$  bei  $Q \in S_j$  und  $\varepsilon_j = 0$  bei  $Q \notin S_j$  und Funktionen  $f_j^{(i)}$ , die bis auf den veränderten Aufpunkt  $\alpha_j$  genau den alten  $f_i$  entsprechen. — Die weiteren Betrachtungen sind eine wörtliche Übertragung der früheren, da nunmehr alle Schlüsse einschließlich der Anwendbarkeit des Tamarkinschen Satzes und der Erfülltheit der Ausstrahlungsbedingung erhalten bleiben.

H. Richter.

**Rabotnov, Ju. N.: Spannungen und Deformationen bei zyklischer Belastung.** Priklad. Mat. Mech. 16, 121—122 (1952) [Russisch].

**Goodier, J. N. and R. E. D. Bishop: A note on critical reflections of elastic waves at free surfaces.** J. appl. Phys. 23, 124—126 (1952).

Bei der Reflexion ebener elastischer Wellen an freien Oberflächen hat man stets mit einer Koppelung von Kompressionswellen und Schubwellen zu rechnen, wobei letztere einen kleineren Einfallswinkel bzw. Reflexionswinkel besitzen als erstere. Verf. diskutieren nun den Spezialfall eines streifenden Einfalls einer Kompressionswelle, und zwar durch den Grenzübergang Einfallswinkel der Kompressionswelle gegen  $90^\circ$ , Intensität derselben gegen unendlich. Dabei kommen Verf. zu Lösungsfunktionen, welche einem linear mit dem Abstand von der Grenzfläche anwachsenden Deformationszustand des Mediums entsprechen.

F. Sauter.

**Reissner, Eric: Reihenentwicklung eines Integrals aus der Theorie der elastischen Schwingungen.** Math. Nachr. 8, 149—153 (1952).

Es wird die Reihenentwicklung eines Integrals mit singulärem Integranden durchgeführt, das bei erzwungenen Schwingungen eines elastischen Halbraumes gebraucht wird, behandelt in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 14, 219).

R. Zurmühl.

**Waller, Mary D.: Vibrations of free plates: line symmetry; corresponding modes.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 211, 265—276 (1952).

**Hearmon, R. F. S.: The frequency of vibration of rectangular isotropic plates.** J. appl. Mech. 19, 402—403 (1952).

**Bechmann, R.: An improved frequency equation for contour modes of square plates of anisotropic material.** Proc. phys. Soc., Sect. B 65, 368—374 (1952).

**Bolotin, V. V.: Über parametrisch erregte Schwingungen elastischer Bögen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 83, 537—539 (1952) [Russisch].

**Eringen, A. Cemal: On the non-linear vibration of elastic bars.** Quart. appl. Math. 9, 361—369 (1952).

Verf. behandelt freie nichtlineare Transversalschwingungen eines an den Endgelenken unverschieblich festgehaltenen Stabes von konstantem Querschnitt. Die Axialdehnung sowie die Rotationsträgheit werden hierbei mit berücksichtigt, nicht jedoch die Schubdeformation. Sei  $\varepsilon(y, t)$  die Dehnung der Stabachse,  $\vartheta(y, t)$  die Neigung der Stabachse zu der Geraden durch die beiden Auflagergelenke mit den Koordinaten  $y = 0, l$ . Gleichgewichtsbedingungen in Verbindung mit dem Hooke'schen Gesetz führen dann auf 2 simultane partielle Differentialgleichungen dritten Grades und vierter Ordnung für  $\vartheta$  und  $\varepsilon$ . Mittels des Ansatzes  $\vartheta = \lambda \vartheta_1 + \lambda^3 \vartheta_3 + \lambda^5 \vartheta_5 + \dots$ ,  $\varepsilon = \lambda^2 \varepsilon_2 + \lambda^4 \varepsilon_4 + \dots$ , wo der Parameter  $\lambda$  eine von den Stabdimensionen und dem Stabmaterial abhängige Konstante ist, gelangt dann Verf. zu einem

System von Differentialgleichungen für die neuen Funktionen  $\vartheta_1, \vartheta_3, \dots, \varepsilon_2, \varepsilon_4, \dots$ , welches eine schrittweise Integration erlaubt. Ist die Stabachse in der Anfangslage eine Sinusoide, so wird  $\vartheta_1$  hinsichtlich  $t$  einer  $cn$ -Funktion,  $\varepsilon_2$  einer  $cn^2$ -Funktion proportional, wobei die Schwingungsfrequenz gleichzeitig mit der angenommenen Amplitude zunimmt.  $\vartheta_3$  drückt sich in bezug auf  $t$  bereits durch eine Kombination von mehreren elliptischen und verwandten Funktionen aus. Ist die Anfangslage der Stabachse durch eine beliebige Kurve angegeben, so führt die angewandte Perturbationsmethode nach der Entwicklung der Kurve in eine Fourier-Reihe auf eine Integralgleichung, die sich durch schrittweise Annäherung auflösen ließe.

*S. Woinowsky-Krieger.*

**Lazutkin, D. F.:** Die Fortpflanzung elasto-plastischer Wellen längs eines zylindrischen Stabes. Priklad. Mat. Mech. 16, 94—100 (1952) [Russisch].

**Caligo, Domenico:** Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti. I. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. nat., VIII. Ser. 12, 76—83, 277—284 (1952).

I. Verf. studiert die Eigenschwingungen eines Stabes, deren Masse und Elastizität entlang der Länge veränderlich sind. Die Eigenwerte werden unter verschiedenen Annahmen über die Enden des Stabes durch ein Annäherungsverfahren unter Annahme geeigneter Eigenfunktionen berechnet. Für verschiedene Spezialfälle werden die Rechnungen numerisch erörtert. — II. In Teil II gibt Verf. analytische und numerische Zusätze zu seinem Verfahren zur Berechnung schwingender Stäbe. Zunächst betrachtet er den starr eingespannten Stab und stellt ihre Eigenwertgleichung, sowie die Gleichung der Eigenfunktionen auf. Hierauf befaßt er sich mit der Lösung der Frequenzgleichung und gibt hierfür eine Reihenentwicklung. In einigen Tabellen werden die numerischen Werte für die verschiedenen Daten des Stabes zusammengestellt.

*M. J. O. Strutt.*

**Eschler, H.:** Über freie Biegungsschwingungen des axial belasteten Stabes mit innerer und äußerer Dämpfung. Ingenieur-Arch. 20, 1—5 (1952).

Die Differentialgleichungen der Balkenschwingungen sind exakt nicht mehr integrierbar, wenn man neben Axiallast und Rotationsträgheit auch noch innere und äußere Dämpfung berücksichtigt. Verf. macht daher für die  $x$ -Abhängigkeit einen Ritz-Ansatz und erhält für die Zeitabhängigkeit mit Hilfe der Lagrangeschen Gleichungen eine Aussage, wenn er der Dämpfung durch Hinzunehmen einer geeignet definierten Zerstreungsfunktion Rechnung trägt. Beispiel: der beidseitig eingespannte Stab, für den man Eigenfrequenz und Abklinggrad in guter Übereinstimmung mit Sezawa (dies. Zbl. 5, 319) erhält. (Anm. des Ref.: müßte man, wenn man die Rotationsträgheit mitnimmt, konsequenterweise nicht auch die Schubdeformation beachten !)

*K. Marquerre.*

**Rachmatulin, Ch. A.:** Der quergerichtete Schlag auf einen biegsamen Faden mit einem Körper beliebiger Form. Priklad. Mat. Mech. 16, 23—34 (1952) [Russisch].

L'A. étudie le glissement d'un fil infiniment flexible et extensible sur une paroi solide de forme donnée. A l'instant initial, le fil, de longueur infinie, est tendu suivant une droite, les vitesses transversales étant nulles. — L'A. forme les équations indéfinies du problème pour la zone du fil en contact avec le solide et pour la zone libre — supposée rectiligne. Des approximations appropriées permettent l'étude de la zone intermédiaire. Dans le cas du phénomène plan (contact du fil avec un coin prismatique ou avec un cylindre de révolution à génératrices perpendiculaires au fil) l'A. pousse son analyse jusqu'aux applications numériques. Il obtient ainsi un schéma approché du mouvement, détermine les zones de contraction ou d'extension du corps déformable et vérifie que l'énergie du fil diminue dans la zone des grandes déformations. — A noter que l'A. distingue le cas des déformations élastiques et celui des déformations plastiques. — L'expérience confirmerait qualitativement et en gros l'analyse de l'A.

*J. Kravtchenko.*

**Markham, Jordan J.:** Second-order acoustic fields: Energy relations. Phys. Review, II. Ser. 86, 712—714 (1952).

Der übliche Ausdruck für die potentielle Energiedichte einer Schallwelle,  $E_p = (c^2/2\varrho_0) \varrho_e^2$  ( $\varrho = \varrho_0 + \varrho_e$  = Dichte des Mediums,  $\varrho_0$  = Dichte im Ruhezustand,  $c$  = Schallgeschwindigkeit) ist unvollständig; es wird der korrekte Ausdruck (bis zu Gliedern 2. Ordnung) angegeben:  $E_p = (c^2/2\varrho_0) \varrho_e^2 + p_0(\varrho_e/\varrho_0 - \varrho_e^2/\varrho_0^2)$ . Die zusätzlichen Glieder verschwinden i. a. auch im Zeitmittel nicht. Ihre Berücksichtigung erfordert die Kenntnis des Schallfeldes auch in zweiter Näherung. Am Beispiel der ebenen Welle wird gezeigt, daß der Beitrag der Zusatzglieder bei Gasen von gleicher Größenordnung ist wie der des üblicherweise allein berücksichtigten Glieds.

A. Schoch.

**Maue, A.-W.:** Die Kantenbedingung in der Beugungstheorie elastischer Wellen. Z. Naturforsch. 7a, 387—389 (1952).

Für die Beugung elastischer Wellen an einer Fläche, auf welcher die elastischen Spannungen verschwinden (praktisches Beispiel: Rißfläche), werden die Kantenbedingungen (die die physikalische Forderung der quadratischen Integrierbarkeit der Feldfunktionen in der Umgebung der Flächenkante, d. h. die Endlichkeit der elastischen Energie ausdrücken) aufgestellt, und zwar durch Betrachtung des statischen Spannungszustands in der Umgebung der Kante einer Halbebene. Es ergibt sich ein Verhalten der Spannungen und Dehnungen wie  $r^{-1/2}$ , der Energie wie  $r^{-1}$ , wenn  $r$  der Abstand von der Kante ist.

A. Schoch.

**Miles, J. W.:** On the diffraction of an acoustic pulse by a wedge. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 212, 543—547 (1952).

Es handelt sich um die Beugung einer Druckdiskontinuität mit ebener Front an einem starren Keil im Gültigkeitsbereich der linearen akustischen Wellengleichung. Macht man die Keilkante zur  $z$ -Achse eines Systems von Zylinderkoordinaten  $\varrho, \varphi, z$ , dann können  $\varrho, z$  und die Zeit  $t$  nur in festem Verhältnis in der Lösung vorkommen, da keine Länge eingeht und die Geometrie unabhängig von  $z$  ist. Deshalb läßt sich die Wellengleichung für den Druck in der Streuwelle durch Einführung einer Variablen  $s$  mittels der Transformation

$$\frac{1}{2} \left( s + \frac{1}{s} \right) = \frac{ct - z \cos \theta_i}{\varrho \sin \theta_i}$$

( $c$  = Schallgeschw.,  $\theta_i$  = Einfallswinkel der primären Stoßwelle gegen die  $z$ -Achse) auf die Potentialgleichung in den neuen Zylinderkoordinaten  $s, \varphi$  reduzieren. Auf dem Rand des durch  $s = 1$  und den Keil begrenzten Kreissektors lassen sich die Werte des gestreuten Drucks angeben, für das Innere des Sektors läßt sich daraus der Druck in geschlossener Form herleiten. Zu dem schon von Sommerfeld (1901) und später noch von mehreren Autoren gewonnenen Ergebnis scheint der in vorliegender Arbeit eingeschlagene Weg besonders einfach zu sein.

A. Schoch.

**Fox, E. N.:** The diffraction of a plane sound pulse incident normally on a regular grating of perfectly reflecting strips. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 211, 398—417 (1952).

**Voelz, Kurt:** Nachtrag zu der Arbeit „Die Dämpfung akustischer Resonatoren“. Z. angew. Phys. 4, 18—19 (1952).

● **Pöschl, Theodor:** Lehrbuch der Technischen Mechanik für Ingenieure und Physiker. 2. Band: Elementare Festigkeitslehre. 2. umgearb. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. 244 S. mit 159 Abb. Ganzleinen DM 19,50.

Die zweite Auflage des Buches bringt u. a. eine erweiterte Darstellung der Methoden zur Berechnung statisch unbestimmter Tragsysteme; fortgelassen sind hingegen rein praktische Verfahren, so z. B. die Bemessung von Nietverbindungen. — Nach allgemeiner Einleitung beginnt Verf. mit dem einachsigen Spannungszustand und geht über den ebenen zum räumlichen über, wobei Spannungstensoren vorzugsweise durch Mohrsche Kreise veranschaulicht werden. Eingehend sind die Bruch-



hypothesen sowie das Verhalten des Materials bei Belastungen jeglicher Art erläutert. Gleichgewichts- und elastische Gleichungen des isotropen festen Körpers werden anschließend abgeleitet, ihre Anwendung bleibt jedoch auf die Theorie der Torsion beschränkt. Sehr prägnant ist die Darstellung der Energie-Sätze, die nicht nur zur Behandlung statisch unbestimmter Tragwerke, sondern auch zur Beurteilung der Stabilität gedrückter Glieder herangezogen werden. Viel Raum ist der Träger-Biegelehre gewidmet; neben einfachen Balken werden Durchlaufträger, Träger auf nachgiebiger Unterlage und Träger mit gekrümmter Achse behandelt. Die Darstellung der Grammelschen Theorie der Torsion von Kurbelwellen ist ferner erwähnenswert. Der Abschnitt über elastische Schwingungen enthält neben Beispielen eingliedriger Schwinger eine kurzgefaßte Theorie zweigliedriger Schwinger, Trägerschwingungen unter bewegter Last sowie einiges über Schwingungsfrequenzen von Fachwerken. Mathematische Hilfsmittel werden sehr sparsam verwendet. Die Darstellung ist klar und einprägsam, ohne weitläufig zu sein, die Auswahl des Stoffes ausgezeichnet.

S. Woinowsky-Krieger.

### Hydrodynamik:

Lin, C. C.: A new variational principle for isenergetic flows. Quart. appl. Math. 9, 421—423 (1952).

Durch direkte Verifikation wird gezeigt, daß die quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Croccosche Stromfunktion einer ebenen oder einer drehsymmetrischen stationären isoenergetischen Wirbelströmung als Euler-Lagrangesche Ableitungsgleichung des Variationsproblems

$$(1) \quad \delta \int \int_{(G)} (p + \varrho w^2) dx dy = 0 \quad (p \text{ Druck, } \varrho \text{ Dichte, } w \text{ Geschwindigkeit})$$

aufgefaßt werden kann, demzufolge die Impulsstromdichte durch ein Gebiet  $G$  bei auf dem Rande festgehaltener Stromfunktion stationär gemacht werden soll. Anm. des Ref.: Dieser Sachverhalt ist nicht neu. Das Variationsproblem (1) der isoenergetischen Wirbelströmung wurde von E. Hölder für den ebenen Fall bereits 1941 auf der DMV-Tagung in Jena und für den allgemein dreidimensionalen Fall [mit dem entsprechenden Raumintegral statt Flächenintegral in (1)] bereits 1948 auf der Gamm-Tagung in Göttingen vorgetragen (dies. Zbl. 31, 28). In Unkenntnis der Hölderschen Arbeit von 1941 wurde das Resultat 1947 vom Ref. für den ebenen und drehsymmetrischen Fall hergeleitet (Das Variationsproblem der stationären isoenergetischen Wirbelströmungen, Rapport 39, Bureau Etudes Emmendingen Labor. Rech. Balistiques Aérodynamiques, 1947; eine Analyse dieser Arbeit des Ref. findet man auch in dem Artikel von M. Giqueaux, Centre Etudes sup. mécanique, Section fluides compr., Bull. 10, Paris, Mai 1950, fiche No. 52).

H. Behrbohm.

Mohr, Ernst: Der Beschleunigungswiderstand bewegter Körper in einer Flüssigkeit. Z. angew. Math. Mech. 32, 87—88 (1952).

Müller, W.: Bewegung des langgestreckten Rotationskörpers in einer zur Längsachse geneigten Richtung. Ingenieur-Arch. 20, 57—66 (1952).

Das Geschwindigkeitspotential für die Querbewegung eines langgestreckten Rotationskörpers erhält man in bekannter Weise durch eine Dipolbelegung der Achse. Die Lösung führt dabei durch Umformung auf tesserale und zugeordnete Kugelfunktionen. Im Gegensatz zum früher behandelten Fall der Längsbewegung (dies. Zbl. 43, 398), die durch eine Quellsenkenbelegung  $f(t)$  auf der Achse gewonnen wird, ist es im Fall der Querbewegung im allgemeinen nicht möglich, bei gegebener Dipolverteilung  $F(t)$  die Kontur in expliziter Form darzustellen. Eine Ausnahme bildet das Ellipsoid, wo  $F(t) = 1 - t^2$  und  $f(t) = t$ . Da also im Fall des Ellipsoides

$f(t) = -c F'(t)$ , liegt es nahe, eine näherungsweise Gültigkeit dieser Beziehung in allgemeineren Fällen anzunehmen. Diese Annahme läßt sich auch begründen. Zur Aufstellung weiterer Näherungen kann man eine erweiterte Verteilungsfunktion mit willkürlichen Konstanten zugrunde legen. Am Beispiel eines luftschiffähnlichen Körpers wird gezeigt, daß die Abweichungen zwischen der ersten und der zweiten Näherung höchstens 4—5% des Größtwertes der Verteilungsfunktion betragen.

*R. Wuest.*

**Rosenberg, R. M. and George Stoner:** On the flight dynamics of slender special-purpose aircraft. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 29—38 (1952).

Verff. stellen die Bewegungsgleichungen für einen schlanken, elastischen, mit Steuerorganen versehenen Flugkörper auf. Um — nach gewissen Linearisierungen — lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu erhalten, wird vorausgesetzt, daß der Körper (bez. der ungefähr in die Flugrichtung fallenden  $x$ -Achse) nahezu rotationssymmetrisch hinsichtlich geometrischer Form, Trägheits- und Elastizitäts-Charakteristiken ist, daß er keine Rollbewegung (um die  $x$ -Achse) macht und an elastischen Bewegungen lediglich Biegeschwingungen ausführt. Um den Rechenaufwand zu beschränken, werden die beiden Komponenten der letzteren in der Form  $\sigma(t) f_1(x)$  bzw.  $\tau(t) f_2(x)$  und die Luftkräfte als stationär angenommen, so daß also die Geschwindigkeit nicht zu nahe bei der Flattergeschwindigkeit liegen darf. Als Beispiel ist der Fall einer plötzlich eingestellten und dann konstant gehaltenen Vertikalkraft (mittels einer elektronischen Analogiemaschine) durchgerechnet worden; das Ergebnis stimmt ausgezeichnet mit Flugmessungen überein.

*J. Weissinger.*

**Stewartson, K.:** On the slow motion of a sphere along the axis of a rotating fluid. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **48**, 168—177 (1952).

Die linearisierten Bewegungsgleichungen werden in bezug auf die Zeit der Laplace-Transformation unterworfen, wie dies erstmalig G. W. Morgan (dies. Zbl. **42**, 429) getan hat. Da die Kugel ruckartig angefahren wird, ergeben sich der Behandlung zugängliche Anfangs- und Randbedingungen. Die Gleichungen für die L.-Transformierten sind für alle Geschwindigkeitsverhältnisse vom elliptischen Typus. Wie zu erwarten, gelingt es nicht, die komplexe Umkehrformel im allgemeinen Fall auszuwerten. Für kleine Zeiten benutzt Verf. Reihenentwicklungen, für große  $t$  ziemlich verwickelte funktionentheoretische Überlegungen, um Aufschluß über das Verhalten der Geschwindigkeitskomponenten im Endzustand zu gewinnen. Es zeigt sich in Übereinstimmung mit Experimenten und früheren Rechnungen von S. F. Grace [*Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **113**, 46 (1927)], daß die Bewegung schließlich stationär und zweidimensional, d. h. unabhängig von der Koordinate der Achsenrichtung wird. Die Kugel schiebt einen Flüssigkeitszylinder von gleichem Radius vor sich her (und schleppt ihn nach), dessen Mantel undurchdringlich ist. Die Radialgeschwindigkeit wird auf der Mantelfläche und im Außenraum des Zylinders schließlich Null, während Tangential- und Axialkomponente auf der Zylinderoberfläche infolge der Linearisierung unbestimmt werden. Im Innenraum herrscht für  $t \rightarrow \infty$  die Geschwindigkeit der Kugel, überlagert von einer Wirbelung um die Achse. Nur diese Wirbelung ist von den speziellen Anfangsbedingungen abhängig.

*H. Wundt.*

**Probstein, R. and J. V. Charyk:** A method of solving the linear potential equation for axially symmetric flow. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 139—140 (1952).

Die in dem Lösungsansatz  $\Phi(x, r) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{x-\alpha r} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 - \alpha^2 r^2}}$  für die linearisierte Potentialgleichung  $\alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$  einer rotations-symmetrischen Überschallströmung auftretende Belegungsfunktion  $f(\zeta)$  wird als Polynom  $\sum_{n=1}^p A_n \zeta^n$  angesetzt. Die  $A_n$  werden bei achsialsymmetrischer Anströmung eines Rotationskörpers durch die Forderung, daß die Strömung in  $n$  geeigneten Punkten eines Meridians tangential zum Körper verläuft, bestimmt. — Anwendung auf ein Rotationsparaboloid mit  $n = 3$  und Vergleich mit der Theorie von v. Kármán-Moore und mit der Methode der konischen Segmente.

*K. Maruhn.*

Gurevič, M. I.: Der Stoß einer Platte bei einer Strömung mit Strahlablösung. Priklad. Mat. Mech. 16, 116—118 (1952) [Russisch].

Garabedian, P. R. and H. L. Royden: A remark on cavitation flow. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 57—61 (1952).

Der Existenzbereich für ebene Kavitationsströmungen, der von Garabedian und Spencer [J. Rational Mechanics Analysis, demnächst] auf Grund einer Extremaleigenschaft der freien Stromlinien mit Variationen in konformer Abbildung gegeben wurde, wird mit polygonaler Annäherung wiederholt, welche auf axial-symmetrische Kavitationsströmung verallgemeinert werden kann. J. Pretsch.

Birkhoff, G., M. Plesset and N. Simmons: Wall effects in cavity flow. II. Quart. appl. Math. 9, 413—421 (1952).

Nachdem früher (dies. Zbl. 38, 122) der halbunendliche Kavitationskörper in Kanal und Freistrahle behandelt worden war, wird nun die endlich ausgedehnte Kavitationsblase hinter einer Platte senkrecht zum Strom in der unbegrenzten Strömung, im Kanal und Freistrahle endlicher Breite untersucht; es werden Kontur und aerodynamische Beiwerte berechnet. J. Pretsch.

Garabedian, P. R. and D. C. Spencer: Extremal methods in cavitation flow. J. rat. Mech. Analysis 1, 359—409 (1952).

Verff. untersuchen die Strömung einer reibungsfreien, inkompressiblen, wirbellosen Flüssigkeit um ein Hindernis  $B$ , die sich im Unendlichen mit der Geschwindigkeit 1 parallel zur positiven  $x$ -Achse bewegt; das Geschwindigkeitspotential heiße  $\Phi$ . Das Hindernis  $B$  bestehe aus einem festen Körper  $K$  und aus einem Hohlraum  $W$ , dessen Oberfläche sich aus der gemeinsamen Grenze mit  $K$  und aus der freien Oberfläche  $L$  zusammensetzt. Zunächst wird Folgendes gezeigt: 1. Die freie Oberfläche  $L$  ist dadurch charakterisiert, daß die „virtuelle Masse“  $M = \iiint_D (\nabla\Phi - \nabla x)^2 dx dy dz$  ( $D$  das Außengebiet von  $B$ ) bei festgehaltenem Volumen der Kavitation ein Minimum ist. 2. Die freie Oberfläche  $L$  ist dadurch charakterisiert, daß dort, verglichen mit einer gewissen Schar von Konkurrenzflächen, das Minimum der Geschwindigkeit den größten Wert annimmt (dies nur für ebene und achsialsymmetrische Strömungen). — Auf Grund eines jeden der genannten Prinzipien wird dann die Existenz ebener Strömungen mit Kavitation bewiesen; das erste Prinzip gestattet hierbei noch die Hinzunahme eines zusätzlichen Schwerfeldes. Es folgen schließlich noch entsprechende Betrachtungen für achsialsymmetrische Strömungen. K. Maruhn.

Rumer, Ju. B.: Das Problem eines unterbenetzten Strahls. Priklad. Mat. Mech. 16, 255—256 (1952) [Russisch].

Landau (Mécanique des milieux continus, 1944. § 19, pp. 81—82) a donné une solution, exacte en première approximation, du problème de la veine noyée à symétrie axiale, s'échappant d'un tube mince dans le liquide visqueux emplissant l'espace. L'A. forme la deuxième approximation dont l'influence devient sensible près de l'orifice. J. Kravtchenko.

Léguas, Jean: Écoulement conique au voisinage d'un point de jonction. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 181—183 (1952).

Kuznecov, M. D.: Die Hydrodynamik eines exzentrischen Ringquerschnitts. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 715—717 (1952) [Russisch].

Miles, John W.: On interference factors for finned bodies. J. aeronaut. Sci. 19, 287 (1952).

Siegel, Keeve M.: Three-dimensional conformal transformations. J. aeronaut. Sci. 19, 281—282 (1952).

Birkhoff, Garrett: A new theory of vortex streets. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 409—410 (1952).

Eine Wirbelstraße läßt sich durch drei Parameter kennzeichnen: Längsabstand,



Querabstand, Wirbelstärke. Ohne Beweise wird eine Theorie skizziert, die eine Abschätzung dieser Größen a priori ermöglicht. Dazu werden (in Abweichung von der v. Kármánschen Stabilitätsbetrachtung) mehrere Integralinvarianten aufgestellt und die Vorstellung einer Schwingung des Kielwassers herangezogen.

*F. Wecken.*

Laitone, E. V.: Theodorsen's circulation function for generalized motion. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 211—213 (1952).

Vooren, A. I. van de: Generalization of the Theodorsen function to stable oscillations. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 209—211 (1952).

Jones, W. P.: The generalized Theodorsen function. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 213 (1952).

Yeh, Hsuan: Secondary flow in cascades. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 279—280 (1952).

Eichenberger, Hans P.: Note about secondary flow in cascades. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 137—138 (1952).

Nickel, K.: Zusatz zu J. Dörr: „Strenge Lösung der Integralgleichung für ein Flügelgitter“. *Ingenieur-Arch.* **20**, 6—7 (1952).

Die Arbeit des Herrn Dörr (dies. Zbl. **42**, 188) wird ergänzt durch explizite Angabe der Lösung, die der Abströmbedingung genügt. Außerdem wird eine Formel für den Gesamtauftrieb angegeben.

*R. Sauer.*

Vallander, S. V.: Berechnung der Strömung um ein Profilgitter. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **82**, 345—348 (1952) [Russisch].

Das Berechnungsverfahren beruht im wesentlichen darauf, daß die komplexe Strömungsfunktion für die zirkulationsfreie Umströmung des Gitters bei glatter Abströmung an den Hinterkanten in der Form  $w_P = \varphi_P + i\psi_P = e^{-i\alpha} z + F(z)$  das Profilgitter auf ein Gitter ebener Profile in der  $w_P$ -Ebene abbildet, da die Stromfunktion  $\psi_P$  längs der Kontur eines Profils konstant ist. Dies läßt sich unter Benutzung bekannter Beziehungen auf den Einheitskreis abbilden. Der der periodischen und eindeutigen Funktion  $F(z)$  entsprechende Anteil wird dabei zu einer außerhalb des Einheitskreises regulären Funktion, die in eine Laurentreihe entwickelt werden kann. Die unbestimmten Koeffizienten und sonstigen Konstanten lassen sich durch sukzessive Approximation nach einer entsprechend verallgemeinerten, von S. G. Nužin (dies. Zbl. **30**, 86) angegebenen Methode für die Abbildung des Einheitskreises auf ein einzelnes Profil bestimmen. Nach Kenntnis der konformen Abbildung kann dann in bekannter Weise auch die Umströmung des Profilgitters bei allgemeiner Anströmungsrichtung behandelt werden. [Auf der rechten Seite von Formel (2) muß es im Zähler  $R^2$  an Stelle  $R_2$  heißen.]

*K. Krienes.*

Weissinger, J.: Über die Einschaltung zusätzlicher Punkte beim Verfahren von Multhopp. *Ingenieur-Arch.* **20**, 163—165 (1952).

Eine gewisse Schwierigkeit bietet das bekannte Verfahren von H. Multhopp [*Luftfahrtforsch.* **15**, 153—169 (1938)] zur näherungsweisen Lösung der Prandtlschen Tragflügelgleichung — da es mit festen Punkten für die Interpolation arbeitet — dann, wenn man in gewissen interessierenden Bereichen der Flügelspannweite Punkte einschalten will. Weil mit der Einschlebung eines Zwischenpunktes in einem Multhoppschen Teilintervall die zusätzliche Einschlebung eines Zwischenpunktes in jedem andern Teilintervall bei dem üblichen Verfahren automatisch Hand in Hand geht, vervierfacht sich ja die Rechenart, auch wenn nur ein Zusatzpunkt gebraucht wird. Durch eine elegante Erweiterung des Multhoppschen sinus-Polynomansatzes für die Approximation der Zirkulation längs Spannweite gelingt es Verf. jedoch zu zeigen, wie man ohne merkbliche Erhöhung des Arbeitsaufwandes zumindest einen beliebig zu wählenden Punkt einschalten kann.

*H. Behrbohm.*

Scholz, N.: A method for calculating airfoils with prescribed pressure distribution. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 70—72 (1952).

Dengler, M. A., M. Goland and Y. L. Luke: Notes on the calculation of the response of stable aerodynamic systems. *J. aeronaut. Sci.* 19, 213—214 (1952).

Neumark, S.: Pressure distribution on an airfoil in nonuniform motion. *J. aeronaut. Sci.* 19, 214—215 (1952).

Voss, H. M.: On nonplanar surfaces of very-low aspect ratio. *J. aeronaut. Sci.* 19, 136—137 (1952).

Flax, A. H.: The reverse-flow theorem for nonstationary flows. *J. aeronaut. Sci.* 19, 352—353 (1952).

Betrachtet wird im dreidimensionalen Raum eine dünne, harmonisch sich verformende Tragfläche der Gestalt  $z = z_0(x, y) e^{i\omega t}$ ; es bezeichnen  $w(x, y, t)$  bzw.  $p(x, y, t)$  Vertikalgeschwindigkeit bzw. Auftriebsverteilung;  $w$  bzw.  $p$  sind die entsprechenden Größen für eine Strömung um denselben Flügel mit umgekehrter Anströmungsrichtung. Dann gilt  $\iint \bar{p}(x, y, t) w(x, y, t) ds = \iint p(x, y, t) w(x, y, t) ds$ ; die Integration ist über die Projektion des Flügels auf die Ebene  $z = 0$  zu erstrecken.

K. Maruhn.

Miles, John W.: On Chang's function for nonstationary flow. *J. aeronaut. Sci.* 19, 138 (1952).

Lapin, E., R. Crookshanks and H. F. Hunter: Downwash behind a two-dimensional wing oscillating in plunging motion. *J. aeronaut. Sci.* 19, 447—450, 458 (1952).

Runyan, Harry L., Herbert J. Cunningham and Charles E. Watkins: Theoretical investigation of several types of single degree of freedom flutter. *J. aeronaut. Sci.* 19, 101—110, 126 (1952).

Söhngen, H.: Durchgang einer Potentialstörung durch einen Leitschaufelkranz. *Ingenieur-Arch.* 20, 13—18 (1952).

Verf. untersucht die Frage, in welchem Maße bei axial durchströmten Maschinen Störungen der Zu- bzw. Abströmung durch einen Leitschaufelkranz hindurchdringen. Unter der Annahme inkompressibler, reibungs- und drehungsfreier Strömung wird insbesondere der Fall untersucht, daß die Störungen durch eine genügend weit vor dem Eintrittsleitrad oder genügend weit hinter dem Austrittsleitrad liegende Reihe gleich und symmetrisch profilierter Stützrippen (von im Vergleich zur Blattzahl geringer Anzahl) hervorgerufen werden („genügend weit“ heiße dabei: so weit, daß die Rippen als homogen angeströmt angesehen werden können). Ferner wird angenommen, daß der Strömungsvorgang in eine Ebene abwickelbar und daß im Leitschaufelkranz die Strömung parallel den (einander gleich und dünn vorausgesetzten) Schaufeln sei. — Mit der  $y$ -Achse längs der Vorderkante des Schaufelgitters und der  $x$ -Achse als Symmetrieachse für eine Stützrippe empfiehlt es sich, Fourierreihendarstellungen für die Geschwindigkeitskomponenten [d. h. in komplexer Schreibweise Potenzreihen, nach  $e^{i n (\sigma/R) y}$  fortschreitend ( $\sigma$  Stützrippenzahl,  $R$  Schaufelkranzradius)] zu wählen, deren Koeffizienten von  $x$  abhängen und am Ort des Gitters als (durch Abstand und Profil der Stützrippen bedingt) bekannt anzusehen sind. Die Parallelität der Strömung zu den Leitschaufeln wird durch eine geeignete Wirbelbelegung des Schaufelraumes (die Blattzahl wird zu unendlich idealisiert, so daß der gesamte Raum zu belegen ist) erzwungen, für deren Wirbelstärke gleichfalls ein entsprechender Fourieransatz getroffen wird. Gliedweise Erfüllung der Randbedingungen am Ort der Schaufeln führt dann für jedes  $n$  zu einer aus der örtlichen Schaufelneigung und der eingebrachten Störung bestimmten Integralgleichung 1. Art für die erforderliche Wirbelstärke. Ihre Lösung ist für den Fall der vor dem Eintritt gelegenen Stützrippenreihe trivial und führt zu dem Ergebnis, daß hinter dem Gitter die ungestörte Abströmgeschwindigkeit herrscht, daß also die Störung gar nicht durch das Gitter hindurchgedrungen ist. Im Fall der hinter dem Austritt gelegenen Rippen wird nur der Fall behandelt, daß der örtliche Umlenkwinkel der Schaufeln linear in  $x$  ist. Es ergibt sich, daß die Störung nunmehr durch das Gitter nicht ausgelöscht, sondern verstärkt wird; die Störung verhält sich so, als ob die an der Hinterkante herrschende Störgröße längs der Gitterschaufeln bis zu deren Vorderkante gleitet und sich von dort aus nach dem Potentialgesetz ausbreitet. Zudem tritt noch eine Verdoppelung dieses Feldes ein.

H. Behrbohm.

Ackeret, Jakob: Über exakte Lösungen der Stokes-Navier-Gleichungen inkompressibler Flüssigkeiten bei veränderten Grenzbedingungen. *Z. angew. Math. Phys.* 3, 259—271 (1952).

Nach einer Bemerkung von Stokes gestatten die Stokes-Navierschen Gleichungen als exakte Lösungen Potentialströmungen, wenn die Randbedingungen

angepaßt werden. Wesentlich ist die Bestimmung der Energiedissipation. Ohne vorherige Kenntnis von einschlägigen Arbeiten des Ref. gibt Verf. interessante Beispiele.  
G. Hamel.

Nevzgljadov, V. G.: Über die Randbedingungen einer neuen Methode in der Dynamik einer zähen Flüssigkeit. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 213—216 (1952) [Russisch].

Dans un travail antérieur (ce Zbl. 42, 190), l'A. a fourni des nouvelles solutions approchées de certains problèmes aux limites de la dynamique des fluides visqueux. Ici, l'A. cherche à préciser l'ordre d'approximation réalisé en cherchant à satisfaire les conditions aux limites.  
J. Kravtchenko.

Braun, I. and M. Reiner: Problems of cross-viscosity. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 42—53 (1952).

Lin, C. C.: On the stability of the boundary layer with respect to disturbances of large wave velocity. J. aeronaut. Sci. 19, 138—139 (1952).

Cooke, J. C.: On Pohlhausen's method with application to a swirl problem of Taylor. J. aeronaut. Sci. 19, 486—490 (1952).

Beim Pohlhausenschen Näherungsverfahren für die Lösung der zweidimensionalen Grenzschichtgleichungen wird mit einer Grenzschichtdicke  $\delta$  gearbeitet, die denjenigen Wandabstand darstellt, in welchem die Geschwindigkeit in der Grenzschicht gleich der Außengeschwindigkeit wird. Bei der Übertragung dieses Verfahrens auf dreidimensionale Grenzschichtprobleme muß die Geschwindigkeit in der Grenzschicht in zwei zueinander rechtwinklige Komponenten aufgespalten werden, für die bei den meisten bisherigen Rechnungen gleiche Grenzschichtdicken angenommen werden. Es wird an mehreren Beispielen gezeigt, daß die Annahme gleicher Grenzschichtdicken für die beiden Geschwindigkeitskomponenten zu sehr ungenauen Ergebnissen führt. Wesentlich bessere Übereinstimmung mit exakten Lösungen erhält man bei Annahme verschiedener Grenzschichtdicken für die beiden Geschwindigkeitskomponenten. Das Verfahren wird an dem früher von G. I. Taylor behandelten Fall der in einem konvergenten Rohr rotierenden Strömung näher erläutert.  
H. Schlichting.

Rott, Nicholas and L. F. Crabtree: Simplified laminar boundary-layer calculations for bodies of revolution and for yawed wings. J. aeronaut. Sci. 19, 553—565 (1952).

Die Berechnung der laminaren Reibungsschicht nach dem Näherungsverfahren von Kármán-Pohlhausen ist für den Fall der ebenen inkompressiblen Strömung neuerdings auf eine einfache Quadratur über die potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung zurückgeführt werden. Dieses Rechenverfahren wird hier auf Grenzschichten an Rotationskörpern, dreidimensionalen Grenzschichten (schräg angeströmter Zylinder) und einige Sonderfälle kompressibler Grenzschichten ausgedehnt. — Während für den schiebenden Zylinder im laminaren Fall die Strömungen in Sehnen- und Spannweitenrichtung voneinander unabhängig sind, gilt dies im turbulenten Fall nicht mehr.  
H. Schlichting.

Millsaps, Knox and Karl Pohlhausen: Heat transfer by laminar flow from a rotating plate. J. aeronaut. Sci. 19, 120—126 (1952).

v. Kármán hatte bekanntlich die Laminarströmung um eine rotierende Scheibe auf die Integration einer Reihe gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt, deren graphische Integration dann Cochran 1934 ausführte. Verff. gelingt die Einbeziehung der Temperaturströmung. Zum Schluß zwei durchgerechnete Beispiele.  
G. Hamel.

Levy, Solomon: Heat transfer to constant-property laminar boundary-layer flows with power-function free-stream velocity and wall-temperature variation. J. aeronaut. Sci. 19, 341—348 (1952).



Levy, S. and R. A. Seban: Recovery factors for the laminar „separation“ and stagnation flows. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 355—357 (1952).

Dizioğlu, Bekir: Die mittleren Temperaturen in Schmierschichten zwischen parallelen wärmeundurchlässigen Wänden. *Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A* **17**, 61—65 und türkische Zusammenfassg. 61 (1952).

Charnes, A., F. Osterle and E. Saibel: On the energy equation for fluid-film lubrication. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **214**, 133—136 (1952).

Taylor, Geoffrey: The action of waving cylindrical tails in propelling microscopic organisms. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **211**, 225—239 (1952).

Die hydrodynamische Bewegung eines Samenfadens wird untersucht, indem die Trägheitskräfte gegenüber den Zähigkeitskräften an einem biegsamen Zylinder vernachlässigt werden, welcher durch kleine seitliche Schwingungen verwunden wird, die sich an ihm in Längsrichtung fortpflanzen. Die Vorwärtsbewegung hat ein Geschwindigkeitspotential, das dem Quadrat des Verhältnisses von Amplitude zu Wellenlänge proportional ist. Bei Spiralform der Schwingungfortpflanzung wird der Vortrieb verdoppelt. Modellversuche an einer gummiüberzogenen Spiralfeder mit eingebautem Gummimotor bestätigen die Geschwindigkeitsberechnung.

*J. Pretsch.*

Velikanov, M. A.: Die Bewegung eines Teilchens in turbulenter Strömung. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **85**, 555—558 (1952) [Russisch].

Chandrasekhar, S.: On turbulence caused by thermal instability. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **244**, 357—384 (1952).

Die von Bénard (1900) entdeckten zellularen Strömungsformen bei einer von unten geheizten Flüssigkeitsschicht sind bei geringer Überschreitung der Stabilitätsgrenze  $Gr/a \sim 1700$  ( $Gr$  Grashof'sche Zahl,  $a$  Temperaturleitzahl) zunächst völlig regelmäßig und wabenförmig. Nach den Versuchen von Schmidt und Saunders (1938) tritt bei  $Gr/a \sim 47000$  der Übergang von der zellularen Strömung zur echten „Turbulenz“ ein. In der vorliegenden Arbeit werden zur Beschreibung dieses Vorganges die Hilfsmittel der statistischen Theorie der Turbulenz herangezogen. Die Theorie gründet sich dabei auf die Kontinuitätsgleichung, die Wärmeleitungsgleichung und die Bewegungsgleichung in der Form von Boussinesq, in der die durch die Änderungen der Temperatur hervorgerufenen Dichteänderungen nur soweit berücksichtigt werden, als sie die Schwerewirkung beeinflussen. Wenn man sich auf Gebiete beschränkt, die genügend weit von begrenzenden Wänden entfernt sind, kann man die Turbulenz als homogen und achsensymmetrisch (nicht aber als isotrop) betrachten und die von Verf. (dies. Zbl. **37**, 406) entwickelte Theorie der achsensymmetrischen Vektoren und Tensoren anwenden. Für die verschiedenen Feldgrößen (wie z. B. Geschwindigkeitskomponenten und Temperaturschwankungen) werden zwischen zwei Punkten Korrelationen definiert, und bei Vernachlässigung nichtlinearer Terme in den Bewegungs- und Wärmeleitungsgleichungen wird ein geschlossenes Gleichungssystem für die definierenden Skalarfunktionen abgeleitet. Unter stationären Bedingungen ist der Anteil der Dissipation der kinetischen Energie durch die Zähigkeit genau so groß wie die durch Schwerewirkung freiwerdende potentielle Energie. Es ist bemerkenswert, daß sich für das turbulente Geschwindigkeitsfeld zwei Lösungen ergeben, die dadurch charakterisiert sind, daß die kinetische Energie entweder hauptsächlich in vertikaler oder horizontaler Richtung verteilt ist. Eine wesentliche Begrenzung der Theorie ist durch die Vernachlässigung der Trägheitsglieder gegeben, deren Zulässigkeit vom Verfasser nicht erörtert wird.

*W. Wuest.*

Szablewski, W.: Zur Theorie der turbulenten Strömung von Gasen stark veränderlicher Dichte. *Ingenieur-Arch.* **20**, 67—72 (1952).

Die statistische Betrachtungsweise von O. Reynolds über die Geschwindigkeitsschwankungen und den Wärmeaustausch in turbulenten Strömungen werden auf den Fall stark veränderlicher Dichte ausgedehnt. Die Prandtl'schen Mischungswegformeln für die turbulente Schubspannung und die turbulente Wärmeleitung werden erweitert um Glieder, die der veränderlichen Dichte Rechnung tragen.

*H. Schlichting.*

Szablewski, W.: Turbulente Vermischung zweier ebener Luftstrahle von fast gleicher Geschwindigkeit und stark unterschiedlicher Temperatur. *Ingenieur-Arch.* **20**, 73—80 (1952).

Für die turbulente Mischzone zwischen zwei ebenen Strahlen mit geringem

Geschwindigkeitsunterschied aber großem Temperaturunterschied wird die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung berechnet. Dabei werden für die turbulente Schubspannung und die turbulente Wärmeleitung Formeln zugrunde gelegt, die aus einer erweiterten Theorie des Prandtl'schen Mischungsweges erhalten wurden (vgl. die vorstehende Arbeit). Die Differentialgleichungen für die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung lassen sich durch Quadraturen lösen. Die große Temperaturdifferenz der beiden Strahlen hat zur Folge, daß die Vermischungszone sich nach der heißen Seite viel stärker ausbreitet als nach der kalten. *H. Schlichting.*

● **Truesdell, C.: Vorticity and the thermodynamic state in a gas flow.** (Mémoire des Sciences mathématiques, Fasc. CXIX.) Paris: Gauthier-Villars 1952. 55 p.

Die verschiedenen Wirbelsätze der Gasdynamik, gekennzeichnet durch die Verknüpfung des Wirbelvektors mit den thermodynamischen Zustandsgrößen, werden für reibungslose Medien einheitlich behandelt und in wechselseitige Beziehung gebracht. Damit ist eine sehr verdienstvolle Zusammenfassung geschaffen, die durch eine historische Literaturübersicht noch ergänzt wird. Die mehr den Meteorologen interessierenden Sätze von Bjerknes oder Ertel sind nicht einbezogen.

*K. Oswatitsch.*

**Bergman, Stefan: Operatorenmethoden in der Gasdynamik.** Z. angew. Math. Mech. 32, 33—45 (1952).

Es werden zahlreiche frühere Untersuchungen des Verf. über Anwendungen seiner Integraloperatorenmethode auf zweidimensionale wirbelfreie stationäre Unterschallströmungen zusammengefaßt. Mit Hilfe dieser Integraloperatoren lassen sich aus analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen Stromfunktionen für Unterschallströmungen kompressibler Medien über der Hodographenebene erzeugen. Verf. gibt Bedingungen dafür an, daß die erzeugten Stromfunktionen in der Strömungsebene Strömungen um geschlossene Profilkurven liefern, und verallgemeinert außerdem die Blasius'schen Formeln. Die Methode wird auch auf Strömungen mit schallnahen Geschwindigkeiten angewandt; im Fall der Tricomi-Gleichung sind die Unterschall- und Überschallbereiche durch analytische Fortsetzung verknüpft. Ein ausführliches Literaturverzeichnis ist der Arbeit beigelegt.

*R. Sauer.*

**Mises, R. von: Über einige Grundfragen der Hydrodynamik.** Österreich. Ingenieur-Arch. 6, 77—85 (1952).

Gegenstand der Untersuchung ist das Auftreten von Unstetigkeiten in den Integralen der Grundgleichungen der Gasdynamik. Dies sind 5 Differentialgleichungen (Newtonsche Gleichung  $dv/dt + \rho^{-1} \text{grad } p = \mathfrak{R}$ , Kontinuitätsgleichung  $\rho \text{ div } v + d\rho/dt = 0$  und „verallgemeinerte Adiabatangleichung“  $A dp/dt + B d\rho/dt = C$ ) für Geschwindigkeit  $v$ , Druck  $p$  und Dichte  $\rho$  als Funktionen von  $x, y, z, t$ . Dabei werden zwei Fälle unterschieden: 1. „idealer Fall“:  $A, B, C, \mathfrak{R}$  sind gegebene Funktionen von  $v, p, \rho, x, y, z, t$ ; 2. „allgemeiner Fall“:  $A, B, C, \mathfrak{R}$  hängen auch von bestimmten Ableitungen erster und zweiter Ordnung von  $v, p, \rho$  ab. — 1. Im idealen Fall (Medium ohne Zähigkeit und Wärmeleitung) bilden die Grundgleichungen ein „planares“ System von Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

in denen die Koeffizienten  $a_{ijk}$  und  $b_k$  Funktionen der  $x_j$  und  $u_i$  sind. Die Charakteristiken-theorie führt zu „Trennungsflächen“  $S^*$  und „diskontinuierlichen Lösungen“  $u_i$  mit im wesentlichen folgenden Eigenschaften: a) Beim Durchgang durch  $S^*$  hat mindestens eines der  $u_i$  oder eine ihrer Ableitungen einen Sprung. b) Auf beiden Seiten von  $S^*$  werden die Differentialgleichungen befriedigt. Wenn nur Ableitungen der  $u_i$ , nicht aber die  $u_i$  selbst Unstetigkeiten haben, nennt man die Trennungsflächen bekanntlich Charakteristiken. Es ergeben sich zwei Arten von Trennungsflächen, nämlich einerseits Flächen, die von Weg-Zeit-Linien aufgespannt sind (Beispiele: Hohlholtsches Strahlproblem und Wirbelschicht der Lanchester-Prandtl'schen Tragflügeltheorie bei der inkompressiblen Strömung, Kontaktdiskontinuitäten = „Mediengrenzen“ bei kompressiblen Strömungen), und andererseits die Mach-Flächen bei kompressiblen Medien. — 2. Im allgemeineren Fall (Medium mit Zähigkeit und Wärmeleitung) bilden die

Grundgleichungen ein planares System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\sum_{i,j,l=1}^n a_{ijlk} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_l} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

für das sich in analoger Weise Trennungsflächen und diskontinuierliche Lösungen definieren lassen. Die einzigen reellen Trennungsflächen sind hier Flächen, die von Weg-Zeit-Linien aufgespannt werden. — Die bekannten Stoßvorgänge haben mit den in 1. und 2. behandelten Trennungsflächen und Diskontinuitäten nichts zu tun. Innerhalb des idealen Falles ist es in keiner Weise möglich, aus den Differentialgleichungen auf Stoßvorgänge zu kommen. Im allgemeineren Fall (d. h. bei zugelassener Zähigkeit oder Wärmeleitung) lassen sich dagegen unter gewissen Bedingungen asymptotische Lösungen (Reynolds-Zahl oder Prandtl-Zahl  $\rightarrow \infty$ ) herleiten, die zu Strömungsformen mit Sprüngen einzelner Veränderlicher führen; vgl. G. Ludford (nächst. Referat). Auf diese Weise gelangt man zu den Rankine-Hugoniot'schen Stoßgleichungen, und zwar ergibt sich, daß diese Gleichungen nicht nur, wie sonst gewöhnlich gezeigt wird, notwendige, sondern auch in gewissem Sinn hinreichende Bedingungen sind. Außerdem folgt allein aus den Grundgleichungen, ohne eine aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik abgeleitete Aussage hinzuzufügen, daß die Entropie beim Stoßvorgang zunimmt. — In einem Schlußkapitel werden bemerkenswerte Verallgemeinerungen erörtert. — Man vgl. auch eine frühere Note des Autors [J. aeronaut. Sci. 17, 551—555 (1950)] und eine Untersuchung von H. Weyl (dies. Zbl. 35, 420).

R. Sauer.

Ludford, G. S. S.: The boundary layer nature of shock transition in a real fluid. Quart. appl. Math. 10, 1—16 (1952).

Nach R. v. Mises (s. vorsteh. Referat) lassen sich die Stoßvorgänge bei den Strömungen kompressibler Medien mit Hilfe asymptotischer Integrale der Navier-Stokeschen Gleichungen (Reynolds-Zahl und Prandtl-Zahl  $\rightarrow \infty$ ) behandeln, wobei sich die bekannten Rankine-Hugoniot'schen Stoßgleichungen nicht nur als notwendige, sondern auch als hinreichende Bedingungen ergeben. In der vorliegenden Arbeit wird dieser asymptotische Prozeß durchgeführt und eingehend diskutiert.

R. Sauer.

Ludford, Geoffrey S. S.: On an extension of Riemann's method of integration, with applications to one-dimensional gas dynamics. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 499—510 (1952).

Bei der Lösung der homogenen linearen hyperbolischen Differentialgleichung, die beispielsweise eine nichtstationäre eindimensionale Gasströmung darstellen möge, treten bekanntlich dann Schwierigkeiten auf, wenn die gegebene Ausgangskurve eine der beiden Charakteristikenscharen berührt. Man kann in diesem Fall so vorgehen, daß man das ursprüngliche Problem 1. Art in ein solches 2. Art (d. h. Charakteristiken-zweieck als Anfangswerte) überführt. Verf. schlägt dann vor, den doppelt überdeckten Teil der Charakteristikenebene aufzufalten. Diese Methode kann auch dann angewandt werden, wenn die Ausgangskurve an der Berührungsstelle einen Knick hat. Verf. leitet Beziehungen zwischen dem Auftreten von Singularitäten (Verzweigungs- und Grenzlinien, Rückkehrkanten usw.) und den Anfangswerten her. Bei Anwendung dieser Überlegungen auf die Gasströmung in einem beiderseitig verschlossenen Rohr läßt sich zeigen, daß die Lösung für beliebige Anfangsbedingungen unter Umständen zusammenbrechen kann. Das gleiche Ergebnis gilt auch allgemein bei beliebigen periodischen Anfangsbedingungen. W. Wuest.

Germain, Paul et Maurice Fenain: Sur une correspondance simple entre les solutions de deux équations aux dérivées partielles, et son application à l'étude approfondie des écoulements transsoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 592—594 (1952).

Die Stromfunktionsgleichung einer kompressiblen Gasströmung kann auf die Form  $k(\sigma)\psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0$  gebracht werden. Wenn nun eine Lösung  $\psi_1$  dieser Differentialgleichung bekannt ist, findet man durch eine einfache Transformation die Lösung einer verwandten Differentialgleichung, die aus der ersten dadurch hervorgeht, daß  $\sigma$  einer gebrochenen linearen Transformation unterworfen wird. Für  $k_1(\sigma_1) = c\sigma_1$  erhält man bekanntlich den Sonderfall der Differentialgleichung von Tricomi, die eine Näherung für den schallnahen Bereich einer kompressiblen Gasströmung darstellt. Durch Anwendung der genannten Transformation kann



man daraus eine neue Differentialgleichung mit  $k_2(\sigma_2) = a\sigma_2/(\sigma_2 + b)^5$  gewinnen, die bei passender Wahl der Konstanten  $a$  und  $b$  eine gute Näherung in einem viel größeren Bereich ( $0,25 < M < 1,2$ ) darstellt, ohne daß der Rechenaufwand gegenüber der Differentialgleichung von Tricomi wesentlich erhöht werden müßte. Als Anwendungsbeispiel wird die Strömung durch einen Laval diffusor berechnet mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit zu Unterschall. *W. Wuest.*

**Eriksen, J. L.:** On the uniqueness of gas flows. *J. Math. Physics* **31**, 63—68 (1952).

Die Frage, welche ebenen, kompressiblen Strömungen im Stromlinienbild übereinstimmen, wird damit beantwortet, daß dies nur in den trivialen Fällen der Parallelströmung, der Quellströmung und der Wirbelströmung möglich ist.

*K. Oswatitsch.*

**Aržanych, I. S.:** Funktionen des Spannungstensors der Hydrodynamik. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **83**, 195—198 (1952) [Russisch].

A partir de 21 fonctions arbitraires, supposées assez régulières, de  $x, y, z, t$ , l'A. forme une fonction vectorielle  $\vec{V}(x, y, z, t)$  et deux fonctions scalaires  $\varrho(x, y, z, t)$  et  $P(x, y, z, t)$  (celle-ci étant définie par les expressions de ses dérivées secondes en  $x, y, z$  au moyen des arbitraires) satisfaisant identiquement au système:

$$\partial\varrho/\partial t + \operatorname{div}(\varrho \vec{V}) = 0; \quad d\vec{V}/dt = (1/\varrho) \operatorname{div} P.$$

La représentation trouvée des solutions des équations de l'Hydrodynamique est la plus générale; ce résultat constitue l'analogue des formules classiques de Maxwell-Morera pour la tension des efforts en statique des corps élastiques isotropes.

*J. Kravtchenko.*

**Craggs, J. W.:** The compressible flow corresponding to a line doublet. *Quart. appl. Math.* **10**, 88—93 (1952).

Das seinerzeit von Ringleb behandelte Beispiel eines Dipols in kompressibler Strömung wird bezüglich Grenzl原因en und Singularitäten näher untersucht.

*K. Oswatitsch.*

**Shiffman, Max:** On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 434—438 (1952).

Über die Existenz reiner ebener Unterschallströmungen ( $p = A\varrho^\gamma$ ,  $\gamma > 1$ ) um ein festes Hindernis  $H$  wird folgender Satz bewiesen: Es gibt eine nur von  $H$  abhängende positive Konstante  $M_0 < 1$  so, daß zu jeder positiven Zahl  $M_0 < M_0$  eine eindeutig bestimmte, zirkulationsfreie Unterschallströmung um  $H$  mit der Machschen Zahl  $M_0$  im Unendlichen gehört. Hierbei variiert die lokale Machsche Zahl  $M_1$  stetig mit  $M_0$ , und zwar durchläuft  $M_1$  alle Werte in  $0 \leq M_1 < 1$ , wenn  $M_0$  sich in  $0 \leq M_0 < M_0$  bewegt. Der Beweis erfolgt durch Bestimmung der Stromfunktion aus dem der partiellen Differentialgleichung entsprechenden Variationsproblem.

*K. Maruhn.*

**Longhorn, A. L.:** The unsteady, subsonic motion of a sphere in a compressible inviscid fluid. *Quart. J. Mech. appl. Math.* **5**, 64—81 (1952).

Wird eine Kugel in inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeit aus der Ruhe heraus in Bewegung gesetzt, so bewegt sie sich nach Aufhören der antreibenden Kraft des Fehlens dissipativer Kräfte wegen mit gleichförmiger Geschwindigkeit in geradliniger Bahn im Medium weiter. Die Wirkung des Mediums auf die Kugel äußert sich lediglich während des Beschleunigungsvorganges in der Erhöhung der Masse  $m$  der Kugel zur scheinbaren Masse  $m + m'$ , wo  $m'$  die Hälfte der von der Kugel verdrängten Flüssigkeitsmasse ist. Anders ist dies im Fall eines kompressiblen reibungsfreien Mediums, wo die Kugel Störwellen endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit ins Medium aussendet und daher auf diese Weise dem Medium Energie übertragen kann. Ist nunmehr die Kugel in Bewegung gesetzt, so muß zur Erhaltung ihrer Bewegung bis zum Erreichen des stationären Gleichgewichtszustandes eine dauernde Kraft in geeigneter Weise aufgebracht werden. (Der entsprechende Widerstand der Kugel und also auch die genannte Kraft wird — wie die Lösung zeigt — exponentiell weggedämpft.) Die scheinbare Masse  $m + m'$  kann in diesem

Fall definiert werden als der Quotient der gesamten Arbeit, die notwendig ist, um die Kugel auf gleichförmige Geschwindigkeit  $U$  zu bringen, dividiert durch  $\frac{1}{2} U^2$ . Es ist diese Größe, die in der vorliegenden Arbeit studiert wird. — Im Gegensatz zum inkompressiblen Fall hängt dieser Begriff der scheinbaren Masse von der Art des Anfangszustandes ab. Verf. untersucht zwei Fälle, einmal die instantane Anfahrt durch Aufbringen eines entsprechenden Impulses, zum andern den Fall der stetigen Beschleunigung. — Druck und Dichte des Mediums sollen adiabatisch zusammenhängen.  $U$  sei klein gegen die Schallgeschwindigkeit  $a_0$  des ruhenden Gases, so daß das Geschwindigkeitspotential der akustischen Gleichung genügen soll. Nach Lösung der zugehörigen Rand- und Anfangswertaufgabe kann dann die zur Erhaltung der Bewegung notwendige Arbeit und damit die scheinbare Masse der Kugel ermittelt werden. Es ergibt sich  $m'_{\text{kompr}} = \lambda \cdot m'_{\text{inkompr}}$ , wo  $\lambda = 2$  für den Fall der impulsiven Anfahrt,  $1 < \lambda < 2$  für den Fall der gleichförmig beschleunigten Anfahrt ist (der Ausdruck für  $\lambda$  im Fall allgemein stetiger Beschleunigung kann seiner Kompliziertheit wegen nicht diskutiert werden). — Die Voraussetzung der Drehungsfreiheit der Strömung (es wird ja ein Geschwindigkeitspotential eingeführt) gilt nur in den ersten Stadien der Bewegung, die Untersuchungen von S. Goldstein und L. Rosenhead [Proc. Cambridge philos. Soc. **32**, 392—401 (1936)] über die Grenzschichtablösung eines anfahrenden Kreiszylinders führen jedoch zu solchen Grenzwerten des Zeitpunktes dieses Ablösungseintritts, daß man in ihrer Übertragung auf die Kugel annehmen darf, daß für Beschleunigungswerte, für welche die Kompressibilität des Mediums die scheinbare Kugelmasse überhaupt beeinflusst, der Gleichgewichtszustand erreicht ist, bevor die Zähigkeitseinflüsse sich auswirken können. — Im Schlußabschnitt wird gezeigt, daß die scheinbare Masse an Hand der akustischen Gleichung korrekt ermittelt wird, wenn man Glieder der Ordnung  $1/M^2$  vernachlässigt. ( $M$  — Machzahl.)

H. Behrbohm.

Toose, D. G.: The laminar motion of a plane symmetrical jet of compressible fluid. Quart. J. Mech. appl. Math. **5**, 155—164 (1952).

Mit den Vereinfachungen der Grenzschichttheorie wird für den ebenen laminaren Strahl bei kompressibler Strömung die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung ermittelt. Für den Fall, daß die Prandtl-Zahl gleich eins und die Zähigkeit der absoluten Temperatur proportional ist, läßt sich eine geschlossene Lösung angeben, die im Grenzfall sehr kleiner Mach-Zahl in die bekannte Lösung für inkompressible Strömung übergeht. Die erhaltene Lösung wird für mehrere Fälle auch numerisch ausgewertet.

H. Schlichting.

Roumieu, Charles: Recherches sur le jet critique plan. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 52—54 (1952).

Eine in ihrer physikalischen Bedeutung nicht näher definierte Differentialgleichung (die dem Referenten unbekannt ist, die sich aber, in einer Zustands- oder Geschwindigkeitsebene angeschrieben, auf die Stromfunktion beziehen dürfte) wird vom Verf. in eine Differenzengleichung überführt unter verschiedener Spezialisierung eines Faktors  $k$  für Überschall- und Unterschallströmung. In letzterem Fall ist die Relaxationsmethode anwendbar, um die Differenzengleichung graphisch zu lösen. Die Anwendung auf den ebenen Strahl mit Schallgeschwindigkeiten, einmal von der exakten Gleichung, ein zweites Mal von einer Näherungsgleichung von Tricomi ausgehend, ergibt für die Länge des Strahls einen mit den Ergebnissen anderer Autoren gut übereinstimmenden Wert.

F. Cap.

Germain, Paul et Marc Liger: Une nouvelle approximation pour l'étude des écoulements subsoniques et transsoniques. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1846—1848 (1952).

Verff. benützen eine von Darboux (Théorie des surfaces II, Paris, 1889) angegebene Transformation, um aus den Lösungen der Differentialgleichung von Tricomi Lösungen der allgemeineren Differentialgleichung  $k(\sigma) \varphi_{\theta\theta} + \varphi_{\sigma\sigma} = 0$  zu gewinnen. Für eine passend gewählte Funktion  $k(\sigma)$  stellt diese Differentialgleichung eine Approximation einer ebenen kompressiblen Strömung im gesamten Unterschallbereich und im Schalldurchgangsbereich bis  $M = 1,1$  dar. Als Anwendungsbeispiele werden der ebene Strahl und die Strömung um Profile mit örtlichem Überschallbereich kurz behandelt, allerdings ohne das Auftreten von Verdichtungsstößen zu berücksichtigen.

W. Wuest.

O'Keefe, J.: The direct use of Green's method for supersonic potentials. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 82—92 (1952).

Ausgehend von der zur klassischen Greenschen Formel analogen Beziehung für den Operator  $B^2 \partial^2 / \partial \xi^2 - \partial^2 / \partial \eta^2 - \partial^2 / \partial \zeta^2$ , der der linearisierten Potentialgleichung bei Überschallströmungen entspricht, werden unter Verwendung geeigneter Integrationsbereiche und Grenzübergänge Darstellungsformeln für die Potentialfunktion gefunden. In diese gehen die Werte des Potentials bzw. der Normalableitung in der Ebene des „dünnen“ Überschallflügels ein. Die Ergebnisse werden mit den entsprechenden, auf Grund der Hadamardschen Theorie erhaltenen Formeln von Ward (dies. Zbl. 35, 419) verglichen. Der Verf. betont, daß es sich eben nur um Darstellungsformeln handelt; daß die erhaltene Potentialfunktion eine Lösung des Problems für die auf dem Flügel vorgeschriebenen Werte ist, bedarf weiterer Untersuchung.

K. Maruhn.

Morikawa, George K.: A non-planar boundary problem for the wave equation. Quart. appl. Math. 10, 129—140 (1952).

Das Problem der Wechselwirkung zwischen Flügel und Rumpf bei stationärer Überschallströmung unter kleinem Anstellwinkel wurde in linearer Näherung für konische Rumpf-Flügel-Konfigurationen von S. H. Browne, L. Friedman und I. Hodes [North Amer. Aviation Report No. AL 378 (1947)] und für allgemeine Körperformen von C. Ferrari [J. Aeronaut. Sci. 15, 317—336 (1948)] behandelt. Die vorliegende Arbeit liefert einen weiteren Beitrag in dieser Richtung. Der Rumpf wird idealisiert durch einen unendlich langen Drehzylinder, der Flügel durch eine Halbebene; die Vorderkante des Flügels ist also eine zur Anströmrichtung senkrechte Gerade. Das Geschwindigkeitspotential  $\varphi(r, \theta, z)$  ist eine Funktion der drei Zylinderkoordinaten  $z, r, \theta$  ( $z$ -Achse = Zylinderachse) und genügt der Wellengleichung  $\Delta \varphi - \varphi_{zz} = 0$ . Durch Laplace-Transformation bezüglich  $z$  geht diese Gleichung in die Potentialgleichung  $\Delta \psi - s^2 \psi = 0$  für die transformierte Potentialfunktion  $\psi(r, \theta; s)$  der zwei Veränderlichen  $r, \theta$  mit  $s$  als Parameter über. Auf diese Weise kommt man in der  $r, \theta$ -Ebene zu einem elliptischen Randwertproblem, das mit Hilfe einer Greenschen Funktion behandelt wird.

R. Sauer.

Morikawa, George: Supersonic wing-body-tail interference. J. aeronaut. Sci. 19, 333—340 (1952).

Pai, S. I.: On supersonic flow of a two-dimensional jet in uniform stream. J. aeronaut. Sci. 19, 61—65 (1952).

Wenn ein Gasstrahl mit Überschallgeschwindigkeit in ein ruhendes Medium eindringt und der Überdruck im Strahl nur wenig über dem umgebenden Druck liegt, bilden sich die wohlbekannten und theoretisch zuerst von L. Prandtl (1904) untersuchten stationären Wellen aus. In der vorliegenden Arbeit wird die Prandtl'sche Untersuchung auf den Fall ausgedehnt, daß das umgebende Gas eine Eigengeschwindigkeit hat. Die Untersuchung ist auf den ebenen Fall beschränkt und es wird angenommen, daß im Strahl das Gas mit einer Geschwindigkeit  $U_1$ , außerhalb des Strahles dagegen mit einer Geschwindigkeit  $U_2$  strömt. Dieser Grundströmung werden kleine Störungen überlagert, hinsichtlich derer die Potentialgleichung linearisiert werden kann. An der Strahlgrenze ist Stetigkeit des Druckes und der Stromlinienneigung zu fordern. Da das Verhalten im Unendlichen für Unter- und Überschallgeschwindigkeit des umgebenden Mediums grundverschieden ist, müssen diese beiden Fälle getrennt behandelt werden und führen auch zu völlig verschiedenen Ergebnissen. Bei umgebender Unterschallströmung ( $M_2 < 1$ ) hat der Überschallstrahl ( $M_1 > 1$ ) eine fastperiodische Struktur, wobei die Wellenlänge für gegebenes  $M_1$  mit wachsendem  $M_2$  zunimmt. Für  $M_2 > 1$  ergeben sich dagegen keine periodischen Lösungen, was übrigens in Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen von J. G. Wilder (1949) steht. Es lassen sich für diesen Fall Übertragungs- und Reflexionsfaktoren ermitteln, welche die Größe der an der Strahlgrenze durchge-



lassen oder reflektierten Störungsamplitude angeben. Diese Faktoren hängen von  $M_1$  und  $M_2$  ab und die reflektierte Welle kann gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen wie die einfallende Welle haben.

W. Wuest.

Young, G. B. W. and C. P. Siska: Supersonic flow around cones at large yaw. J. aeronaut. Sci. 19, 111—119, 142 (1952).

Diese Arbeit ist als Ergänzung zu den unter Leitung von Z. Kopal berechneten Tafeln für die Überschallströmung um schräg angeblasene Kegel (dies. Zbl. 34, 380) gedacht. Diese Tafeln sind sowohl für kleine Anstellwinkel  $\varepsilon$  (nur lineare Glieder von  $\varepsilon$  berücksichtigt) als auch für große Anstellwinkel (auch quadratische Glieder in  $\varepsilon$  berücksichtigt) berechnet worden, doch beziehen sich alle Strömungsgrößen auf das ursprüngliche konische Feld des nichtangestellten Kegels. Es werden daher Umrechnungsformeln für ein windfestes Koordinatensystem hergeleitet. Ein Vergleich der theoretischen Ergebnisse mit den Versuchsdaten von Cronvich (noch unveröffentlicht) zeigt befriedigende Übereinstimmung.

W. Wuest.

Mackie, A. G. and D. C. Pack: Transonic flow past finite wedges. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 178—187 (1952).

Verff. behandeln das Problem der Umströmung eines unendlich breiten (also „ebenen“) Halbkreis mit endlich langer geneigter Keilfläche, dessen andere Seite (die „Unterseite“) parallel der Anströmungsrichtung verläuft. Über den Verlauf der Oberseite stromabwärts der Keil Schulter (Ende der geneigten Fläche) wird zunächst nichts vorausgesetzt. Im Unendlichen stromauf vor dem Keil herrsche Unterschallgeschwindigkeit. Von Reibung und Drehung der Strömung werde abgesehen. — Es wird die Hodographenmethode verwendet. Für das entsprechende inkompressible Problem kann das komplexe Geschwindigkeitspotential leicht angegeben werden. Seine Potenzreihenentwicklung um den Nullpunkt der Geschwindigkeitsebene konvergiert im ganzen Einheitskreis dieser Ebene, und, von einem einzigen Verzweigungspunkt abgesehen, auch auf dessen Rande. Durch sogenannte Kompressibilitätsfaktoren hypergeometrischer Struktur kann aus dieser Reihe in bekannter Weise eine „kompressible Verallgemeinerung“ des Geschwindigkeitspotentials und damit dann dessen zugehörige Stromfunktion in Reihendarstellung gefunden werden. Diese Reihe konvergiert für Geschwindigkeitsbeträge, die kleiner als die Anströmgeschwindigkeit sind. Mittels Lighthills allgemeiner Methode (speziell zurechtgelegt in der Note S. Goldstein, M. J. Lighthill and J. W. Craggs, dies. Zbl. 34, 116) gelingt die analytische Fortsetzung dieser Stromfunktion auf Geschwindigkeiten größer als die Anströmgeschwindigkeit leicht. Die auf diese Weise gefundene Stromfunktion  $\psi(q, \theta)$  ( $q$  Betrag,  $\theta$  Richtung des Geschwindigkeitsvektors) verschwindet identisch auf der Unterseite und der geneigten Keilfläche, wie es sein soll. Wegen gewisser Freiheiten in der Wahl der Kompressibilitätsfaktoren ist diese Lösung allerdings nicht eindeutig. — Die Diskussion der Lösung ergibt: Für Keilwinkel  $\varepsilon < 60^\circ$  ist in der Keilschneide die Beschleunigung unendlich. Ist  $\psi_\theta(q, \theta) \neq 0$  auf der geneigten Keilfläche, so wird die Strömungsbeschleunigung bei  $M \rightarrow 1$  gleichfalls unendlich. Im Staupunkt und im Schallpunkt ist daher der Druckgradient bei  $\varepsilon < 60^\circ$  negativ unendlich. Die Druckverteilungskurve muß also in einem geeigneten Zwischenpunkt einen Wendepunkt haben. Dies ist auch aus allen Interferometermessungen von D. C. Pack [Aeronautics Res. Commit., Rep. Mem. London No. 2321 (1949)] ersichtlich. Dadurch, daß man den Ort der längs der geneigten Keilfläche unvermeidlich auftretenden Singularität der Lösung mit der Schulter des Keils identifiziert, ist es dann möglich, das Auftreten einer Grenzlinie (im Sinne von W. Tollmien) der Strömung zu vermeiden, indem man dahinter durch Anbringen einer Prandtl-Meyer-Expansion der Strömung eine physikalisch mögliche Abflußgelegenheit verschafft. Durch Verfügung über einen in der Lösung noch frei auftretenden konstanten Faktor kann diese Lösung gegebenen Längendimensionen der geneigten Keilkante angepaßt werden. Auch der Fall, daß  $\psi_\theta(q, \theta) = 0$  irgendwo auf der geneigten Keilkante, wird diskutiert. Insgesamt folgt: Für einen gegebenen Keil erscheint die Singularität bei allmählich wachsender Unterschallanströmungsgeschwindigkeit zuerst bei Unterschallgeschwindigkeit; jenseits einer gewissen kritischen Unterschallanströmungsgeschwindigkeit ist die Singularität stets an den Schallpunkt gebunden. Allgemeine theoretische Betrachtungen von A. Busemann [NACA techn. Note Nr. 1858 (1949)] finden dadurch ihre Bekräftigung im vorliegenden Spezialfall.

H. Behrbohm

Goldsworthy, F. A.: Two-dimensional rotational flow at high Mach number past thin aerofoils. Quart. J. Mech. appl. Math. 5, 54—63 (1952).

Die Arbeit behandelt Strömungen hoher Machzahlen mit einem Tsien-Parameter (Produkt von Dickenverhältnis und Machzahl der Anströmung) nahe an eins. Das Verhältnis von Reibungsschichtdicke zur Dicke der Störungsschicht wird — wie zu erwarten — als praktisch vernachlässigbar abgeschätzt. Es wird ferner gezeigt, daß

Tsiens Ähnlichkeitsgesetze auch unter Berücksichtigung der Entropieunterschiede gelten. — Dies kann sich allerdings nur auf die Äquivalenz zweier Strömungen gleichen Tsenparameters beziehen, da die von Tsen angegebenen Abhängigkeiten von Machzahl und Dickenverhältnis bekanntlich nicht stimmen. — Der Entropieeinfluß wird in dem behandelten Gebiet als unbedeutend abgeschätzt. Die Strömung ist der instationären Strömung in einem Zylinder nahe verwandt.

*K. Oswatitsch.*

**Chu, Boa-Teh:** On weak interaction of strong shock and Mach waves generated downstream of the shock. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 433—446 (1952).

Eine homogene Überschall-Parallelströmung hinter der geraden, anliegenden Kopfwelle eines Keilprofils werde durch kleine Unebenheiten des Profils gestört. Die auswärtslaufenden Störlinien erzeugen am Verdichtungsstoß „reflektierte“ einwärtslaufende Störungen sowie längs Stromlinien sich fortpflanzende Entropiestörungen. (Der „Reflexionsindex“  $\sigma$  ist eine Funktion von Stoßintensität und Machzahl.) Ersterer werden erneut am Profil reflektiert. Jede Unebenheit des Profils bildet sich an der Stoßlinie affin ab. Die mathematische Behandlung durch lineare partielle Differentialgleichungen liefert eine allgemeine Lösung mit drei willkürlichen Funktionen, die jedoch durch Randbedingungen am Stoß und am Profil gekoppelt sind. Es bleibt eine einzige die Feldstörung beschreibende Funktion  $F(x)$ , die aus  $F(xI') - \sigma F(x) = f'(x)$  zu bestimmen ist, wo die Profilform durch  $f(x)$  beschrieben ist und  $I'$  und  $\sigma$  Konstanten sind. Diese Funktionalgleichung wird durch eine Reihe (entsprechend den wiederholten Reflexionen) gelöst. — Mit dieser Methode wird die Druckverteilung unter einem gekrümmten Profil bei großem Anstellwinkel berechnet.

*F. Wecken.*

**Miles, John W.:** Slender body theory for supersonic unsteady flow. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 280—281 (1952).

**Miles, John W.:** On nonsteady supersonic flow about pointed bodies of revolution. *J. aeronaut. Sci.* **19**, 208—209 (1952).

**Schoch, Arnold:** Zur Frage nach dem Impuls einer Schallwelle. *Z. Naturforsch.* **7a**, 273—279 (1952).

Es wird gezeigt, daß der Strahlungsdruck, den eine auf eine absorbierende oder reflektierende Wand auftreffende Schallwelle ausübt, nur durch den nichtlinearen Charakter der hydrodynamischen Grundgleichungen bedingt ist, während er durch die übliche linearisierte Näherungstheorie nicht erklärt werden kann. Wenn man sich auf schwache Schallwellen beschränkt und nur Glieder bis zu 2. Grades berücksichtigt, kann man für den Strahlungsdruck und Impuls einer fortschreitenden Welle explizite Formeln gewinnen. Diese Zusammenhänge werden besonders anschaulich bei ihrer Anwendung auf den Fall einer einfachen Kolbenschwungung. Die Impulsdichte setzt sich dabei aus einem räumlich streng periodischen und einem in Fortschrittrichtung wachsenden Anteil zusammen. Dieser ist für die zunehmende Verformung der Welle verantwortlich und führt bei der Integration über eine ganze Anzahl von Wellenlängen zu einem von Null verschiedenen Impuls. Innerhalb jeder räumlichen Halbperiode der Welle wird dabei Materie nach vorn verschoben. Diese an sich eindimensionalen und daher zunächst auf das Rohr beschränkten Überlegungen können im Rahmen der zweiten Näherung auch auf den Fall der seitlich freien Welle ausgedehnt werden.

*W. Wuest.*

**Markham, Jordan J.:** Second- order acoustic fields: Streaming with viscosity and relaxation. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 497—502 (1952).

Die Arbeit enthält kritische Betrachtungen zu einer früheren Arbeit von C. Eckart über den „Schallwind“ (dies. Zbl. **39**, 417). Zunächst weist der Verf. darauf hin, daß für eine Strömung ein von Null verschiedener Zeitmittelwert nicht der Geschwindigkeit  $\vec{u}$  (in Eulerscher Betrachtung) sondern des Massenstroms  $\rho \vec{u}$

( $\rho$  = Dichte des Mediums) kennzeichnend ist. Da die Divergenz des zeitunabhängigen Anteils von  $\vec{q}\vec{u}$  verschwindet, folgt sofort die Unmöglichkeit einer Strömung in einem reibungsfreien Medium; denn in einem solchen kann keine Wirbelströmung als Folge eines Schallfeldes entstehen. — Die Eckartsche Berechnung der Wirbelströmung in einem viskosen Medium modifiziert Verf., indem er außer Schub- und Druckviskosität noch eine Druckrelaxation berücksichtigt. Letztere ist einer frequenzabhängigen Druckviskositätskonstanten gleichwertig; sie bewirkt eine bessere Übereinstimmung der Theorie mit experimentellen Ergebnissen. *A. Schoch.*

**Chester, W.:** The reflection of a transient pulse by a parabolic cylinder and a paraboloid of revolution. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 196—205 (1952).

Untersucht wird die Reflexion einer in Richtung der Parabelachse fortschreitenden Wellenfront an der konvexen Seite eines parabolischen Zylinders und eines Rotationsparaboloids. Die reflektierende Fläche wird als schallhart vorausgesetzt. Durch Laplace-Transformation wird der Fall beliebigen zeitlichen Verlaufs des Geschwindigkeitspotentials auf den des Zeitfaktors  $e^{pt}$  zurückgeführt. Für den letzteren Fall sind die beiden Probleme früher schon von H. Lamb durch Einführung von parabolischen Koordinaten gelöst worden, die Laplace-Transformierten sind also durch diese Lösungen gegeben. Die Rücktransformation ergibt (wie nach elementarer Betrachtung zu erwarten), daß die Front der reflektierten Welle ein Kreiszyylinder bzw. eine Kugel um die Brennnlinie bzw. den Brennpunkt ist, die mit der primären Wellenfront auf der reflektierenden Fläche zusammentrifft. Für den Fall des parabolischen Zylinders sowohl wie für das Rotationsparaboloid wird ein spezieller einfacher Zeitverlauf der primären Welle angegeben, für welchen das reflektierte Wellenfeld eine einfache, explizit angebbare Form annimmt. Ferner werden die im Fall einer einfachen Druckunstetigkeit sich ergebenden Fourier-Integrale numerisch ausgewertet; der Druckverlauf auf der reflektierenden Fläche ist durch Kurven wiedergegeben. In der reflektierten Welle nimmt der Druck hinter der Unstetigkeit umgekehrt wie die Wurzel aus der Entfernung von dieser (beim Zylinder) bzw. wie die Entfernung selbst (bei der Rotationsfläche) ab. *A. Schoch.*

**Newton, R. G.:** A progressing-wave approach to the theory of blast shock. *J. appl. Mech.* 19, 257—262 (1952).

**Slezkin, N. A.:** Über den Stoß eines ebenen Gasstrahls gegen eine unbegrenzte Wand. *Priklad. Mat. Mech.* 16, 227—230 (1952) [Russisch].

**Selberg, Henrik L.:** Transient compression waves from spherical and cylindrical cavities. *Ark. Fys.* 5, 97—108 (1952).

**Legras, Jean:** Remarque sur les ondes de choc en écoulement plan. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 1432—1434 (1952).

**Roy, Maurice:** Complément à l'analyse de la structure des quasi-ondes de choc et combustion. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 268—271 (1952).

**Ting, Lu:** The shock strenght in a two-dimensional nonsteady flow. *J. aeronaut. Sci.* 19, 351—352 (1952).

Nach einer von M. J. Lighthill angegebenen Methode wird in leider allzu knapper Form das Problem eines über ein Hindernis weglaufenden instationären, senkrechten Stoßes behandelt. Im Gegensatz zu vorausgegangenen Arbeiten anderer Verff., werden hinter dem Stoß hier Überschallgeschwindigkeiten angenommen. Dadurch sind die sich hinter dem Stoß zweidimensional, instationär ausbreitenden Störungen stromaufwärts durch eine Kopfwelle begrenzt.

*K. Oswatitsch.*

**Borg, S. F.:** On unsteady nonlinearized conical flow. *J. aeronaut. Sci.* 19, 85—92, 100 (1952).

Das Auftreffen einer Stoßwelle auf den unendlichen Keil kann auf ein instationäres konisches Problem zurückgeführt werden, da die Randbedingungen keine ausgezeichnete Länge enthalten. Die drei Veränderlichen  $x, y, t$  können also auf die neuen konischen Veränderlichen  $\xi = x/t$  und  $\eta = y/t$  reduziert werden. Die Kontinuitäts- und Impulsgleichungen werden bei Vernachlässigung von Wärmeleitung und Zähigkeit auf diese neuen Veränderlichen transformiert. Eine Invarianzeigenschaft dieser Gleichungen wird nachgewiesen und ferner wird gezeigt, daß ein



an der Wand anliegender Zweifachstoß (reguläre Reflexion), bei dem der reflektierte Stoß durch die Keilspitze geht, nicht möglich ist. Eine mögliche Form reziproker Strömungsfelder wird diskutiert. Da der reflektierte Stoß sich aus einem geraden und einem gekrümmten Stück zusammensetzt, muß es dahinter einen wirbelfreien und einen nichtwirbelfreien Strömungsbereich geben. Die Grenzkurve zwischen diesen beiden Bereichen ändert sich unstetig, wenn man den Keilwinkel so vergrößert, daß hinter dem Stoß die Schallgeschwindigkeit unterschritten wird. Verf. wird zu dem Schluß geführt, daß ein anliegender gerader Stoß, hinter dem die Schallgeschwindigkeit unterschritten wird, nicht möglich ist. *IV. Wuest.*

**Stocker, P. M.:** The transients arising from the addition of heat to a gas flow. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **48**, 482—498 (1952).

Verf. behandelt die eindimensionale instationäre Gasströmung ohne Reibung und Wärmeleitung, jedoch mit Wärmezufuhr durch Vorgänge innerhalb des Gases. Es werden die Charakteristiken für solche Strömungsvorgänge abgeleitet und nach zwei verschiedenen Methoden näherungsweise linearisiert. In Anwendung auf das endliche und das unendlich lange Rohr werden verschiedene bisher bestehende Unklarheiten, so z. B. das Negativwerden von  $\partial T/\partial x$  in Heizgebieten mit  $M > \kappa^{-1/2}$  aufgeklärt. Dieser Effekt kommt dadurch zustande, daß das Medium vor Erreichung der Heizzone so stark komprimiert wird, daß die Abkühlung durch Expansion lokal größer wird, als die Erwärmung durch die Aufheizung. Am Schluß der Arbeit wird die Genauigkeit der modifizierten Linearisierungsmethode des Verf. mit der Genauigkeit der üblichen Linearisierung und mit der der exakten Theorie verglichen. *F. Cap.*

**Cole, J. D. and T. Y. Wu:** Heat conduction in a compressible fluid. *J. appl. Mech.* **19**, 209—213 (1952).

Unter Verwendung der Laplace-Transformation wird versucht, aus den nach akustischer Methode linearisierten Grundgleichungen eines kompressiblen, der Wärmeleitung unterliegenden Mediums instationäre ein- und mehrdimensionale Lösungen abzuleiten für spezielle  $\delta$ -artige Rand- und Anfangsbedingungen und unter der Annahme  $\nu = 0$  für alle Zeiten. Die zahlreichen Vorarbeiten über das Problem (Bechert, Lee, Skudrzyk etc.) werden überhaupt nicht erwähnt; weiter wäre aufklärungsbedürftig, wieso die Verf. bei Annahme von doch irreversiblen Wärmeleitungsvorgängen ein Geschwindigkeitspotential definieren. *F. Cap.*

**Pirverdjian, A. M.:** Die Bewegung einer tropfbaren kompressiblen Flüssigkeit in einem porösen Medium bei Turbulenz. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 119—120 (1952) [Russisch].

**Kalinin, N. K.:** Filtration durch einen zweischichtigen Keil. *Priklad. Mat. Mech.* **16**, 213—222 (1952) [Russisch].

**Grib, A. A.:** Die Integration der Gleichungen der instationären Bewegung einer Flüssigkeit bei hydraulischem Stoß in langen Rohrleitungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **83**, 43—46 (1952) [Russisch].

**Kampé de Fériet, Joseph et Jack Kotik:** Sur les ondes de pesanteur à deux dimensions d'énergie finie. *C. r. Acad. Sci., Paris* **235**, 230—232 (1952).

Für die ebene Strömung einer unendlich tiefen Flüssigkeit werden nach der linearen Theorie die Schwerewellen berechnet, die aus einer gegebenen Anfangsgestalt der freien Oberfläche bei anfänglicher Ruhe entstehen. *J. Pretsch.*

**Martin, J. C., W. J. Moyce, W. G. Penney, A. T. Price and C. K. Thornhill:** Some gravity wave problems in the motion of perfect liquids. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A **244**, 231—334 (1952).

In abgeschlossenen Aufsätzen werden behandelt: I. Die Beugungstheorie von Meereswellen und der Schutz von Wellenbrechern. II. Endliche periodische stationäre Schwerewellen in vollkommener Flüssigkeit. III. Die Auflösung einer Flüssigkeitssäule auf starrer horizontaler Unterlage unter dem Einfluß der Schwere. IV. Eine experimentelle Studie des Kollapses einer

Flüssigkeitssäule auf einer starren horizontalen Unterlage. V. Dto., in einem Medium geringerer, aber vergleichbarer Dichte. — Die Arbeiten I und II wurden angeregt durch den Bau des provisorischen Mulberry-Hafens für die Operation Overlord. Das Beugungsbild eines halbunendlichen Wellenbrechers in beliebigem Winkel zur Richtung herannahender Wellen wird in I an Hand der Sommerfeldschen Lösung für die Beugung von Lichtwellen an der Kante eines halbunendlichen Schirmes gewonnen. Auch die Untersuchung der Fortpflanzung durch ein Loch im Brecher gestattete Voraussagen über die Wellenverhältnisse im Hafenninnern. Für das Problem endlicher stationärer periodischer Schwerwellen in vollkommener Flüssigkeit beliebiger Tiefe kann in II kein strenger Beweis der Existenz der Lösungen gegeben werden, wie ihn Levi-Civita 1925 für fortschreitende endliche Wellen geführt hat. Die Arbeiten III—V stehen in Zusammenhang mit den Ergebnissen der zweiten Atombombenexplosion in Bikini. Die Kollapsbewegung einer Säule vollkommener Flüssigkeit, welche von einer zweiten Säule leichterer Flüssigkeit umgeben ist, wird in III für die Formen des Halbzylinders und der Halbkugel mit Relaxationsmethoden numerisch behandelt. Während in IV experimentell eine von Luft umgebene Wassersäule untersucht wird, dienen in V als schwereres Medium im umgebenden Wasser die wässrigen Lösungen von Kaliumpermanganat und Zinkchlorid. *J. Pretsch.*

**Davies, T. V.:** Gravity waves of finite amplitude. III. Steady, symmetrical, periodic waves in a channel of finite depth. *Quart. appl. Math.* 10, 57—67 (1952).

Unabhängig von zwei anderen Arbeiten des Verf. (*Proc. Roy. Soc.* demnächst), in welchen die Theorie der endlichen Schwerwellen im unendlich tiefen Kanal und die Einzelwelle behandelt werden, wird hier das ebene Problem für endliche Kanaltiefe untersucht. Durch Differentiation der Bernoullischen Gleichung für die freie Oberfläche nach dem Geschwindigkeitspotential wird nach Levi-Civita eine Gleichung gewonnen, welche dadurch vereinfacht wird, daß näherungsweise  $\sin \theta$  durch das erste Glied seiner Entwicklung nach  $\sin 3\theta$  ersetzt wird. Die Eindeutigkeit der Lösung, die nach den Methoden der konformen Abbildung berechnet wird, kann nicht bewiesen werden; höhere Näherungen werden nicht untersucht. Gleichwohl ergeben sich die eingangs erwähnten Probleme als Sonderfälle der allgemeineren Lösung bereits im Rahmen der ersten Näherung. *J. Pretsch.*

**Havelock, T. H.:** The moment on a submerged solid of revolution moving horizontally. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 5, 129—136 (1952).

Es wird das Moment untersucht, das durch Oberflächenwellen auf einen eingetauchten Rotationskörper, der sich in Richtung seiner Symmetrieachse parallel zu seiner freien Oberfläche bewegt, hervorgerufen wird. Die (angenäherte) Bestimmung wird für das Rotationsellipsoid und für gewisse andere Rotationskörper, die durch geeignete, auf der Rotationsachse angebrachte Quellen- und Senkenverteilungen erzeugt werden können, durchgeführt. *K. Maruhn.*

**Storchi, Edoardo:** Piccole oscillazioni dell'acqua contenuta da pareti piane. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 12, 544—552 (1952).

Das Problem der kleinen Schwingungen in einem oben offenen, seitlich durch ebene Wände begrenzten Gefäß, das von Kirchhoff und Greenhill in je einem Spezialfall behandelt worden war, wird unter den üblichen Vereinfachungen von Verf. bei beliebiger Neigung der Seitenwände durch Potenzreihenentwicklung der in Betracht kommenden analytischen Funktion gelöst. Interessanterweise konvergieren diese Reihen nur bei rationalem Verhältnis des Neigungswinkels zu einem rechten, sonst divergieren sie, geben also keine Lösung. Liegt das an der Methode? *G. Hamel.*

**Peters, Arthur S.:** Water waves over sloping beaches and the solution of a mixed boundary value problem for  $\Delta^2 \Phi - k^2 \Phi = 0$  in a sector. *Commun. pure appl. Math.* 5, 87—108 (1952).

Die lineare Theorie der Oberflächenwellen in Wasser über abfallendem Strand (Böschungswinkel  $\gamma$ ) führt auf fortschreitende Wellen, deren Kurven konstanter Phase in großem Küstenabstand sich Parallelen mit beliebigem Winkel zur Küstenlinie nähern. Während der Fall  $\gamma = \pi/2n$  durch Stoker (*dies. Zbl.* 28, 179) behandelt worden ist, wird das Problem hier für beliebiges  $\gamma$  nach einer anderen Methode

gelöst, indem es mit der Laplace-Transformierten des Geschwindigkeitspotentials  $\Phi$  längs des Radiusvektors zunächst in ein Potentialproblem für einen Streifen mit verwickelteren Randbedingungen umgewandelt und dann auf eine  $q$ -Differenzengleichung zurückgeführt wird, welche mit den vom Verf. früher (dies. Zbl. **41**, 117) entwickelten Verfahren gelöst werden kann. Diese Methode hat den Vorzug, auch bei allgemeineren Randbedingungen für  $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - k^2 \Phi = 0$  anwendbar zu sein.

*J. Pretsch.*

**Liu, Hsin Chih:** Über die Entstehung von Ringwellen an einer Flüssigkeitsoberfläche durch unter dieser gelegene, kugelige periodische Quellsysteme. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 211—226 (1952).

Für einen allseitig unendlich ausgedehnten Flüssigkeitsbereich mit freier Oberfläche wird die durch eine kugelige periodische Quelle hervorgerufene Oberflächen-erhebung für verschiedene Eintauchtiefe der Quelle bestimmt. Das Geschwindigkeitspotential wird aufgebaut aus dem Potential der Quelle, der an der Oberfläche gespiegelten Quelle, dem Potential der freien Welle und einem aus diesem nach Fourier verallgemeinerten Potential, welches für die Gebiete großer und kleiner Entfernungen vom Störzentrum getrennt integriert wird. Im Original der Göttinger Dissertation 1945 führt Verf. die Rechnung auch für eine senkrechte Quelllinie konstanter Ergiebigkeit durch.

*J. Pretsch.*

**Roseau, Maurice:** Réflexion des ondes dans un canal de profondeur variable. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 297—299 (1952).

### Wärmelehre:

**Ubbelohde, A. R.:** Geometrical representation of thermal transitions of higher order. *Nature* **169**, 832 (1952).

**Verschaffelt, J. E.:** Sur la généralisation du potentiel thermique. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **38**, 81—88 (1952).

**Verschaffelt, J. E.:** Sur l'équivalence du principe de superposition et du principe d'Onsager. *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **38**, 89—101 (1952).

**Davies, R. O.:** Transformation properties of the Onsager relations. *Physica* **18**, 182 (1952).

**Surinov, Ju. A.:** Lösung des gemischten Problems des Wärmeaustauschs durch Strahlung für die Kugel. *Doklady Akad. Nauk. SSSR, n. Ser.* **83**, 75—78 (1952) [Russisch].

Auf einem Teil der Innenfläche einer strahlungsdurchlässigen Hohlkugel sei eine stetige Temperaturverteilung vorgegeben, auf dem andern Teil eine stetige Verteilung der resultierenden Strahlungsdichte. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Oberfläche grau ist und dem Lambertschen Gesetze folgt, daß also der Absorptionskoeffizient  $A$  bzw. der Reflexionskoeffizient  $R = 1 - A$  bekannte stetige Funktionen des Ortes sind, aber weder von der Wellenlänge noch von der Richtung abhängen. Verf. bestimmt alle Größen des stationären Strahlungsfeldes, indem er nebeneinander alle in Betracht kommenden Strahlungsarten betrachtet: die einfallende Strahlung (die in diesem Falle konstant ist), die emittierte Strahlung, die reflektierte Strahlung, die effektive Strahlung (Summe aus emittierter und reflektierter) und die resultierende Strahlung (einfallende, vermindert um die effektive Strahlung). Es gelingt ihm auf diese Weise, ohne Benutzung der Strahlungsintegralgleichung auszukommen, dank der geometrisch einfachen Form des betrachteten Raumes.

*U. T. Bödewadt.*

**Rothstein, Jerome:** Information and thermodynamics. *Phys. Review, II. Ser.* **85**, 135 (1952).

**Mandelbrot, Benoit:** Les démons de Maxwell. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 1842—1844 (1952).



Jones, R. V. and C. W. McCombie: Brownian fluctuations in galvanometers and galvanometer amplifiers. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **244**, 205—230 (1952).

Parzen, Philip: Effect of thermal-velocity spread on the noise figure in traveling-wave tubes. *J. appl. Phys.* **23**, 394—406 (1952).

Bittel, Heinz: Zur Kennzeichnung von Geräuschen und Rausch-Spannungen. *Z. angew. Phys.* **4**, 137—146 (1952).

Fournet, Gérard: Theory of cooperative phenomena. *Phys. Review, II. Ser.* **85**, 692 (1952).

Bell, G. M.: A note on the statistics of the Weiss field. *Philos. Mag., VII. Ser.* **43**, 127—129 (1952).

Partition functions have been constructed in which the summation has been carried out only over consistent values of the sets of occupation numbers. They yield the correct expressions for the magnetisation and free energy. *P. T. Landsberg.*

Haar, D. ter: Gentile's intermediate statistics. *Physica* **18**, 199—200 (1952).

Rice, David: A problem in heat conduction and its solution. *Amer. J. Phys.* **20**, 263—266 (1952).

Miles, John W.: Heat conduction along an exponential bar. *J. appl. Phys.* **23**, 372 (1952).

Plesset, M. S. and S. A. Zwick: A nonsteady heat diffusion problem with spherical symmetry. *J. appl. Phys.* **23**, 95—98 (1952).

In einer nichtzähen Flüssigkeit soll sich eine Kugel befinden, deren Halbmesser nach gegebenem Gesetz  $R(t)$  wächst oder schrumpft, während in der Flüssigkeit außerhalb der Kugeloberfläche allenthalben die gleiche Wärmemenge  $d\eta/dt$  entwickelt wird. Die Temperatur, welche anfänglich überall  $T_0$  war, ändert sich im Unendlichen dann nach dem Gesetz  $T_\infty = T_0 + (D/k) \eta(t)$ . Verf. sucht die kugelsymmetrische Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Diese Gleichung nimmt nach Transformation auf die Lagrangesche Koordinate  $h = (r^3 - R^3)/3$  mit  $T = T_0 + \partial U / \partial k$  (bei passender Wahl der Konstanten in  $U$ ) die folgende Gestalt an:  $r^4 \partial^2 U / \partial h^2 - D^{-1} \partial U / \partial t = - (h/k) d\eta/dt$ . Wenn an der Kugeloberfläche  $r = R(t)$  der Temperaturgradient  $(\partial T / \partial r)_{r=R} = R^2(t) \cdot F(t)$  als bekannt angenommen wird, gelingt eine Lösung für die als dünn angesetzte Grenzschicht  $r - R \ll R$  durch Entwicklung nach dem Parameter  $h/R^3$ . Die Lösung nullter Ordnung und die Verbesserung erster Ordnung werden mittels der Laplace-Transformation berechnet. — Die Voraussetzungen treffen hinreichend zu bei einer einzelnen Dampfblase in einer sich erwärmenden oder abkühlenden Flüssigkeit, solange von der Translation abgesehen werden kann.

*U. T. Bödewadt.*

## Elektrodynamik. Optik:

● Küpfmüller, Karl: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 4. verb. u. erweitert. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1952. V, 441 S. Ganzleinen DM 27,60.

Das bekannte Buch des Verf. ist jetzt in 4. Auflage erschienen. In dieser Auflage sind die immer mehr üblichen Einheiten von Giorgi durchwegs eingeführt worden. Der Grundsatz, daß alle Formeln als Größengleichungen geschrieben werden, wurde beibehalten. Hierdurch sind sie für beliebige andere Einheiten richtig, wenn nur jede Größe als Produkt von Zahlenwert und Einheitszeichen in die Gleichungen eingeführt wird. Beim Aufstellen von Wünschen für spätere Auflagen dieses ausgezeichneten Werkes muß berücksichtigt werden, daß es sich um eine „Einführung“ handelt. Bei der Behandlung der Kirchhoffschen Gleichungen und ihrer Anwendungen S. 14—28 wäre es vielleicht erwünscht, für mehrfach gespeiste Leiterstücke mit verteilter Strombelastung die bekannte graphostatische Methode aufzunehmen.

welche zur Lösung dieser Aufgaben in anschaulicher Weise führt. Die Behandlung der Teilkapazitäten bei Mehrleitersystemen weist gegenüber derjenigen früherer Auflagen dieses Buches eine Verbesserung auf und dürfte jetzt befriedigen. Im Anschluß an die graphischen Methoden zur Ermittlung der Potentialverteilung in elektrostatischen Feldern, S. 137—139, wäre vielleicht auch noch die auf dem Mittelwertsatz beruhende Methode des Punktgitters für ebene und rotationssymmetrische Probleme zu erwähnen. Bei den elektrischen Gasentladungen, S. 156—158, wäre es gut, wenn neben der Townsendschen Behandlung die neueren Überlegungen auf diesem Gebiete etwas stärker betont würden. Als wichtige Anwendung der Glimmentladungsröhren wäre es vielleicht nützlich, auf Seite 162 auch die Spannungstabilisierung zu erwähnen. Diese und noch einige Wünsche dürfen aber in keiner Weise als Kritik dieses Buches aufgefaßt werden, dem auch in Zukunft wegen seiner ausgezeichneten Eigenschaften eine sehr weite Verbreitung zu wünschen ist.

*M. J. O. Strutt.*

**Gans, Richard:** Bemerkung zu der neuen Definition des Ampère. *Ann. der Physik*, VI. F. **10**, 167—169 (1952).

**Bertein, François:** Sur la réalisation de champs statiques uniformes. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 308—309 (1952).

**Alsina, Fidel A.:** Kräfte zwischen elektrischen Ladungen und zwischen Leitern. *Ann. Soc. ci. Argentina* **153**, 49—63 (1952) [Spanisch].

**Miles, John W.:** Reduction of three-dimensional electromagnetic problems. *J. appl. Phys.* **23**, 372 (1952).

**Jouvet, Bernard:** Sur la théorie classique du point chargé. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 712—714 (1952).

**Gross, Wolf:** Sul calcolo della capacità elettrostatica di un conduttore. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. **12**, 496—506 (1952).

Let  $\Sigma$  be the boundary of a bounded three-dimensional regular domain  $D$ ,  $q$  the harmonic function, defined in the exterior of  $D$ , vanishing at infinity and taking the constant value 1 over  $\Sigma$ . The electrostatic capacity of  $\Sigma$  is mathematically defined as  $C = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial q}{\partial \nu} d\sigma$ .  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  denotes differentiation along the exterior normal.

Methods of the Italian Institute for the applications of Calculus are applied in the special problem consisting in the computation of  $C$ .  $D$  is supposed to be the cube  $-\frac{1}{2} < x, y, z \leq \frac{1}{2}$ . Let  $\{q_k\}$  be a particular system of harmonic functions vanishing at infinity. Green's identity  $\int_{\Sigma} q_k \frac{\partial q}{\partial \nu} d\sigma = \int_{\Sigma} q \frac{\partial q_k}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Sigma} \frac{\partial q_k}{\partial \nu} d\sigma$  gives the Fourier's

coefficients of  $\frac{\partial q}{\partial \nu}$  with respect to the above introduced system. Assuming  $\gamma_i^{(n)} (i =$

$1, 2, \dots, n)$  as the solutions of the algebraic system  $\sum_{i=1}^n \gamma_i^{(n)} \int_{\Sigma} q_i q_k d\sigma = \int_{\Sigma} \frac{\partial q_k}{\partial \nu} d\sigma$

$(k = 1, 2, \dots, n)$ ,  $C^{(n)} = \sum_{i=1}^n \gamma_i^{(n)} \int_{\Sigma} q_i d\sigma$  is the  $n$ -th approximation for  $C$ . A method for getting bounds for  $|C - C^{(n)}|$  is considered. The approximate value 0,646 for  $C$  is obtained with the following bound  $|C - 0,646| < 0,032$ .

*G. Fichera.*

**Derjugin, L. N.:** Die Verteilung von Strömen in einer Scheibe, die in einem homogenen magnetischen Strom rotiert, und die Bremsung. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. **82**, 581—584 (1952) [Russisch].

**Wait, James R.:** Current-carrying wire loops in a simple inhomogeneous region. *J. appl. Phys.* **23**, 497—498 (1952).

Arzeliès, Henri: Sur une forme matricielle et tensorielle des relations fondamentales de la théorie magnéto-ionique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2430—2432 (1952).

Lucas, René: Sur l'interaction des ondes électromagnétiques dans la matière. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 191—193 (1952).

Falkenhagen, H. und G. Kelbg: Eine optische Methode zur Bestimmung der komplexen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  und der magnetischen Permeabilität  $\mu$ . Ann. der Physik, VI. F. **10**, 170—176 (1952).

Lüdi, Fritz: Zur Theorie des Magnetronverstärkers. Z. angew. Math. Phys. **3**, 119—128 (1952).

Harris, Lawrence A.: Instabilities in the smooth-anode cylindrical magnetron. J. appl. Phys. **23**, 562—567 (1952).

Zur Erklärung der restlichen Stromleitung im Magnetron bei einer Anodenspannung unter dem kritischen Wert werden die Instabilitäten der Raumladungswolke untersucht. Durch Beschränkung auf geringe Störungen des stationären Zustandes wird das Problem linearisiert und für den Fall einer verschwindend kleinen Kathode ausgewertet. Die radialen Admittanzen für Wellen im raumladungsfreien Gebiet und innerhalb der Raumladungswolke in der Röhre werden gesondert bestimmt und am Rande der Ladungswolke einander gleich gesetzt. Die Elektronenbewegung wird mit Hilfe der Hamilton-Jakobischen Differentialgleichung untersucht. Wenn auch aus dem linearisierten Problem weitgehende quantitative Folgerungen nicht gezogen werden können, so ergeben sich doch nach dieser Methode die Existenz von Instabilitäten und angenäherte Werte für die Oszillationsfrequenzen.

W. Glaser.

Copeland, Paul L. and Delbert N. Eggenberger: The electric field in diodes and the transit time of electrons as functions of current. J. appl. Phys. **23**, 280—286 (1952).

Ivey, Henry F.: Space charge and transit time considerations in planar diodes for relativistic velocities. J. appl. Phys. **23**, 208—211 (1952).

Ivey, Henry F.: Space-charged-limited currents between inclined plane electrodes. J. appl. Phys. **23**, 240—249 (1952).

Knudsen, H. Lottrup: Radiation field of a square, helical beam antenna. J. appl. Phys. **23**, 483—491 (1952).

Für eine quadratische, schraubenlinienförmige Antenne werden Formeln für das Strahlungsfeld aufgestellt, wenn angenommen werden darf, daß sich auf dem Antennenleiter eine Stromwelle mit konstanter Amplitude ausbreitet. Die Formeln sind sehr einfach und können bei derartigen Antennen im Meter-Bereich unmittelbar angewendet werden. An einem numerischen Beispiel wird gezeigt, daß sich die aufgestellten Formeln auch dazu eignen, den Fehler der bisher benutzten Näherungsformeln für das Feld kreisförmiger Schraubenlinienantennen abzuschätzen.

H. Buchholz.

Wolter, Hans: Strahlungsdämpfung, Widerstände und Richtdiagramme von Überbreitbandantennen. Z. angew. Phys. **4**, 60—70 (1952).

Poincelot, Paul: Sur la répartition du courant le long d'une antenne cylindrique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 513—515 (1952).

Storer, James E.: The radiation pattern of an antenna over a circular ground screen. J. appl. Phys. **23**, 588—593 (1952).

Verf. leitet auf der Grundlage einer eigenen älteren Arbeit (dies. Zbl. **44**, 224) eine Beziehung her, mit deren Hilfe das totale Strahlungsdiagramm einer Antenne entworfen werden kann, die über einer großen, kreisförmigen Platte angeordnet ist. Es werden einfache Formeln aufgestellt für die Zahl der Strahlungskeulen einer solchen Antenne, die Winkelstellung dieser Keulen und für den maximalen Winkel, innerhalb dessen sie auftreten.

H. Buchholz.



Baños jr., Alfredo, David S. Saxon and Louis L. Bailin: Radiation characteristics of a turnstile antenna shielded by a section of a metallic tube closed at one end. *J. appl. Phys.* **23**, 688—696 (1952).

Es wird das Strahlungsdiagramm einer Drehkreuzantenne berechnet, die im Innern eines zylindrischen Hohlleiters angeordnet ist. Die Antenne besteht aus zwei sich senkrecht kreuzenden Drähten, auf denen eine sinusförmige und um  $90^\circ$  in der Phase gegeneinander versetzte Stromverteilung herrscht. Es wird nur der eingeschwungene Zustand bei einem rein sinusförmigen zeitlichen Verlauf untersucht. Die Antenne steht im Innern eines vollkommen leitenden Zylinderrohres von kreisförmigem Querschnitt, das auf einer Seite abgeschlossen ist. Der Durchmesser ist so gewählt, daß er nur einen Bruchteil der benutzten Wellenlänge beträgt. Unter der angenommenen Stromverteilung wird zunächst das erregte Feld in einem unendlich langen, zylindrischen Hohlleiter untersucht und die Bedingungen ermittelt, unter denen allein eine  $TE_{11}$ -Welle der geringsten Frequenz in dem Hohlleiter bestehen kann. Das Strahlungsdiagramm ist praktisch das gleiche wie bei einem einseitig unendlich langen Hohlleiter, der eine  $TE_{11}$ -Welle führt und sie aus dem offenen Ende in den freien Raum abstrahlt. Die Lösung dieser Aufgabe wurde aber bereits von Levine-Schwinger in einer bisher unveröffentlicht gebliebenen Arbeit besorgt. Sie wird der Berechnung des Strahlungsdiagramms zugrunde gelegt. Die Resultate der Theorie werden sowohl mit Experimenten verglichen wie auch mit den Ergebnissen, die sich rechnerisch bei Benutzung der Kirchhoffschen Methode ergeben. *H. Buchholz.*

Vakin, S. A.: Die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs eines unendlichen spiralförmigen Spaltes. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **84**, 37—40 (1952) [Russisch].

Den Untersuchungen liegt ein unendlich langer Zylinder von kreisförmigem Querschnitt zugrunde, dessen Wandung sehr dünn ist, aber andererseits unendlich gut leitet. Das umgebende Medium wird als homogen, isotrop und verlustlos angesehen. In der Oberfläche des Zylinders ist ein hinreichend schmaler Spalt von der konstanten Breite  $d$  in Form einer Schraubenlinie eingeschnitten. Es werden in der Arbeit die Bedingungen bestimmt, unter denen sich längs eines solchen Spalts ungedämpfte, elektromagnetische Wellen fortpflanzen können. Bei der rechnerischen Behandlung der Aufgabe werden nebeneinander 2 Koordinatensysteme benutzt: das bekannte zylindrische Koordinatensystem und ein orthogonales, krummliniges System in der Oberfläche des Zylinders, dessen Grundvektoren den Richtungen  $L$  der Tangente und der Binormalen  $u$  entsprechen. Für die Spannungswelle, die am Spalt entlang läuft, wird der Ansatz  $U = U_0 \cdot \exp(i k_n L)$  gemacht, worin  $k_n$  ein zu berechnender Eigenwert ist. Für das elektrische Feld in dem sehr schmalen Spalt der Breite  $d$  wird eine mutmaßliche Verteilung gemäß dem Gesetz  $E_{(s)}^{(s)} = U_0/\pi \cdot (d^2/4 - u^2)^{-1/2} \cdot \exp(i k_n L)$  angenommen. Auf weitere Einzelheiten dieser hochinteressanten Arbeit kann hier nicht eingegangen werden. Die Lösung zeigt, daß für die Eigenfrequenzen Gebiete, in denen  $k_n$  reell ist, mit solchen, in denen  $k_n$  komplexwertig ist, abwechselnd aufeinander folgen. *H. Buchholz.*

Gruenberg, H.: Symmetrically placed inductive posts in rectangular wave guide. *Canadian J. Phys.* **30**, 211—217 (1952).

Parodi, Maurice: Sur la détermination de conditions d'intégration des équations de propagation de l'électricité sur une ligne hétérogène. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 1674—1676 (1952).

Graffi, Dario: Un teorema di unicità per le equazioni di Maxwell e sue applicazioni alla teoria delle guide d'onda. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. fis., X. Ser.* **8**, 213—218 (1952).

Let the region  $(D)$  be bounded by a perfect conductor, except for plane portions  $(\Sigma)$  which are simply-connected. Inside  $(D)$  let the conductivity, permeability and dielectric constant be positive. The author's theorem is that a harmonically-varying field in  $(D)$  is uniquely determined by the normal components of  $\mathbf{E}$  and  $\mathbf{H}$  on  $(\Sigma)$  and the tangential components on the perfectly conducting portion of the boundary. In the case of multiple conductivity a supplementary condition is to be imposed on  $\mathbf{H}$ . The proof goes by way of an integral transformation applied to the energy-flux over  $(\Sigma)$ . This theorem is used to check certain eigen-function

expansions for fields inside tubes of general cross-section with conducting lateral surface and homogeneous walls. *F. V. Atkinson.*

**Ledinegg, E. und P. Urban:** Zur Theorie der erzwungenen Schwingungen elektrodynamischer Systeme. *Acta phys. Austr.* 5, 510—528 (1952).

An dem Beispiel eines an eine konzentrische Lecherleitung angeschlossenen, kreiszylindrischen Hohlraumresonators wird gezeigt, wie sich in praktischen Fällen mit einer Lösung der Maxwell'schen Hauptgleichungen in Gestalt vektorieller Reihen rechnen läßt, die nach Eigenfunktionen der Wellengleichung fortschreiten. Diese vektoriellen Eigenfunktionen  $\mathfrak{E}_n$  mit  $n = 1, 2, 3 \dots$  haben der Differentialgleichung  $\text{rot rot } \mathfrak{E}_n - k_n^2 \cdot \mathfrak{E}_n = 0$  zu genügen und überdies der Randbedingung, daß die Tangentialkomponente von  $\mathfrak{E}$  an den räumlichen Begrenzungen des Resonators verschwinden muß. Dabei wird in dem genannten Beispiel von dem Verfasser das Lecher-System mit zum Schwingungssystem gezählt. Die theoretischen Voraussetzungen für die Reihenentwicklungen nach den vektoriellen Eigenfunktionen werden in der Arbeit näher untersucht und für den Greenschen Tensor die zugehörigen, bilinearen Entwicklungen angegeben. *H. Buchholz.*

**Poincelot, Paul:** Sur l'inexistence de l'onde de surface (Oberflächenwelle) de A. Sommerfeld. *C. r. Acad. Sci., Paris* 235, 350—352 (1952).

Bei der Behandlung der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf einer ideal leitenden Kugel erhielt Sommerfeld 1909 einen Term, den er als Oberflächenwelle interpretierte; in den Arbeiten anderer Autoren aus neuerer Zeit erscheint dieser Term nicht. Verf. stellt fest, daß Sommerfeld bei der Auswertung eines komplexen Integrals ein Residuum vergessen hat, und die Sommerfeldsche Oberflächenwelle nicht existiert. *Walter Franz.*

**Hufford, George A.:** An integral equation approach to the problem of wave propagation over an irregular surface. *Quart. appl. Math.* 9, 391—404 (1952).

Es handelt sich hier um das praktisch wichtige Problem der Ausbreitung der Radiowellen über eine unregelmäßige und inhomogene Oberfläche, wie sie die Erdoberfläche darstellt. In seiner einfachsten Form läuft seine Lösung hinaus auf die Integration der skalaren Wellengleichung, wobei der Skalar  $\psi$  mit der  $z$ -Komponente des Hertz'schen Vektors identisch ist, unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Randbedingung in der von Leontovich empfohlenen Form  $\partial\psi/\partial N = -i k \cdot \delta \cdot \psi$ . Hierin ist  $N$  die Oberflächennormale und  $\delta \approx 1/n$  oder  $\approx n$  mit  $n$  in der Bedeutung der komplexen Dielektrizitätskonstanten der Erde. Mittels des Greenschen Satzes und mit Hilfe der Funktion  $e^{ikR}/kR$  wird eine Integralgleichung für die Funktion  $\psi(P)$  aufgestellt, in der die Integration über die (ebene) Erdoberfläche geht und als inhomogenes Glied die Funktion  $\psi_0(P)$  eingeht, die das ungestörte Feld beschreibt. Für  $\psi_0(P)$  und  $\psi(P)$  werden dann zwei Funktionen  $g(P)$  und  $W(P)$  eingeführt, die sich von jenen nur durch den Faktor  $e^{ikr_0}/r_0$  unterscheiden mit  $r_0$  als dem Abstand des Aufpunkts vom Bezugspunkt. Die weiteren Umformungen an der damit entstandenen Integralgleichung für  $W(P)$  fußen einestails auf dem Prinzip der stationären Phase, zum anderen werden gewisse geometrisch-physikalische Überlegungen benutzt. Beide Hilfsmittel ermöglichen schließlich den Übergang von der bisher dreidimensionalen zu einer eindimensionalen Integralgleichung für  $W(P)$ . Sie ist nach wie vor inhomogen, aber nunmehr vom Volterra'schen Typus. Sie wird in den beiden Fällen, auf die zum Schluß näher eingegangen wird, mittels der Laplace-Transformation gelöst. *H. Buchholz.*

**Abelès, Florin:** Sur les déphasages que subit une onde plane par réflexion ou par transmission à travers une couche métallique très mince. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 2053—2055 (1952).

**Franz, Walter:** Einfache Herleitung der allgemeinen Kirchhoffschen Beugungsformel und ihres elektromagnetischen Analogons. *Z. angew. Math. Mech.* 32, 26—27 (1952).

The formulae in question express a wave-function in terms of retarded surface and volume integrals. The author gives three cases, (1) acoustic waves in 3 dimensions, (2) electromagnetic waves in 3 dimensions, (3) acoustic waves in  $m$  dimensions, where  $m$  is odd and  $m \geq 3$ . The author's aim is to give a simpler and shorter proof than that given [for cases (1) and (2) only] by B. B. Balker and E. T. Copson [„Mathematical theory of Huygen's principle“, Oxford 1939 (1st edition; this Zbl. 22, 228) Chap. I § 5.2, Chap. III § 1.2]. The present proofs are rather more condensed; the reviewer missed particularly an explanation of the author's rules for applying the vector differential operators to retarded functions. *F. V. Atkinson.*

**Miles, J. W.:** On the diffraction of an electromagnetic pulse by a wedge. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 212, 547—551 (1952).

Verf. zeigt zunächst, daß das vektorielle Problem (auch wenn die Front der einfallenden ebenen Welle nicht parallel zur Keilkante ist) sich auf zwei skalare, der gewöhnlichen Wellengleichung genügende Funktionen reduzieren läßt. Falls die primäre Welle in einem Sprung in den Feldstärken besteht, kann das Problem für die zwei Funktionen weiter in ein Potentialproblem verwandelt werden, auf einem vom Verf. in einer vorhergehenden Arbeit dargestellten Weg [dies. Zbl. 46, 182]. Die Lösung gelingt dann wieder in geschlossener Form. *A. Schoch.*

**Senior, T. B. A.:** Diffraction by a semi-infinite metallic sheet. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 213, 436—458 (1952).

Verf. behandelt die Beugung an einem metallischen Schirm endlicher Leitfähigkeit, welcher die Gestalt einer Halbebene hat, dünn gegen die Wellenlänge ist, jedoch dick genug, um völlig undurchsichtig zu sein. Die Unstetigkeiten der Feldstärken beim Durchgang durch den Schirm, interpretiert als elektrische und magnetische Flächenströme, genügen zwei Wiener-Hopfschen Integralgleichungen, welche sich exakt lösen lassen. Der Vergleich der Ergebnisse mit Messungen von Savornin für Einfall senkrecht zur Schirmebene zeigt bei großen Ablenkungswinkeln nach der Öffnung hin beträchtliche Abweichungen; für Ablenkung nach dem Schirm zu dagegen ist die Übereinstimmung befriedigend, und deutlich verbessert gegenüber der Sommerfeldschen Formel für Beugung an der ideal leitenden Halbebene. Besonders die Polarisierung der gebeugten Welle wird durch die Formeln des Verf. erheblich besser wiedergegeben als durch die Sommerfeldschen. *Walter Franz.*

**Bremmer, H.:** On the asymptotic evaluation of diffraction integrals with a special view to the theory of defocusing and optical contrast. Physica 18, 469—485 (1952).

Verf. behandelt die Lösung  $u$  der Wellengleichung im Halbraum  $z > 0$ , welche für  $z = 0$  vorgegebene Randwerte  $u_0$  besitzt. Aus der bekannten Darstellung mittels des Kirchhoffschen Integrals wird durch die Sommerfeldsche Integraldarstellung der Kugelwelle eine Form der Lösung gewonnen, welche die Randbelegung  $u_0$  in der Gestalt einer nach  $\Delta_2^n u_0$  fortschreitenden Reihe ( $\Delta_2 =$  Laplace-Operator  $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ) enthält. Diese Lösung kann in einen geometrisch-optischen und einen Beugungs-Anteil zerlegt werden; der letzte läßt sich entsprechend der bekannten Darstellung von Maggi und Rubinowicz in ein Randintegral über die beugende Öffnung verwandeln. — Die Konvergenz der Reihen für polynomiale  $u_0$  wird gezeigt, und geschlossen, daß sie asymptotisch für große  $k$  ( $= 2\pi/\lambda$ ) für beliebige  $u_0$  konvergieren sollten. Die asymptotische Entwicklung des geometrischen Anteils schreitet nach ganzzahligen Potenzen von  $k^{-1}$  fort; bei der Entwicklung des Beugungsteiles ergeben sich halbzahlige Potenzen dieses Parameters. — Das Ergebnis wird auf die Fragen der Defokussierung und des optischen Kontrasts angewendet. *Walter Franz.*

**Bernštejn, I. L. und G. S. Gorelik:** Zur Theorie des Sterninterferometers von Michelson. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 86, 47—50 (1952) [Russisch].



Cagnet, Michel: Répartition des éclairéments dans l'image d'un point formée par un instrument à écran diffusant parfait. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1271—1273 (1952).

Longhurst, R. S.: A note on the calculation of principal ray aberration. Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 116—117 (1952).

Für den Pupillen-Öffnungsfehler 3. Ordnung (den sechsten Fehler 3. Ordnung) wird eine Formel abgeleitet, in der nur Größen stehen, die auch bei der Berechnung der üblichen fünf Bildfehler 3. Ordnung nach H. H. Hopkins. Wave theory of aberrations, London 1950, dies. Zbl. **40**, 275, auftreten. *H. Marx.*

Sturrock, P. A.: The imaging properties of electron beams in arbitrary static electromagnetic fields. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **245**, 155—187 (1952).

Die Fokussierung von Elektronenstrahlbündeln mit krummlinigem Hauptstrahl, wie sie von M. Cotte und G. Wendt behandelt worden ist, wird neuerlich ausführlich dargestellt. Zum Unterschied von den erwähnten Arbeiten, in denen das Linienelement im begleitenden Dreieck des Hauptstrahles durch eine zusätzliche Drehung um die Bündelachse auf orthogonale Form gebracht wird, ist hier von dieser Vereinfachung nicht Gebrauch gemacht worden. Der so erhaltene allgem. Maßtensor gibt dem Verf. die Gelegenheit, bei der Entwicklung des Feldes um die Bündelachse die formalen Methoden des absoluten Differentialkalküls zu benutzen. Außer den schon von M. Cotte betrachteten Aberrationen zweiter Ordnung, wird der paraxiale Farbfehler behandelt und das bekannte Beispiel der Fokussierung durch Schraubenbahnen im Feld zweier coaxialer zylindrischer Elektroden näher untersucht. *W. Glaser.*

Nilsson, Sven Gösta: The motion of electrons in the field of a homogeneously wound toroid. Ark. Fys. **4**, 347—351 (1952).

Persson, Rolf: Notes on the focusing properties of homogeneous magnetic sector fields. Ark. Fys. **3**, 455—469 (1952).

Liebhmann, G.: The magnetic electron microscope objective lens of lowest chromatic aberration. Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 188—192 (1952).

Jacob, L.: The current in the electron immersion objective. Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 421—425 (1952).

Gianola, U. F.: Investigation of magnetic lenses having the axial field  $H(0, z) = \gamma/z^n$ . Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 597—603 (1952).

Grivet, Pierre: Éléments cardinaux d'un nouveau modèle de lentille électronique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 73—75 (1952).

Bertein, François: Sur certaines méthodes de détermination du champ sur l'axe en optique électronique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 417—419 (1952).

### Relativitätstheorie:

Rosen, Nathan: Special theories of relativity. Amer. J. Phys. **20**, 161—164 (1952).

Verf. weist darauf hin, daß in einem homogenen isotropen Medium die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer Vakuum-Form geschrieben werden können, jedoch mit einer Lichtgeschwindigkeit  $c' < c$ . Demzufolge kann man  $c'$ -Lorentz-Transformationen und die dazu gehörige „spezielle Relativitätstheorie“ betrachten. *W. Urich.*

Synge, John L.: Sur les connections relativistes entre la fréquence, la longueur d'onde, la vitesse de phase et la vitesse de groupe. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1669—1670 (1952).

Sivadjian, Joseph: Sur le principe de la constance de la vitesse de la lumière. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1953—1954 (1952).

Jánossy, L.: On the physical interpretation of the Lorentz transformation. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **1**, 391—422 (1952).

Verf. gibt unter Beibehaltung der Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie der Lorentztransformation eine Interpretation, welche den ursprünglichen Ideen von Lorentz und Fitzgerald über Kontraktion der Maßstäbe und Verlangsamung der Uhren nahekommt. Bei der plötzlichen homogenen Beschleunigung eines materiellen Körpers verändert er sich zunächst entsprechend der Galilei-Transformation, erleidet jedoch innere Spannungen, unter deren Einfluß er nachträglich in den durch die Lorentztransformation gegebenen Zustand übergeht. Diese nachträgliche elastische Veränderung und eine ähnliche Veränderung von Uhren wird als neue Interpretation der Lorentztransformation vorgeschlagen (Ref. kann hierin allerdings nicht eine neue Interpretation, sondern nur eine Konsequenz der Lorentztransformation erblicken, da diese den spannungsfreien Zustand bestimmt).

Walter Franz.

Metz, André: Théorie relativiste de l'expérience de Sagnac avec interposition de tubes réfringents immobiles. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 597—599 (1952).

Metz, André: Théorie relativiste d'une expérience de Dufour et Prunier. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 705—707 (1952).

Mauguin, Charles: Astronautique et relativité. A l'assaut de l'espace temps. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 1004—1007 (1952).

Macke, W.: Begründung der speziellen Relativitätstheorie aus der Hamiltonschen Mechanik. *Z. Naturforsch.* **7a**, 76—78 (1952).

Verf. möchte die Lorentz-Transformation aus dem Postulat herleiten, daß die Transformation von einem Inertialsystem zu einem anderen sich im homogenen Hamilton-Formalismus (in welchem neben Ort und Impuls auch Zeit und Energie als kanonisch konjugierte Variable eingeführt werden) als kanonische Transformation darstellt. Daß dies nicht in dieser Form möglich sein kann, sieht man schon daraus, daß die Lichtgeschwindigkeit auf diese Weise gar nicht eingeführt wird. Es tritt wohl eine Konstante der Dimension einer Geschwindigkeit,  $a$ , auf; doch ist deren Universalität nicht bewiesen. Wenn man diese postuliert, so muß außerdem immer noch die Beziehung  $E = ma^2$  ohne Begründung eingeführt werden: erst dann gelangt man zur Lorentztransformation.

M. R. Schaefroth.

Galli, Mario: Le deformazioni relativistiche di un cilindro rotante. I. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. nat., VIII. Ser.* **12**, 86—92 (1952).

● Bondi, H.: *Cosmology*. (Cambridge Monographs on Physics.) London: Cambridge University Press 1952. 176 p. 22 s. 6 d. net.

Das Buch gibt einen prägnanten Überblick über die Wege, Methoden und Aussagen der Kosmologie. Im ersten Abschnitt werden Fragen diskutiert, die mit der Formulierung des Grundproblems zusammenhängen. Insbesondere wird auch auf das sogenannte „kosmologische Prinzip“ näher eingegangen, das als Postulat fast allen kosmologischen Theorien zugrunde liegt, wenn auch in verschiedener Form, je nachdem es nämlich nur räumliche oder auch (wie bei der „Steady-State-Theorie“) auch zeitliche Homogenität fordert. Im zweiten Abschnitt des Buches wird alles Beobachtungsmaterial zusammengestellt, das für die Prüfung von kosmologischen Theorien von Wichtigkeit sein kann. Der dritte Abschnitt ist der umfangreichste. In ihm werden die wichtigsten der bis jetzt aufgestellten kosmologischen Theorien einzeln kritisch behandelt, und zwar die Newtonsche Kosmologie, die relativistische Kosmologie, die kinematische Kosmologie, die „Steady-State-Theorie“, sowie die Theorien von Eddington, Dirac und Jordan. Verf. ist der Ansicht, daß die von ihm und T. Gold entwickelte Steady-State-Theorie (die viel Gemeinsames mit der von F. Hoyle aufgestellten Theorie hat) der Beobachtung am besten entspreche und auch die einfachste und logischste Grundlage habe. Die fundamentale Annahme, die der Steady-State-Theorie zugrunde liegt, ist, daß das Universum sich zwar in einem nicht-statischen, expandierenden Zustand befinde, aber im Großen trotzdem immer den gleichen Anblick biete, da laufend neue Materie entstehe und so die Dichte des Universums konstant gehalten werde.

H. Vogt.

Maravall Casesnoves, Dario: Die nichteuklidische Raum-Zeit-Metrik im Innern einer barotropen, kugelsymmetrischen flüssigen Masse. *Revista mat. Hisp.-Amer., VI. Ser.* **12**, 138—150 (1952) [Spanisch].

**Kurşunoğlu, Behram:** Einstein's unified field theory. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 81—83 (1952).

In Einstein's theory (The meaning of relativity, London 1950; this Zbl. **37**, 420) there is no obvious way for the choice of a metric. But once a metric is obtained the matter tensor follows from the Hamiltonian derivatives of the Lagrangian with respect to the metric. It is shown that under certain assumptions about the metric the matter tensor of the total field vanishes identically, when Einstein's field equations are satisfied. A new version of a field theory is suggested in which the energy momentum tensor does not vanish identically. The details will appear elsewhere.

*J. Haantjes.*

**Gupta, Suraj N.:** Quantization of Einstein's gravitational field: Linear approximation. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 161—169 (1952).

Die linearisierte Gravitationstheorie wird mit der Methode der indefiniten Metrik im Hilbertschen Raum für die überschüssigen Feldkomponenten quantisiert. Das bekannte Resultat, daß die „Gravitonen“ Teilchen vom Spin 2 und Ruhmasse Null sind, wobei der Spin jedoch nur zwei Einstellungen hat, wird neu gewonnen. Schließlich wird in Kürze gezeigt, wie man die Wechselwirkung mit Materie störungsmäßig zu behandeln hat.

*M. R. Schafroth.*

**Bonnor, W. B.:** The general static spherically symmetric solution in Einstein's unified field theory. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **210**, 427—434 (1952).

Die Arbeit diskutiert die allgemeinste kugelsymmetrische statische Lösung der Einsteinschen einheitlichen Feldtheorie in ihrer strengen Formulierung, also die Lösung  $(\alpha, \beta, \gamma, f, w$  Funktionen von  $r)$   $g_{11} = -\alpha$ ,  $g_{12} = g_{13} = g_{21} = g_{24} = g_{31} = g_{34} = g_{42} = g_{43} = 0$ ,  $g_{14} = w$ ,  $g_{22} = -\beta$ ,  $g_{23} = f \cdot \sin \vartheta$ ,  $g_{32} = -f \cdot \sin \vartheta$ ,  $g_{33} = -\beta \cdot \sin^2 \vartheta$ ,  $g_{41} = -w$ ,  $g_{44} = \gamma$  der Feldgleichungen

$$g_{ik,a} = g_{sk} \Gamma_{ia}^s + g_{is} \Gamma_{ak}^s \quad \Gamma_{is}^s = 0$$

$$R_{ik} \equiv \Gamma_{ik,s}^s - \frac{1}{2} (\Gamma_{is,k}^s + \Gamma_{sk,i}^s) - \Gamma_{it}^s \Gamma_{sk}^t + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{st}^t = 0.$$

Es zeigt sich, daß  $f/r^2$  der elektrischen und  $w$  der magnetischen Feldstärke entspricht. Das elektromagnetische Feld entspricht dem Feld eines magnetischen Poles und elektrischen Ladungsverteilungen räumlich periodisch wechselnden Vorzeichens. Es scheint, daß nur die (vom Verf. in einer Vorarbeit diskutierte) Lösung für ein rein elektrisches Feld physikalische Bedeutung besitzt. — Da jedoch die Lösungen der Differentialgleichungen auf den anzweifelbaren Randbedingungen  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow r^2$ ,  $\gamma \rightarrow 1$ ,  $f/r^2 \rightarrow 0$ ,  $w \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$  aufgebaut sind, erscheint es dem Ref. möglich, daß die Berücksichtigung der kosmologischen Konstante (und damit der Schrödingerschen Form der Feldtheorie) wesentlich andere Ergebnisse zu liefern in der Lage wäre.

*F. Cap.*

**Ikeda, M.:** On the approximate solutions of the unified field theory of Einstein and Schrödinger. Progress theor. Phys. **7**, 127—128 (1952).

## Quantentheorie:

**Bastin, E. W. and C. W. Kilmister:** The analysis of observations. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **212**, 559—576 (1952).

This paper concerns the methods used by Eddington in his book: Fundamental theory (Cambridge 1946). It gives an abstract interpretation of physical measurement. It is postulated that an observable, result of a physical observation, can be represented by an ordered set of real numbers. A comparison  $P$  is a relation  $\chi_\alpha = \sum P_{\alpha\beta} \varphi_\beta$  between two observables of order  $n$ . Thus a comparison which is an observable of order  $n^2$ , is represented by a matrix. These matrices constitute an algebra  $\mathfrak{A}$ . It is postulated that a linear mapping  $\sigma$  exists (the scale-



operator) of  $\mathfrak{A}$  onto the field  $R$  of real numbers. Now several conditions (the measurement conditions) concerning  $\mathfrak{A}$  and the group  $G$  of scale-preserving transformations are postulated. For  $n = 2$  a comparison of two comparisons is an observable of order 16. This is called a particle and it is shown that the conditions require that a particle is represented by two scalars, two vectors and a bivector in a certain 4-space. In this case the group  $F$  is the Lorentz group. The theory is applied to the problem of the hydrogen atom. *J. Haantjes.*

**Falk, Gottfried:** Die Analogie zwischen Hamilton-Jacobi-Theorie und quantenmechanischem Eigenwertproblem. *Z. Phys.* 131, 470—480 (1952).

Eine die algebraischen Eigenschaften der Poissonklammern bzw. der Kommutatoren zugrunde legende Analogie von klassischer und Quantenmechanik wird durchgeführt. Insbesondere wird die Formulierung des „quantentheoretischen Eigenwertprinzips“ (in Schrödingerscher Formulierung:  $R\psi_r = r\psi_r$ ,  $r$  = mögliche Meßwerte von  $R$ ) in dem durch die  $p_i$  und  $q_i$  erzeugten nichtkommutativen „Heisenberg-Ring“ gegeben, weil so die enge Analogie zur klassischen Theorie auch in diesem Punkte hervortritt. Die Erfahrungstatsache, daß die Hamilton-Jacobische und die Schrödingersche Differentialgleichung sich stets in denselben Koordinaten separieren lassen, wird, als Konsequenz hieraus, verständlich. *G. Süßmann.*

**Haag, R.:** Formale Korrespondenz, Faktorenreihenfolge und Poisson-Klammern. *Z. Naturforsch.* 7a, 207—208 (1952).

**Klein, Martin J.:** On a degeneracy theorem of Kramers. *Amer. J. Phys.* 20, 65—71 (1952).

Verf. beweist und diskutiert zwei Sätze von Kramers-Wigner über quantenmechanische Systeme unter dem Einfluß rein elektrischer Kräfte. Solche Systeme sind invariant bei  $q \rightarrow q$ ;  $p \rightarrow -p$ ;  $s \rightarrow -s$  ( $s$ : Spinkoordinaten). Die Eigenfunktionen (zu gleicher Energie)  $\psi$  von  $H = H(q, p, s)$  und  $\psi' = K\psi$  von  $H' = KHK^{-1} = H(q, -p, -s)$  sind linear abhängig, wenn das System eine gerade Anzahl von Elektronen enthält. In diesem Falle verschwindet der Erwartungswert des magnetischen Momentes. Bei ungerader Elektronen-Anzahl tritt Entartung ein. Wie diese Entartung bei tiefen Temperaturen mit dem dritten Hauptsatz in Einklang gebracht werden kann, ist noch nicht geklärt. *W. Urich.*

**Bohm, David:** A suggested interpretation of the quantum theory in terms of „hidden“ variables. I. II. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 166—179, 180—193 (1952).

I. Die üblichen Annahmen, daß die vollständige Beschreibung eines Zustandes durch eine  $\psi$ -Funktion (im Koordinatenraum) gegeben ist und daß wegen der nichtfeststellbaren Störung bei einer Messung eine statistische Deutung von  $\psi$  gefordert ist, möchte Verf. nicht als notwendige Bestandteile der ursprünglichen Theorie ansehen, sondern als Bestandteile, die nur im gewöhnlichen Bereiche (der gewöhnlichen Schrödingergleichung) gelten. Die von ihm eingeführten Parameter sind also im gewöhnlichen Bereiche „verborgene“ Parameter; in diesem Bereiche unterscheidet sich die neue Auffassung von der üblichen nur durch die Sprache (ein „quantenmechanisches Potential“ tritt an die Stelle der durch die Welleneigenschaften gegebenen Abhängigkeiten). Verf. rechnet aber damit, daß bei Abänderungen der Theorie, die bei kleinen Abständen wesentlich werden, die bisher verborgenen Parameter explizite auftreten. — II. Eine mit des Verf.'s Deutung durchgeführte Diskussion der Messung physikalischer Größen weicht im gewöhnlichen Bereich von der üblichen nicht ab, läßt aber abweichende Möglichkeiten in anderen Bereichen (etwa bei sehr kleinen Abständen) zu. *F. Hund.*

**Dugas, René:** Sur l'interprétation de la mécanique quantique à l'aide de variables cachées au sens de M. David Bohm. *C. r. Acad. Sci., Paris* 234, 1599—1601 (1952).

**Kwal, Bernard:** Mécanique géométrique non linéaire et la mécanique ondulatoire correspondante. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 508–510 (1952).

L'A. propose une mécanique non linéaire du point matériel se réduisant à la mécanique newtonienne lorsque l'énergie, l'impulsion et l'accélération ont des valeurs faibles par rapport à certaines valeurs critiques et caractérisée essentiellement par la non identité des moments  $p' = \partial L / \partial \dot{q}$  et  $p = m \dot{q}$ . — En particulier dans la mécanique définie par l'hamiltonien non linéaire

$$H(q, p') = E_c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2}{E_c} \left( \frac{1}{2m} p'^2 + V \right) \right)^{1/2} \right]$$

l'énergie et l'impulsion  $p'$  ne peuvent dépasser les limites  $E_c$  et  $(m E_c)^{1/2}$  tandis que la longueur d'onde associée au mouvement  $\lambda = h/p'$  ne peut dépasser la valeur critique  $\lambda_c = h/\sqrt{m E_c}$ . — Proposant l'équation de Schrödinger pour  $E < E_c$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta + V \right) \psi = \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\psi} + \frac{\hbar^2}{8\pi^2 E_c} \ddot{\psi}$$

l'A. examine les déplacements des niveaux d'énergie qui en résulteraient.

*G. Petiau.*

**Régnier, André, Evry Schatzman et Jean-Pierre Vigier:** Sur la répartition statistique des mouvements des particules en mécanique quantique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 410–412 (1952).

Les AA. se proposent de développer une nouvelle interprétation de la mécanique quantique dans laquelle la particule serait une singularité du type de Schwarzschild d'un champ quantique représenté par une déformation de l'espace-temps, infiniment petite, sauf pour des distances inférieures au rayon de la particule. A l'approximation linéaire de la théorie, l'ensemble déformation-singularité constitue l'onde avec singularité introduite par L. de Broglie dans sa première théorie de l'onde pilote [J. Phys. Radium **7**, 225 (1927)]. La particule, singularité du champ quantique décrit une ligne de courant du champ qui est une géodésique de l'espace-temps déformé par le champ électromagnétique et le champ quantique. Les AA. montrent que les échanges d'énergie entre le champ et la particule conduisent à une répartition initiale des probabilités qui se conserve au cours du temps et est identique à la répartition de Schrödinger.

*G. Petiau.*

**Bopp, Fritz:** Ein für die Quantenmechanik bemerkenswerter Satz der Korrelationsrechnung. Z. Naturforsch. **7a**, 82–87 (1952).

Suppose each of two quantities  $A, B$  can assume  $n$  different values:  $A = 1, 2, \dots, v, \dots, n$ ;  $B = 1, 2, \dots, \mu, \dots, n$ . Let  $W_{\mu\nu}$  be the probability that for an element of the assembly contemplated  $A = v, B = \mu$  where  $\sum_{\mu} \sum_{\nu} W_{\mu\nu} = 1$ . The author shows that it is possible to put  $W_{\mu\nu} = V_{\mu\nu} S_{\mu\nu}$  where for the matrices  $V, S$  determined respectively by the numbers  $V_{\mu\nu}, S_{\mu\nu}$

$$S' S = S S' = I, \quad V S' = S V' (= P, \text{ say}), \quad V' S = S' V (= P_0, \text{ say})$$

where  $I$  is the identity and the dash denotes a transpose. By investigating the properties of these matrices, the author shows that the mean value of a quantity  $f(\mu, \nu)$  is given by an expression which is similar in form to the mean value for Gibbs ensembles of quantum mechanical systems. The significance for quantum mechanics of this result is considered.

*P. T. Landsberg.*

**Falk, G. und H. Marschall:** Eine Bemerkung zur Auswahl der physikalisch brauchbaren Lösungen der Schrödinger-Gleichung. Z. Phys. **131**, 269–272 (1952).

Für die öfter diskutierte Frage der Eindeutigkeit der Lösungen für das Wasserstoffproblem in der Wellenmechanik geben Verff. eine klare Antwort auf Grund der Forderungen nach Normierbarkeit und Hermitizität der Operatoren. *G. Ludwig.*

**Fogel, Karl-Gustav:** On the determination of eigenvalues and eigenphase for the Yukawa potential. Ark. Fys. **4**, 573–579 (1952).

**Visconti, Antoine:** Sur certaines transformations fonctionnelles de l'équation d'évolution. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 817—819 (1952).

L'A. étend au cas des problèmes de collisions l'équation intégrale définissant l'opérateur d'évolution d'un système qu'il a introduite précédemment (ce Zbl. **43**, 424). Des transformations unitaires convenables et l'utilisation de transformées de Fourier généralisées permettent de préciser cette équation dans quelques cas particuliers. *G. Petiau.*

**Visconti, Antoine:** Sur un type de calcul opératoire applicable à la théorie des perturbations. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1252—1255 (1952).

L'A. examine les propriétés d'un opérateur intégral  $\int_{t_0}^t F(t, \tau) \{ \}$  avec  $t > t_0$  défini de telle sorte que

$$\int_{t_0}^t F(t, \tau) \{ \} V(t) = \int_{t_0}^t F(t, \tau) V(\tau) d\tau,$$

$V(t)$  étant un opérateur possédant des propriétés convenables. — Cet opérateur permet de construire une solution formelle par approximations successives de l'équation d'évolution

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t H(\tau) U(\tau, t_0) d\tau$$

et de définir formellement un calcul des perturbations. *G. Petiau.*

**Lifšic, I. M.:** Über ein Problem der Störungstheorie, das mit der Quantenstatistik zusammenhängt. Uspechi mat. Nauk **7**, Nr. 1 (47), 171—180 (1952) [Russisch].

Verf. stellt sich das Problem: Berechnung von  $Sp \{F(L + A) - F(L)\}$ ;  $L, A$  seien hermitesche Operatoren,  $A L^{-1}$  sei vollstetig,  $L$  habe ein Streckenspektrum und  $A$  sei durch  $(A g, h) = \sum_{k=1}^r \tau_k l_k(g) \overline{l_k(h)}$  mit endlichem oder unendlichem  $r$  und reellen  $\tau_k$  gegeben.  $l_k(g)$  bedeutet ein lineares Funktional,  $F(x)$  eine beliebige Funktion. Es wird gezeigt, wie die Spur, wenn sie existiert, berechnet werden kann. Als Anwendung bestimmt Verf. die Änderung der freien Energie eines unendlichen Kristallgitters bei der Temperatur  $T$ , die sich ergibt, wenn man ein Fremdatom in das Gitter bringt. *W. Urich.*

**Fabre de la Ripelle, Michel:** Résolution des équations de perturbation. I. Les amplitudes. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 412—414 (1952).

Behandlung der zeitabhängigen Störungsrechnung für zeitunabhängige Störungen mit Hilfe der Laplace-Transformation. *G. Höhler.*

**Mayot, Marcel:** Le calcul des perturbations en mécanique quantique. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 920—921 (1952).

Généralisant les résultats d'une Note précédente (ce Zbl. **39**, 225), l'A. indique un procédé de calcul du polynôme caractéristique d'une matrice dont les éléments sont des quantités algébriques dont la valeur numérique ne peut être fixée à l'avance. Le calcul s'effectue en remplaçant les termes diagonaux  $a_{ii}$  de la matrice  $a_{ij}$  par les expressions  $a_{ii} = -\left(A_i + \sum_{p \neq i} a_{ip}\right)$  et en développant le déterminant de la matrice par rapport aux  $A_i$ . Bien que les expressions obtenues contiennent plus de termes que les développements classiques des déterminants, le calcul de proche en proche est plus facile. *G. Petiau.*

**Park, David:** The scattering theory of the Schrödinger equation. Amer. J. Phys. **20**, 293—300 (1952).

**Rose, M. E. and T. A. Welton:** The virial theorem for a Dirac particle. Phys. Review, II. Ser. **86**, 432—433 (1952).



**Volz, Helmut:** Der korrespondenzmäßige Zugang zur Quantentheorie der Wellenfelder. *Z. Naturforsch.* **7a**, 70—75 (1952).

Wenn man das anschauliche nichtrelativistische Materiefeld etwa im Sinne des Hamiltonschemas als Mechanismus ansieht, so entsprechen die Phasenintegrale den Größen  $c_k^* c_k$ , die den Materieinhalt der einzelnen Eigenzustände angeben. Die Quantisierung geschieht dann mit Hilfe der Matrizen, die an die Stelle von Fourierentwicklungen treten. Im Falle der Bosestatistik haben sie unendlich viele Eigenwerte, im Falle der Fermistatistik um zwei. Daraus folgen die Vertauschungsregeln der beiden Fälle.

*F. Hund.*

**Marx, G.: Drehimpuls in der Quantentheorie der Wellenfelder.** *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **1**, 209—233 (1952).

Im Falle einer Lagrangefunktion erster Ordnung läßt sich ein symmetrischer Energie-Impuls-Tensor bilden (Rosenfeld, dies. Zbl. **24**, 378) und der Drehimpuls des Feldes läßt sich eindeutig in einen Bahn- und einen Spinanteil zerlegen. Diese Zusammenhänge werden hier auf Felder mit Lagrangefunktionen höherer Ordnung ausgedehnt.

*F. Hund.*

**Scheidegger, Adrian E. und Carlyle D. McKay:** Thermodynamische Vakuum-schwankungen der Wellenfelder. *Z. Phys.* **132**, 179-182 (1952).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit derselben Verff. (dies. Zbl. **43**, 410) werden die thermodynamischen Vakuum-schwankungen von Dirac- und Schrödinger-Gordon-Feldern berechnet. Es wird gezeigt, daß die Entstehung von Elementarteilchen durch die thermischen Schwankungen der entsprechenden Felder extrem unwahrscheinlich ist und z. B. nicht die beobachteten Mesonendichten in der kosmischen Strahlung erklären kann.

*W. Wessel.*

**Scheidegger, A. E. and C. D. McKay:** On the thermodynamics of wave fields. *Canadian J. Phys.* **30**, 117—118 (1952).

**Osborn, Richard K.: The second-quantized theory of spin- $\frac{1}{2}$  particles in the nonrelativistic limit.** *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 340—347 (1952).

Das Problem, aus der Diragleichung in nichtrelativistischer Näherung eine Gleichung für zweikomponentige Paulispinoren herzuleiten, führt bekanntlich in der zweiten Ordnung zu Schwierigkeiten (imaginärer Darwinterm im neuen „Hamiltonoperator“). Sie sind durch Becker (dies. Zbl. **39**, 226) und durch Foldy und Wouthuysen (dies. Zbl. **39**, 226) mit Hilfe einer anderen Herleitungsmethode (statt Elimination der kleinen Komponenten Anwendung geeigneter unitärer Transformationen) behoben worden. Verf. wendet diese Methode auf die quantisierte Diragleichung an. Der Fall freier Elektronen zeigt gegenüber der klassischen Theorie nichts wesentlich Neues; die relativistisch streng durchführbare Rechnung ergibt eine Aufspaltung der (transformierten) Operatoren  $\psi$  und  $H$  in einen zweikomponentigen Elektronenteil und einen zweikomponentigen Positronenteil. Ebenso kann die Bewegung der Dirac-teilchen in einem vorgegebenen äußeren Feld auf dementsprechenden klassischen Fall zurückgeführt werden, d. h., die Auftrennung in einen Elektronen- und einen Positronenteil ist bis zur beliebigen Ordnung in  $p/m$  durchführbar. Erst bei der Betrachtung der Wechselwirkung von Dirac-teilchen vermittels eines an sie gekoppelten Feldes treten zunächst Schwierigkeiten in Gestalt von zusätzlichen Gliedern in  $H$  auf. Sie konnten vom Verf. durch eine (bis zur zweiten Ordnung reichende) genauere Analyse eliminiert werden. Die Überlegungen, die darauf hinauslaufen, daß die „gemischten“ Anteile dieser nicht wegzutransformierenden Glieder in der betrachteten nichtrelativistischen Näherung vernachlässigbar sind, werden an zwei typischen Beispielen durchgeführt: Nukleonen mit pseudoskalaren Mesonen (verschiedene Fermionen) und Elektronen mit transversalen Photonen (gleiche Fermionen). — Die nichtrelativistischen Hamiltonoperatoren für pseudoskalare und pseudovektorielle Kopplung erhalten in erster Näherung der Kopplungskonstanten die gleiche Form.

*G. Süßmann.*

**Caianiello, E. R.: An argument against the Majorana theory of neutral particles.** *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 564—565 (1952).

**Hove, Léon van:** Les difficultés de divergences pour un modèle particulier de champ quantifié. *Physica* **18**, 145—159 (1952).

An Hand eines einfachen und streng durchrechenbaren Modells (neutrales skalares Feld in skalarer Wechselwirkung mit unendlich schweren, räumlich festen Punktquellen) wird untersucht, inwiefern die feldtheoretischen Divergenzschwierig-

keiten mit der Störungsrechnung zusammenhängen. Verf. beweist, daß jede Energieeigenfunktion (des gekoppelten Feldes) zu sämtlichen Energieeigenfunktionen des freien Feldes orthogonal ist, so daß eine Grundvoraussetzung der Diracschen Störungsrechnung (Entwickelbarkeit des gesuchten Zustandes nach den Eigenzuständen des ungekoppelten Systems) nicht gegeben ist. Der Grund hierfür ist in der Tatsache zu suchen, daß der (in der Besetzungszahldarstellung leicht zu renormalisierende) Hamiltonoperator (wohl hermitisch, jedoch) nicht selbstadjungiert ist: sein Definitionsbereich ist nicht überall dicht ( $H_{\text{ren}} = H - \infty$  ist natürlich nur für Besetzungen endlicher Energie definiert; alle anderen sind dazu orthogonal. In der Fockdarstellung hätte man zwar nur den Unterraum endlicher Teilchenzahl, dafür aber die Divergenzen in  $H$ ). Durch Betrachtung eines Grenzüberganges aus divergenzfreien Modellen von nur endlich vielen Freiheitsgraden wird gezeigt, daß trotzdem ein Teil der Ergebnisse der Störungsrechnung richtig sein kann. Für den Streuoperator  $S = U(-\infty, \infty)$  erhält Verf. genaue Übereinstimmung zwischen exakter und Störungsrechnung (mit Renormalisierung), nicht aber für  $U(-\infty, t)$  mit endlichem  $t$ .  
G. Süßmann.

Salecker, H.: Zur Begründung der Masse-Ladungs-Renormalisierung und ihre Anwendung auf das Maxwell-Feld. Z. Naturforsch. 7a, 381—386 (1952).

Verf. versucht eine neutrale Vektormesonen-Theorie durch Einführung der Wechselwirkung in Quantenelektrodynamik umzuwandeln, indem er die unrenormalisierte Masse entgegengesetzt gleich der Massenrenormalisation annimmt, so daß die renormalisierte Masse verschwindet. Die Theorie wird allerdings nicht so weit ausgeführt, daß man sieht, daß nirgends Schwierigkeiten auftreten. W. Thirring.

Källén, Gunnar: On the definition of the renormalization constants in quantum electrodynamics. Helvet. phys. Acta 25, 417—434 (1952).

Es wird eine Definition der Renormalisationskonstanten ohne Störungstheorie in der Heisenbergdarstellung gegeben. Sie werden durch die Bedingung festgelegt, daß die Matrixelemente der Feldoperatoren zwischen dem Vakuum und Einteilchenzuständen den entsprechenden Matrixelementen der wechselwirkungsfreien Felder gleichen. Diese Bedingungen ergeben sich physikalisch zwangsläufig und bestimmen die Renormalisationskonstanten vollständig. Es kann jedoch hier nicht gezeigt werden, daß nach Renormalisation alle Größen endlich sind. Dies wäre der Fall, wenn die Störungstheorie konvergieren würde, was aber wahrscheinlich nicht zutrifft.

W. Thirring.

Salam, Abdus: Renormalization of scalar electrodynamics using  $\beta$ -formalism. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 211, 276—284 (1952).

Eine frühere Arbeit des Verf. (Phys. Review, im Druck), welche das Renormalisationsprogramm für die Elektrodynamik von Spin 0-Teilchen durchführt, wird hier vervollständigt, indem dasselbe statt mit der Klein-Gordonschen Skalarfeldtheorie mit Hilfe der Kemmerschen  $\beta$ -Matrizen erreicht wird. Zwei charakteristische Schwierigkeiten treten auf: 1. Der  $\beta$ -Formalismus beschreibt bekanntlich sowohl Spin 0- als auch Spin 1-Teilchen. Dementsprechend ergibt die Abzählung der primitiv-divergenten Graphen zunächst deren unendlich viele, da ja die Elektrodynamik von Spin 1-Teilchen nicht renormalisierbar ist. Gewisse nur für die 5-reihige Darstellung der  $\beta$ - (d. h. nur für die Spin 0-Theorie) gültige Identitäten reduzieren dann die Zahl der primitiv-divergenten Graphen auf die fünf erwarteten: Meson selbstenergie, Photon selbstenergie, Meson-Meson-Kontaktkraft, „Vertex-Graphen“ und Compton-Streuung. 2. Die ersten drei dieser primitiv-divergenten Graphen werden, wie in den Skalarfeldtheorie, durch Renormalisation beseitigt. Dagegen sind die Vertex-Graphen hier stärker divergent als in der Skalarfeldtheorie, und die Divergenzen in den Comptonstreuungs-Graphen können nicht, wie dort, gegen andere Divergenzen kompensiert werden, welche aus dem im elektromagnetischen Feld bilinearen Anteil der Hamiltonfunktion stammen. Verf. weist nun nach, daß alle diese zusätzlichen Divergenzen sich gegenseitig kompensieren, womit auch im  $\beta$ -Formalismus die Renormalisierbarkeit der Spin 0-Elektrodynamik gezeigt ist.  
M. R. Schaafroth.

Salam, Abdus: Renormalized S-matrix for scalar electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. 86, 731—744 (1952).

Das Thema vorliegender Arbeit wurde von Rohrlich (dies. Zbl. **37**, 180) bereits behandelt. Die Arbeit geht nur insofern über Rohrlich hinaus, als die sogenannten „b-Divergenzen“ genauer untersucht werden.

*W. Thirring.*

Dyson, F. J.: Divergence of perturbation theory in quantum electrodynamics. Phys. Review, II. Ser. **85**, 631—632 (1952).

Lüders, Gerhart: Bemerkung zum Einsetzen von Selbstenergie-Graphen in äußere Linien. Z. Naturforsch. **7a**, 206—207 (1952).

Hurst, C. A.: The graphs for the kernel of the Bethe-Salpeter equation. Phys. Review, II. Ser. **85**, 920 (1952).

Elton, L. R. B. and H. H. Robertson: On the radiative correction to the Coulomb scattering of electrons. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 145—146 (1952).

Mitra, A. N.: Radiative corrections to Compton scattering and Bremsstrahlung. Nature **169**, 1009—1010 (1952).

Robl, H.: Die Polarisierung der Elektronen bei Compton-Streuung. Acta phys. Austr. **5**, 319—329 (1952).

Verf. untersucht, welcher Bruchteil einer sehr speziellen Klasse von Elektronen bei der Compton-Streuung die Spinrichtung umklappt. Die Klasse enthält alle die Elektronen, die ein unpolarisiertes Photon im Laboratoriums-System senkrecht abgestreut haben und deren Spinrichtung vor dem Stoß mit ihrer Impulsrichtung nach dem Stoß übereinstimmt. Die Umklapp-Wahrscheinlichkeit ist nur merklich, wenn Photon-Energie und Ruh-Energie des Elektrons vergleichbar werden.

*W. Urich.*

Auluck, F. C. and D. S. Kothari: Effect of electromagnetic radiation on the Lamb shift. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A. **214**, 137—142 (1952).

Kristensen, P. and C. Møller: A convergent S-matrix formalism with correspondence to ordinary quantum mechanics. Phys. Review, II. Ser. **85**, 928—929 (1952).

Fubini, Sergio: Sull'equivalenza di due definizioni della matrice S. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **12**, 298—302 (1952).

Verf. beweist die Äquivalenz der Definitionen der S-Matrix von Heisenberg auf der einen, Schwinger-Feynman-Dyson auf der anderen Seite und gibt insbesondere die Bedingungen an, unter denen  $U(\infty)$  mit dem ungestörten Energie-Operator vertauschbar ist. Die Größe der Kopplungs-Konstanten geht in den Beweis nicht ein.

*W. Urich.*

Ito, D., H. Tanaka, Y. Watanabe and M. Yamazaki: Group theoretical aspects in S-matrix theory. Progress theor. Phys. **7**, 128—130 (1952).

Chisholm, J. S. R.: Calculation of S-matrix elements. Proc. Cambridge philos. Soc. **48**, 300—315 (1952).

Verf. entwickelt eine gegenüber Dyson verbesserte Methode zur Berechnung von Elementen der S-Matrix; er berücksichtigt neben Fermion- und Photon-Feldern nur (pseudo-)skalare Meson-Felder mit (pseudo-)skalarer Kopplung. Seien  $p_1, p_2, \dots, p_m$  die 4-Impulse der äußeren Linien eines Graphen,  $k_1, k_2, \dots, k_l$  die von den  $p_i$  unabhängigen Anteile der 4-„Impulse“ der inneren Linien. Das zugehörige Matrix-Element kann auf die Form  $RJ$  gebracht werden.  $J = \int (dk_1) \int (dk_2) \dots \int (dk_l) [Q(k_1, \dots, k_l)]^{-r}$ .  $Q$  ist eine inhomogene quadratische Form in den  $k_j$  und linear in den  $p_i$ ,  $r$  die Zahl der inneren Linien,  $R$  ein von den  $p_i$ , den  $\gamma_\mu$  und den Massen abhängiger Operator. Durch eine Hauptachsentransformation von  $Q$  kann  $J$  in geschlossener Form berechnet werden und ist für alle Graphen konvergent, wenn für Selbstenergie-Teile eine von Ward gegebene Vorschrift beachtet wird. Die Form von  $R$ , die Berechnung von  $RJ$  und die dabei notwendigen Subtraktionen werden beschrieben. Am Beispiel eines Graphen fünfter Ordnung erläutert Verf. seine Methode.

*W. Urich.*



Petiau, Gérard: Sur la diffusion électromagnétique coulombienne des corpuscules de spins 0,  $\hbar/2$  ou  $\hbar$ . C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1601—1603 (1952).

Petiau, Gérard: Sur le calcul des sections efficaces de diffusion des corpuscules de spins 0,  $\hbar/2$  et  $\hbar$  par un champ mésique scalaire ou pseudoscalaire. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1749—1751 (1952).

Petiau, Gérard: Sur la représentation des systèmes d'équations d'ondes irréductibles de la théorie des corpuscules de spin quelconque. Application au calcul des sections efficaces de diffusion. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1955—1957 (1952).

Haag, Rudolf: Zur korrespondenzmäßigen Theorie der Spinwellengleichungen. Z. Naturforsch. 7a, 449—458 (1952).

L'A. examine à partir des travaux de F. Bopp et F. L. Bauer (ce Zbl. 35, 273) et de F. Bopp et R. Haag (ce Zbl. 40, 425) l'introduction des formalismes lagrangien et hamiltonien dans la théorie des corpuscules de spin quelconque définis par des équations d'ondes

$$\left[ g_\alpha \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \frac{e}{c} A_\alpha \right) + f(g) \right] \psi = 0$$

avec  $[g_\alpha, g_\beta] = -i g_{\alpha\beta}$ ,  $[g_{\alpha\beta}, g_\beta] = -i g_\alpha$ ,  $[g_{\alpha\beta}, g_{\beta\gamma}] = -i g_{\alpha\gamma}$ . L'A. montre que le choix de modèles pour les corpuscules permet de préciser les résultats auxquels conduit la théorie abstraite. Les difficultés et les complications de cette théorie des corpuscules élémentaires semblent provenir essentiellement de la nature complexe de l'opérateur de masse.

G. Petiau.

Bauer, Friedrich L.: Sur les représentations spinorielles. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1743—1744 (1952).

L'A. énonce deux théorèmes fixant le nombre de fois où apparaît une représentation  ${}^nO(m_1, m_2, \dots, m_n)$  du groupe orthogonal à  $n$  dimensions caractérisé par un tableau  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ , dans la fusion  ${}^nO(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})^N$  de  $N$  corpuscules de spin  $\frac{1}{2}$ . Ces théorèmes permettent d'obtenir directement le nombre et le type des équations d'ondes d'un ordre de fusion déterminé dans la théorie des corpuscules à spin de M. Louis de Broglie. L'A. retrouve et complète des théorèmes de M. L. Michel [J. Phys. Radium 12, 793—804 (1951)] sur le nombre des tenseurs de rang donné que l'on peut construire avec quatre fonctions d'ondes solutions d'équations de Dirac.

G. Petiau.

Le Couteur, K. J.: Factorization of the algebra of particles of half-odd spin. Proc. Cambridge philos. Soc. 48, 110—117 (1952).

Relativistische Wellengleichungen der früher (dies. Zbl. 40, 131) vom Verf. untersuchten Form  $(\alpha^\mu p_\mu - \chi) \psi(x) = 0$  mit konstantem  $\chi$  lassen für halbganzen Spin eine Faktorisierung der  $\alpha^\mu$  als direkte Produkte einer Dirac-Algebra und einer anderen ( $\xi$ -)Algebra zu. Das Verfahren beruht darauf, daß man aus dem Operator  $\eta_0$ , der die drei räumlichen Achsen spiegelt, mit Hilfe der  $I_{0k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , die die eigentlichen Lorentztransformationen vermitteln, drei weitere Größen  $\eta_k = e^{-i\frac{\pi}{2}I_{0k}} i \eta_0 e^{i\frac{\pi}{2}I_{0k}}$  ableitet. Die vier  $\eta_{jk}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , bilden für halbganzen Spin eine Dirac-Algebra:  $\eta_\mu \eta_\nu + \eta_\nu \eta_\mu = 2g_{\mu\nu}$ . Die  $\xi$ -Algebra besteht dann aus den Elementen (nicht summieren)  $\xi_\mu = \eta_\mu \alpha^\mu$  und  $\theta_{\mu\nu} = \eta_\mu \eta_\nu I^{\mu\nu}$ . Ihre Struktur und Darstellungen werden in einzelnen studiert. Die  $\xi$ -Algebren enthalten nur 1/16 soviel linear unabhängige Elemente wie die ursprüngliche Matrixalgebra. Die  $\alpha_\mu$ ,  $I_{\mu\nu}$  sind einfach die Produkte  $\xi_\mu \eta_\mu$  bzw.  $\eta_\mu \eta_\nu \theta_{\mu\nu}$  (nicht summieren).

W. Wessel.

Leenov, Daniel: Electromagnetic properties of spin-one particles. Phys. Review, II. Ser. 85, 841—849 (1952).

Pour exprimer qu'une particule de spin 1 possède un moment magnétique  $1 - \gamma$  magnéttons, l'A. ajoute à la densité de lagrangien classique (Wentzel, Quantum Theory of Fields, New York 1949, chap. III) le terme:  $\frac{1}{2} \gamma i e F_{\mu\nu} (\psi_\mu^* \psi_\nu - \psi_\nu^* \psi_\mu)$  où:  $F_{\mu\nu} = \partial\Phi_\nu/\partial x_\mu - \partial\Phi_\mu/\partial x_\nu$ ,  $\Phi_\mu$ : champ maxwellien. La section efficace, calculée par les méthodes usuelles, dépend de  $\gamma$  et peut donner aux hautes énergies des indications sur le spin et le moment magnétique. L'effet de dépolari-

sation, lorsque ces particules traversent la matière, est aussi évalué aux basses énergies. Dans une deuxième partie, l'A. étudie le méson  $\pi$  comme formé de deux mésons  $\mu$  en se référant à une théorie due à Wentzel (ce Zbl. 41, 129). Après l'avoir distinguée d'une théorie analogue de Fermi et Yang (ce Zbl. 36, 273) (Noter que L. de Broglie, ce Zbl. 42, 216, 2ième analyse, étudie également la structure complexe des particules), l'A. envisage le cas où le couplage entre mésons  $\mu$  est l'un de ceux de la théorie du rayonnement  $\beta$ , précise que la théorie n'est pas présentée sous forme covariante et qu'une méthode de coupure est utilisée, d'où le caractère qualitatif des résultats. Il calcule pour une particule vectorielle le moment magnétique (qui correspond à  $\gamma = 1/2$ ); puis la valeur quadratique moyenne du rayon de distribution de la charge, son moment quadrupolaire pour divers types de couplage et conclut par l'étude de la diffusion des  $\pi$  par un potentiel coulombien, leur dissociation en  $\mu$  et les possibilités effectives de mesure fournies par la théorie.

A. Visconti.

**Valatin, Jean G.:** Sur la quantification de la nouvelle théorie classique de Dirac. I. II. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 64—67, 188—190 (1952).

Bemerkungen zu einer neuen Theorie von Dirac (dies. Zbl. 43, 428). Verf. stellt die auch von Schrödinger (nachsteh. Ref.) und dem Ref. untersuchte Verbindung zur klassischen Wellentheorie der Materie her und diskutiert die Schwierigkeiten, die sich beim Übergang zur Hamiltonschen Formulierung und bei der Quantelung ergeben.

G. Höhler.

**Schrödinger, Erwin:** Dirac's new electrodynamics. Nature 169, 538 (1952).

Verf. diskutiert den Zusammenhang der neuen Diracschen Theorie mit der relativistischen Wellengleichung für skalare Materie.

G. Höhler.

**Le Couteur, K. J.:** Dirac's new electrodynamics. Nature 169, 146—147 (1952).

Verf. diskutiert die bereits von Dirac behandelte Frage des Athers in der neuen Diracschen Elektrodynamik (dies. Zbl. 43, 428), gibt den Energie-Impulstensor an und betrachtet einige einfache Lösungen.

G. Höhler.

**Tyabji, S. F. B.:** The energy momentum tensor in Dirac's new electromagnetic theory. Nature 170, 116—117 (1952).

**Kompaneec, A.:** Über die neue Formulierung der Elektrodynamik von Dirac. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 873—875 (1952) [Russisch].

Verf. untersucht im Rahmen der neuen Diracschen Theorie (dies. Zbl. 43, 428) das Verhalten einer positiven Raumladung von kugelförmiger Gestalt, die anfangs in Ruhe ist. Insbesondere weist er auf das Auftreten einer nichtphysikalischen Lösung hin.

G. Höhler.

**Born, Max:** Dirac's new theory of the electron. Nature 169, 1105 (1952).

**Lüders, Gerhart, Reinhard Oehme und Walter E. Thirring:**  $\pi$ -Mesonen und quantisierte Feldtheorien. Z. Naturforsch. 7a, 213—234 (1952).

Bericht.

**Umezawa, Hiroomi, Yasushi Takahashi and Susumu Kamefuchi:** Mesonic proper-field. Phys. Review, II. Ser. 85, 505—516 (1952).

Die Verf. geben in dieser Arbeit eine allgemeine quantentheoretische Behandlung des Problems der ein Nukleon umgebenden Mesonenwolke. Unter Verwendung einer Heisenberg-Darstellung und der Schwinger-Tomonaga-Methodik wird ein Spektraloperator definiert, der — vermittels der Feldoperatoren des freien Mesonfeldes — die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, eine bestimmte Zahl von Mesonen in einem gewissen Punkt auf einer raumartigen Oberfläche zu finden. Außerdem wird eine zugehörige Spektraldichte definiert. Die Rechnungen werden im einzelnen mit spinlosen Mesonen in skalarer und vektorieller Kopplung (stark und schwach) durchgeführt und führen zu Ergebnissen, die in spezieller Form schon von anderen Autoren aufgefunden wurden. So wird die Gesamtenergie des Systems Nukleon-Mesonwolke berechnet — ferner auch die Selbstenergie des Nukleons —, was nach gewissen Vereinfachungen zu speziellen bekannten Ergebnissen führt. Weiter wird in Anlehnung an Pauli-Dancoff ein spezielles Spektrum (mit starker Kopplung) durchgerechnet. Schließlich wird die neue allgemeine Methode auf

experimentelle prüfbare Probleme angewandt: die mehrfache Mesonenproduktion (die sich als verallgemeinertes Ergebnis nach Bloch-Nordsieck herausstellt) und die Berechnung des magnetischen Nukleonmomentes. Es wird für Poissonsche Verteilung der Mesonenemission die Wahrscheinlichkeit für die Produktion von  $n$  Mesonen in einem Nukleon-Nukleon-Stoß berechnet und im Anhang für ein asymptotisches Spektrum  $\sim k^{-1/2}$  als wahrscheinlichste Emissionszahl  $\sim E_{\max}^{2/3}$  gefunden. Für das magnetische Moment ergibt sich allgemein für Proton und Neutron derselbe Absolutbetrag und in spezieller Näherung ein schon von Pauli und Dancoff gefundenes Ergebnis. *F. Cap.*

**Matthews, P. T. and Abdus Salam:** The intermediate coupling theory of the pseudoscalar meson-nucleon interaction. Phys. Review, II. Ser. 86, 715—726 (1952).

S. Tomonaga [Progress theor. Phys. 2, 6 (1947)] a développé une théorie dite de couplage intermédiaire dans le cas d'un nucléon libre environné d'un nuage mésique de type scalaire et en négligeant les effets de reculs. Les AA. étendent cette théorie au cas d'un nucléon libre et d'un champ mésique neutre pseudoscalaire en tenant compte d'une façon non relativiste des reculs. L'hamiltonien est décomposé en deux parties dont la principale peut être traitée exactement par une méthode de Glauber et Luttinger tandis que la seconde est considérée comme une perturbation développée sur le système de base des fonctions solutions exactes de la première partie. Les calculs effectués d'abord dans le cas où il n'y a pas de paires de mésons est ensuite étendue au cas où une seule paire de méson intervient. Une solution peut encore être obtenue et les AA. la comparent à celle correspondant au cas du faible couplage. — Les résultats obtenus dépendent de la coupure introduite pour éliminer les intégrales divergentes associées aux énergies propres. Les AA. considèrent ces calculs comme préliminaires et susceptibles d'amélioration mais néanmoins ceux-ci indiquent que même pour  $f^2/4\pi \sim 10$ , le développement utilisé dans la théorie du faible couplage après renormalisation donne une image faiblement convergente mais non totalement déformée du nuage mésique entourant un nucléon dans le cas de l'interaction pseudoscalaire. *G. Petiau.*

**Wentzel, G.:** Pion-proton scattering and the strong coupling meson theory. Phys. Review, II. Ser. 86, 437—439 (1952).

Unter Verwendung der pseudoskalaren geladenen symmetrischen Mesonentheorie der Kernkräfte wird mit der Annahme starker Kopplung der Wirkungsquerschnitt für die Streuung von  $\pi$ -Mesonen an Protonen abgeleitet für Mesonenenergien unterhalb und bei Energiewerten von angeregten Nukleonenzuständen. Unter Annahme eines isobaren Zustandes des Nukleons gelingt es, die im Vergleich zu negativen  $\pi$ -Mesonen 3 mal so starke Streuung positiver  $\pi$ -Mesonen zu erklären. Die kürzlich entdeckte bevorzugte Rückwärtsstreuung kann jedoch nur unter Hinzunahme einer  $S$ -Streuung erklärt werden, während der Hauptteil der Arbeit unter der Annahme reiner  $P$ -Streuung (also Vernachlässigung des Nukleonenrückstoßes-statistische Behandlung) ausgeführt wurde. Es scheint aber, daß die Hinzunahme der  $S$ -Streuung in anderer Weise die Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment wieder verschlechtert. *F. Cap.*

**Brueckner, Keith A.:** Meson-nucleon scattering and nucleon isobars. Phys. Review, II. Ser. 86, 106—109 (1952).

Die experimentellen Untersuchungen über die Streuung von  $\pi^-$ -Mesonen in Wasserstoff haben gezeigt, daß der Wirkungsquerschnitt mit zunehmender Mesonenenergie zwischen 60 und 200 MeV sehr rasch anwächst und daß die Streuung der  $\pi^-$ -Mesonen bei 60 MeV erheblich schwächer ist, als die der  $\pi^+$ -Mesonen. Die Zunahme des Wirkungsquerschnittes mit wachsender Energie läßt sich, abgesehen von dem Maximum bei 200 MeV, qualitativ an Hand der pseudoskalaren Theorie mit schwachem pseudovektoriellen Kopplungsansatz verstehen. Allerdings gilt dies nicht für das anormale Streuungsverhältnis von  $\pi^-$ - und  $\pi^+$ -Mesonen. Verf.



gibt eine theoretische Behandlung an Hand der phänomenologischen Theorie von Wigner und Eisenbud, die durch ein geeignetes Abschneideverfahren die Schwierigkeiten der pseudoskalaren Mesontheorie mit starker pseudovektorieller Kopplung vermeidet, die jedoch die „Resonanzphänomene“ der starken vektoriellen Kopplung berücksichtigt. Entnimmt man die Parameter des Resonanzniveaus der pseudoskalaren Theorie, so ergibt sich befriedigende Übereinstimmung mit den Experimenten. Es wird angenommen, daß das anormale Verhalten des Streuquerschnitts in diesem Sinne auf eine Resonanzwechselwirkung zwischen den Mesonen und einem isobaren Nukleon zurückzuführen ist, welches den Spin  $3/2$ , den Isotopen Spin  $3/2$  und eine Anregungsenergie von 277 MeV hat. *G. Ecker.*

**Pais, A.:** Some remarks on the  $V$ -particles. Phys. Review, II. Ser. 86, 663—672 (1952).

Unter der Annahme von zwei Arten von  $V$ -Mesonen, nämlich eines Fermions der Masse 2200 und eines Bosons der Masse 800 (skalar und pseudoskalar) werden verschiedene Wechselwirkungsansätze mit Nukleonen und  $\pi$ -Mesonen systematisch untersucht. Es zeigt sich, daß die reiche  $V$ -Mesonenproduktion bei Annahme eines anderen schweren instabilen Teilchens trotz der merkwürdig langen Halbwertszeit der  $V$ -Partikel erklärt werden kann. Auch die Dissymmetrie in der  $V$ -Mesonenproduktion zwischen geladenen und ungeladenen Partikeln kann zum Teil theoretisch gedeutet werden. Abschließend wird unter ausgiebigem Gebrauch der Dyson-Graphen der Zerfallsmechanismus der  $V$ -Partikel besprochen, wobei auch Prozesse mit  $\mu$ - und  $\tau$ -Mesonen betrachtet werden. *F. Cap.*

**Michel, Louis et Raymond Stora:** Spectre d'énergie des mésons  $\mu$  provenant de la désintégration des mésons  $\kappa$ . C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1257—1258 (1952).

**Ioffe, B. und A. Rudik:** Über den Zerfall eines  $\pi$ -Mesons. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 359—360 (1952) [Russisch].

Beim Zerfall von  $\pi$ -Mesonen wurden wiederholt  $\mu$ -Mesonen ungewöhnlich niedriger Energie beobachtet. Verf. führen dies auf zusätzliche Emission eines Photons beim Zerfall eines  $\pi$ -Mesons in ein  $\mu$ -Meson und ein Neutrino zurück und berechnen die differentiellen Wahrscheinlichkeiten für diesen Prozeß. *E. Gora.*

**Oehme, Reinhard:** Zerfall neutraler Mesonen. Z. Naturforsch. 7a, 55—60 (1952).

Die Zufallsmöglichkeiten neutraler Mesonen ( $\pi^0$ ) werden untersucht, im Hinblick auf möglichst allgemeine und von der Kopplungskonstanten Nukleon-Meson unabhängige Aussagen darüber, welcher der möglichen Prozesse ( $\pi^0 \rightarrow e^+ + e^-$ ,  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ ,  $\pi^0 \rightarrow 3\gamma$ ) der wahrscheinlichste ist. Es zeigt sich, daß — sofern man der feldtheoretischen Störungstheorie irgendwelchen Sinn beimessen kann — für Spin 0-Mesonen der Zerfall in zwei (ev. auch drei)  $\gamma$ -Quanten, für Spin 1 der Zerfall in ein Elektron-Positron-Paar überwiegen muß. Experimentell ist der letztere bisher nicht gefunden worden; es besteht also keine Evidenz für die Existenz neutraler Spin 1-Mesonen. *M. R. Schafroth.*

**Malenka, B. J.:** Nonlinearities resulting from vacuum polarization in meson-nucleon interactions. Phys. Review, II. Ser. 85, 686—687 (1952)

**Eder, Gernot:** Höhere Näherungen zum Potential zwischen Nukleonen. Acta phys. Austr. 5, 404—413 (1952).

Verf. berechnet nach der Methode von Dyson die Matrix-Elemente zweiter und vierter Ordnung für die Streuung eines Nukleons an einem Nukleon und vergleicht sie in nichtrelativistischer Näherung mit dem Matrix-Element für Einfachstreuung eines Nukleons an einem äußeren Potential. Der Berechnung ist ein vektorielles Mesonfeld zugrunde gelegt, der Wechselwirkungsansatz umfaßt die symmetrische, geladene und neutrale Theorie. Nach Renormierung der Mesonmasse und der Kopplungskonstanten wird ein Ausdruck für das Nukleon-Nukleon-Potential angegeben. *W. Urich.*

Wentzel, Gregor: Bemerkungen zur skalaren Paartheorie. Helvet. phys. Acta 25, 569—576 (1952).

Vrkljan, Vladimir Srećko: Quelle est la formule de l'analogie du vecteur de Poynting pour le champ des mésons scalaires et pseudoscalaires? C. r. Acad. Sci., Paris 234, 301—303 (1952).

Der Ausdruck für die Energiestromdichte des skalaren (und pseudoskalaren) Mesonenfeldes wird abgeleitet. *R. Haag.*

Rosen, Nathan and Herbert B. Rosenstock: The force between particles in a nonlinear field theory. Phys. Review, II. Ser. 85, 257—259 (1952).

Les AA. déterminent la force qui s'exerce entre deux particules dans une théorie de champ non linéaire représenté par une fonction scalaire complexe  $\psi$  dont le comportement est décrit par la densité de lagrangien

$$L = - \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi^*}{\partial x^i} - \sigma^2 \psi \psi^* + \frac{1}{2} g \psi^2 \psi^{*2}$$

où  $\sigma^2$  et  $g$  sont des constantes. Par l'emploi d'un principe variationnel on obtient l'équation d'évolution

$$(\square^2 - \sigma^2) \psi + g \psi^2 \psi^* = 0.$$

En utilisant des résultats antérieurs de Finkelstein, LeLevier et Ruderman (ce Zbl. 43, 216), on montre qu'il existe des solutions à symétrie sphérique, partout analytiques et tendant exponentiellement vers zéro à l'infini, susceptibles de représenter un corpuscule (énergie définie positive). — Examinant l'interaction entre deux particules éloignées (ce qui permet approximativement de considérer la somme de deux solutions comme une solution) on obtient une énergie potentielle d'interaction du type de Yukawa,  $V(R) = -8\pi A^2 g^{-1} [e^{-\alpha R}/R]$ ,  $\alpha^2 = \sigma^2 - \omega^2/c^2$ ,  $A$  et  $\omega$  constantes. — Les AA. indiquent qu'une discussion de la méthode utilisée montre que le résultat obtenu reste valable pour des lagrangiens plus généraux pour lesquels il existe une solution du type corpuscule (densité localisée décroissant ensuite suffisamment vite), notamment pour ceux dans lesquels le terme en  $g$  serait de la forme  $g(\psi \psi^*)^n$ , pour  $n > 1$ . *G. Petiau.*

Blochinev, D.: Über die Ausbreitung von Signalen in der nichtlinearen Feldtheorie. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 82, 553—556 (1952) [Russisch].

Es wird zunächst die allgemeinste relativistisch invariante nichtlineare Gleichung zweiter Ordnung für eine skalare Wellenfunktion untersucht. Die Theorie der Charakteristiken zeigt, daß sich die Anfangswerte der Wellenfunktion im Prinzip auch mit einer Geschwindigkeit fortpflanzen können, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Es besteht weiter die Möglichkeit, daß in gewissen Raum-Zeit-Gebieten die Differentialgleichung auch in bezug auf die zeitliche Variable vom elliptischen Typus wird. In solchen Raumzeitgebieten ist der Begriff der Kausalität nicht mehr sinnvoll. Derselbe Tatbestand wird auch bei der allgemeinsten nichtlinearen Elektrodynamik festgestellt. Daraus schließt Verf., daß bei der Quantisierung solcher Gleichungen der übliche Hamilton-Formalismus nicht mehr anwendbar ist. *W. Glaser.*

Broglie, Louis de: Sur les relations entre les coefficients de charge et de masse dans la théorie du champ soustractif. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 1505—1507 (1952).

Louis de Broglie a introduit dans des publications antérieures [ce Zbl. 38, 133 et C. r. Acad. Sci., Paris 232, 1269 (1952)] sous la dénomination de théorie du champ soustractif une nouvelle représentation physique des interactions entre corpuscules et champs permettant d'éliminer les difficultés de divergence rencontrées par la théorie quantique des interactions. — Dans cette théorie, l'électron ponctuel est couplé par  $n$  coefficients de charges  $\varepsilon_i$  avec  $n$  champs de corpuscules de spin 1, photons et mésons, possédant des masses propres  $\mu_i$  convenables. Les charges  $\varepsilon_i$  satisfont à la relation  $\sum_i \varepsilon_i = 0$ . — Désignant par  $A_{\lambda}^{(i)}$ ,  $j_{\lambda}^{(i)}$  les composantes du

potentiel-vecteur du  $i^{\text{ème}}$  champ et du courant particulaire correspondant, par  $A_\alpha$  et  $J_\alpha$  les composantes du potentiel et du courant total (somme pondérée des  $j_\alpha^{(i)}$ ), on montre que pour déduire sans divergence l'équation  $\prod_{i=1}^n (\square + k_i^2) A_\alpha = K J_\alpha$  des relations  $(\square + k_i^2) A_\alpha^{(i)} = j_\alpha^{(i)}$ , ( $k_i = \mu_i c/\hbar$ ), il faut imposer, pour  $n > 2$ , aux  $\varepsilon_i$  et aux  $\mu_i$ , l'ensemble des  $n - 1$  conditions  $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mu_i^{2(p-2)} = 0 \quad 0 \leq p \leq n$ .

G. Petiau.

Groschwitz, E.: Beiträge zur Feldmechanik. Z. Naturforsch. 7a, 458—465 (1952).

L'A. discute les caractères de la fonction de structure introduite par F. Bopp dans son électrodynamique généralisée (ce Zbl. 24, 143; 28, 280) et notamment les conditions du développement en série de cette fonction de structure ainsi que les possibilités d'associer ainsi un rayon aux corpuscules chargés. L'A. examine également les possibilités d'interprétation de cette électrodynamique généralisée par une microstructure et des mouvements internes dans la particule électrisée.

G. Petiau.

Slansky, Serge: Sur le champ soustractif et le rayon de l'électron. C. r. Acad. Sci., Paris 234, 602—604 (1952).

L'A. calcule l'énergie propre électromagnétique d'un corpuscule chargé électriquement et portant un moment magnétique intrinsèque à partir de deux modèles de théorie de champ soustractif. Le premier conduit à une énergie propre divergente. Dans le second où le corpuscule est remplacé par une distribution de charge électrique et de moment magnétique répartie sur une sphère de rayon  $r_0$ , la condition  $W \leq m_0 c^2$  conduit à un rayon  $r_0 > 10^{-11}$  cm.

G. Petiau.

Molmud, Paul: The equation of motion of the Landé electron. Phys. Review, II. Ser. 85, 139—140 (1952).

Lehmann, H. und H. Steinwedel: Avancierte und retardierte Lösungen verallgemeinerter Feldgleichungen. Z. Naturforsch. 7a, 204—205 (1952).

Steinwedel, H.: Zur Massenstabilität des Elektrons in linearen Verallgemeinerungen der klassischen Elektrodynamik. Z. Naturforsch. 7a, 205—206 (1952).

Steinwedel, Helmut: „Runaway-solutions“ und Quantenelektrodynamik. Z. Naturforsch. 7a, 292—293 (1952).

Freistadt, Hans: L'hypothèse d'un intervalle fondamental et les théories de Darling et Born. C. r. Acad. Sci., Paris 235, 23—25 (1952).

Süßmann, G.: Die spontane Lichtemission in der unitären Quantenelektrodynamik. Z. Phys. 131, 629—662 (1952).

Das Problem vorliegender Arbeit ist, zu untersuchen, wie sich die spontane Lichtemission in der Ludwigschen sogenannten divergenzfreien Elektrodynamik erklären läßt. Letztere Theorie besteht darin, daß man in gekoppelten Maxwell-Dirac-Gleichungen das elektromagnetische Feld durch eine Green-Funktion und den Diracschen Strom ausdrückt und in die Dirac-Gleichung einsetzt. Quantisiert man diese Theorie, dann erhält man das quantentheoretische Analogon zur bekannten Wheeler-Feynmanschen Elektrodynamik. Wie leicht einzusehen, kann in dieser Theorie ein Elektron allein kein Lichtquant emittieren, sondern es muß noch ein Absorber vorhanden sein, der das Lichtquant wieder absorbiert. In der Arbeit wird nun mit der für eine Dissertation charakteristischen Ausführlichkeit das zu vermutende Resultat abgeleitet, daß man bei geeigneter Wahl des Absorbers den richtigen Wert für die Emissionswahrscheinlichkeit aus dieser Theorie herausbekommt.

W. Thirring.

Tharrats Vidal, Jésus M.: Sur un schéma de l'électron. J. Phys. Radium 13, 283—288 (1952).

Verf. versucht durch Einführung eines komplexen Raumes  $z = x + i y$ , wo



nur die  $x$ -Richtung beobachtbar sei, ein klassisches Modell eines punktförmigen Elektrons mit endlicher Selbstenergie, räumlich verteilter, unsymmetrischer Ladungsdichte über die Entfernung des klassischen Elektronenradius, zu geben. Die unsymmetrische Ladungsdichte führt zu zwei „Spinzuständen“; die Umkehrung der Achsen führt zum Positron. Die komplexe Ladungsdichte, die zur Coulombkraft führt, ist durch  $\varrho(z) = \frac{i}{2\pi} \left( \frac{m c^2}{e} + \frac{e}{z} \right)$  gegeben; hieraus folgt auch für die Selbstenergie  $m c^2$ . Schließlich wird eine „Unsicherheitsrelation“ für Ortskoordinate und Ladungsdichte angegeben. F. Cap.

Scherrer, W.: Wirkungsprinzipien zur Feldtheorie der Materie. Helvet. phys. Acta 25, 501—504 (1952).

Olsen, Haakon: Further remarks on the synchrotron radiation. Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 1, 1—4 (1952).

March, A.: Der Raum in der Mikrophysik. Studium generale 5, 338—342 (1952).

Verf. diskutiert die Frage der Anwendbarkeit unserer Raumvorstellungen auf die Elementarteilchen-Theorien. G. Süßmann.

Newton, T. D.: The collision matrix for the compound nucleus. Canadian J. Phys. 30, 53—69 (1952).

Die von Wigner und Eisenbud angegebene Matrix, welche die Prozesse beherrscht, die mit der Bildung des Bohrschen Zwischenkerns verknüpft sind, wird unter der Annahme, daß die Kerndichte von der Art und Weise, in welcher, und von dem Wege, auf welchem der Zwischenkern gebildet worden ist, unabhängig ist, ausgewertet. Für den Spezialfall der Resonanz erhält man die übliche Breit-Wignersche Formel für den Wirkungsquerschnitt, im allgemeinen Fall eine Form, die nur von einer unbestimmten Parameterfunktion der Energie:  $\tau(E)$  abhängt, welche die Phasenverschiebung infolge der Kernreaktion zu charakterisieren gestattet. Th. Sexl.

Kronenberg, Stanislaus: Herleitung der Kerndispersionsformel aus der Theorie der erzwungenen, gedämpften Kernschwingungen. Acta phys. Austr. 5, 341—348 (1952).

Verf. bestimmt den Kernwirkungsquerschnitt für den Einfang bzw. die anormale Streuung geladener Partikel. Das Verfahren stellt eine Erweiterung der von Sexl gegebenen Ableitung der Dispersionsformel an Hand der Guth-Sexlschen Theorie unter Berücksichtigung der gedämpften erzwungenen Kernschwingungen dar. Ausgehend von der zeitabhängigen Schrödingergleichung lassen sich die Wirkungsquerschnitte  $Q_e^i$  (Einfang) und  $Q_s^i$  (anormale Streuung) bei vorgegebenem Drehimpuls unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen für  $\psi$  und  $\partial\psi/\partial x$  an der Oberfläche des Kernes mit Hilfe der Energieresonanzstellen und den Übergangswahrscheinlichkeiten des Zwischenkernes formulieren. Die Berechnung des Gesamtwirkungsquerschnittes setzt die Ausführung der Summation  $\sum_i Q_e^i + Q_s^i$  voraus. G. Ecker.

Flügge, S. und K. Woeste: Der Atomkern als kompressibler Tropfen. I. Der Atomkern im Grundzustand. Z. Phys. 132, 384—398 (1952).

Das Tröpfchenmodell des Atomkernes hat in seiner ursprünglichen Form den wesentlichen Mangel, daß es das Kernmaterial als inkompressible Flüssigkeit behandelt. Verf. berücksichtigen die Kompressibilität und die Möglichkeit der gegenseitigen Verschiebung von Neutronen- und Protonenflüssigkeit, indem sie zu der Bindungs-, der Oberflächen- und der Coulombenergie zwei Glieder hinzufügen, die der Kompression und der unsymmetrischen Verteilung von Neutronen und Protonen Rechnung tragen. Die Bestimmung des kleinsten Energieinhaltes unter der Nebenbedingung konstanter Protonen- und Neutronenzahl ergibt eine Zunahme von Neutronen- und Protonendichte zum Rand des Kernes hin. Der Druck nimmt von innen nach außen ebenfalls zu. Für  $Z > 36$  entsteht im Kerninnern sogar eine

Zugspannung, die für die Elemente an der oberen Grenze des periodischen Systems so stark wird, daß der mittlere hydrostatische Druck im Kerninnern verschwindet. Die Zunahme der Protonendichte zur Kernoberfläche hin erklärt sich aus der Coulombschen Abstoßung. Die höhere Neutronendichte kommt dadurch zustande, daß zur Trennung von Protonen- und Neutronenflüssigkeit mehr Energie erforderlich wäre, als zur Kompression. Nach der vorliegenden Rechnung sind die Kernradien nicht mehr streng proportional zu  $\sqrt[3]{A}$ , sondern wachsen etwas schneller an. Auch hinsichtlich der Bindungsenergie ergeben sich Korrekturen, die jedoch am Gang des Massendefektes nichts Wesentliches ändern.

G. Ecker.

Lüders, Gerhart: Zum Spektrum der Verdampfungsneutronen. Z. Naturforsch. **7a**, 39—43 (1952).

Nach Weißkopf (dies. Zbl. **17**, 141) besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Energiespektrum der aus einem angeregten Atomkern austretenden Neutronen und der Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für den inversen Vorgang der Neutroneneinfangung. — Der letztere wird hier für ein Modell berechnet, in welchem der Kern durch ein Neutronenwellen absorbierendes Medium ersetzt wird. Der Kernrand wird dabei in Anlehnung an eine Arbeit von Weizsäcker (dies. Zbl. **12**, 235) „ausgeglättet“. Es zeigt sich, daß oberhalb einer Energie von etwa  $\frac{1}{2}$  MeV mit der üblichen Annahme  $\sigma = \text{const}$  gerechnet werden darf. Nur unterhalb dieser Energie sind also auch im Spektrum der Verdampfungsneutronen Unterschiede zu erwarten. Diese werden speziell für den Pb-Kern diskutiert.

H. Volz.

Pfirsch, D.: Der Gang der Kernquadrupolmomente mit der Nukleonenzahl. Z. Phys. **132**, 409—428 (1952).

Die Ladungsverteilung der Protonen in einem kugelsymmetrischen Kern vermag die großen Kernquadrupolmomente, wie sie beispielsweise bei gewissen Isotopen der seltenen Erden auftreten, nicht zu erklären. Eine modellmäßige Theorie von Rainwater ohne Berücksichtigung des Spins hat gezeigt, daß normalerweise die deformierte Form des Kernes energetisch günstiger ist, als die kugelsymmetrische Gestalt. Im Anschluß an diese Überlegungen gibt Verf. eine genauere Theorie unter Berücksichtigung der starken Spinbahnkopplung nach dem Ansatz von H. Gaus. Für den Potentialverlauf im Kerninnern werden ebenso wie für die Abhängigkeit des Parameters der Exzentrizität vereinfachende Annahmen gemacht, so daß bei den großen Kernen Abweichungen zu erwarten sind. Für die Deformation (Abplattung oder Verlängerung) sind die Nukleonen in nicht vollbesetzten Schalen verantwortlich. Neben der durch die Exzentrizität bedingten Energieeigenwertstörung erster Ordnung spielen die höheren Ordnungen und die Anteile der Coulombschen Energie, sowie der Oberflächenspannung für die Deformation nur eine untergeordnete Rolle. Die Kernquadrupolmomente werden für die verschiedenen Konfigurationen der Nukleonen tabelliert und es zeigt sich, daß die empirischen Werte Konfigurationen zugeordnet sind, die im Bereich des Einteilchenmodells mit starker Spinbahnkopplung liegen. Die Schwankung des Quadrupolmomentes mit der Nukleonenzahl ergibt sich in Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund.

G. Ecker.

Talmi, Igal: Nuclear spectroscopy with harmonic oscillator wave-functions. Helvet. phys. Acta **25**, 185—234 (1952).

Das Oszillatorpotential für zwei (zunächst unabhängige) Nukleonen erlaubt eine Separation in Schwerpunkts- und Relativ-Koordinaten:

$$\frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}(r_1^2 + r_2^2) = \frac{P^2}{4m} + 2m\omega^2 R^2 + \frac{p^2}{m} + \frac{m\omega^2 r^2}{4}$$

mit  $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_2 + \vec{r}_1)$ ,  $\vec{r} = (r_2 - r_1)$ ,  $\vec{P} = \vec{p}_2 + \vec{p}_1$ ,  $\vec{p} = \frac{1}{2}(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$ . Die zugehörigen Wellenfunktionen  $u(1)v(2) \pm v(1)u(2)$  kann man dann auf Funktionen der

Koordinaten  $\vec{R}$  und  $\vec{r}$  zurückführen. Dadurch werden die in der Berechnung der Energien von Zuständen mehrerer Nukleonen auftretenden Integrale, wie

$$\iint u^*(1) v^*(2) V(1, 2) u(1) v(2) d\tau_1 d\tau_2,$$

leichter berechenbar ( $V$  hängt ja nur von Relativkoordinaten ab), insbesondere können nichtzentrale Kräfte und Spinbahnkopplung verhältnismäßig einfach berücksichtigt werden. Als Beispiele werden die Konfigurationen  $(d_{5/2})^3$ ,  $(f_{7/2})^3$  und  $(g_{9/2})^3$  untersucht; die energetische Reihenfolge erweist sich nicht nur als von der Reichweite, sondern auch als von der Form der Kräfte abhängig. Weiter wird die von der Spinbahnkopplung herrührende Aufspaltung betrachtet und die tiefsten Zustände von  $\text{Li}^7$  (auch mit Tensorkräften) diskutiert. *F. Hund.*

**Chaudhury, M. L.:** On the new theory of alpha-decay. *Indian J. Phys.* **26**, 186—196 (1952).

**Iha, S. and G. P. Dube:** On the calculation of alpha-decay energies. *Indian J. Phys.* **26**, 15—27 (1952).

**Kanazawa, Hideo:** The saturation property of nuclear forces. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 428 (1952).

**Endt, P. M.:** Statistical errors of coefficients of experimental angular distributions expanded into spherical harmonics. *Physica* **18**, 421—422 (1952).

**Cox, J. A. M. and H. A. Tolhoek:** The angular correlation of two gamma quanta emitted by aligned radioactive nuclei. *Physica* **18**, 359—360 (1952).

**Tolhoek, H. A. and J. A. M. Cox:** Angular distribution and polarization of gamma radiation emitted by aligned radioactive nuclei. *Physica* **18**, 357—358 (1952).

**Bhatia, A. B., Kun Huang, R. Huby and H. C. Newns:** Angular distribution in  $(d, p)$  and  $(d, n)$  reactions. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **43**, 485—500 (1952).

**Padfield, D. G.:** The range of tensor forces in the deuteron ground state. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **65**, 309—320 (1952).

**Rubinow, S. I.:** Triton binding energy by a randomized netpoint method. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 388—390 (1952).

Die Schrödingergleichung wird durch eine Methode näherungsweise gelöst, welche vielfach für die Lösung der Potentialgleichung bei elektrischen Problemen angewandt wird. Als Beispiel wird die Bindungsenergie der Tritons berechnet. Das Resultat ist in Übereinstimmung mit Ergebnissen von Irving, nach welchen sich theoretisch für leichte Kerne eine zu große Bindungsenergie ergibt. Dies zeigt, daß ein naives Kernmodell mit gewöhnlichen Kräften zwischen Nukleonenpaaren zum Scheitern verurteilt ist. *W. Thirring.*

**Villars, Felix:** Exchange current effects in the deuteron. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 476—483 (1952).

Der Ladungstausch zwischen zwei Nukleonen in einem Atomkern erzeugt einen Austauschstrom, der Anlaß für das Auftreten von elektromagnetischen Wechselwirkungstermen ist. Die Wirkung dieser Wechselwirkungsterme verschwindet, wenn man den Rückstoß der Nukleonen bei der Mesonenemission vernachlässigt, also ein unendlich schweres Nukleon annimmt. Geht man von dieser Annahme ab, dann müssen die dann gegenüber dem Austausch von Proton und Neutron usw. unsymmetrisch werdenden Ausdrücke für die Austauschströme berücksichtigt werden. Es kann dann z. B. das elektrische Quadrupolmoment nicht mehr nach der üblichen Formel berechnet werden. Unter Verwendung von pseudoskalaren geladenen Mesonen berechnet Verf. die Änderung des Quadrupolmoments (QPM) und des magnetischen Moments des Deuterons im Grundzustand. Es zeigt sich, daß das QPM nicht mehr durch die  $S$ - und  $D$ -Wellenfunktionen ausgedrückt werden kann; die Zusatzterme sind von der Größenordnung 7% des experimentellen Wertes des QPM. Infolge dieser Änderung wird es schwierig, mit Hilfe der experimentellen Deuterondaten die Parameter der phänomenologischen Kernkrafttheorien zu be-



stimmen. Diese Verhältnisse werden an Hand eines phänomenologischen Ansatzes diskutiert. Die Änderung des magnetischen Momentes wird nicht numerisch berechnet.

*F. Cap.*

**Kynch, G. J.: The two-body scattering problem with non-central forces. I. Non-relativistic. II. Relativistic.** Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 83—93, 94—101 (1952).

**I.** Für den Realteil der Schrödingergleichung  $\frac{d}{dr} \left\{ p(r) \frac{du}{dr} \right\} + q(r) \cdot u = 0$  wird aus zwei linear unabhängigen Lösungen  $u_1(r)$  und  $u_2(r)$  der Lösungsansatz  $u = (u_1 + u_2 S(r)) - a(r)$  für die „gestörte“ Gleichung  $\frac{d}{dr} \left\{ p \frac{du}{dr} \right\} + q \cdot u = V \cdot u$  aufgebaut. Man erhält für  $S$  die Gleichung  $\alpha \cdot dS/dr = (u_1 + S u_2) V (u_1 + u_2 S)$ , wo  $\alpha$  eine Konstante ist. Eine Anwendung auf den Vergleich der  $n-p$ -Streuung mit der  $p-p$ -Streuung wird skizziert. Indem die obigen Gleichungen als Matrixgleichungen aufgefaßt werden, können sie auch für mehrkomponentige Wellenfunktionen Anwendung finden. Zur Berechnung des Streuquerschnitts erweist sich  $\lim_{r \rightarrow \infty} s(r)$  als erforderlich. Dies erweist sich wiederum als gleichbedeutend mit der Berechnung eines Phasenwinkels  $\delta$  der gestreuten Welle oder der Heisenbergschen Streumatrix  $S_H$ . Das Verfahren läßt sich ohne weiteres auch auf nichtzentrale Kräfte anwenden. Für ein Potential der Form  $V = v_1(r) - 2(\vec{L}, \vec{S}) v_2(r) + \{3(\vec{\sigma}_1 r)(\vec{\sigma}_2 r)/r^2 - (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)\} v_3(r)$  werden die wesentlichsten Schritte des Rechnungsganges skizziert.

**II.** In voller Analogie zum nichtrelativistischen Fall lassen sich auch für den relativistischen Fall Gleichungen vom Riccatischen Typus für die  $S$ -Matrix finden. Ebenso wie dort kann man durch analytische Fortsetzung dieser Matrix in  $k$ -Raum auch die Bestimmung der Energien stationärer Zustände diskutieren. Als eine notwendige Bedingung für einen stationären Zustand der Energie  $-k_0^2$  ergibt sich  $\lim_{r \rightarrow \infty} S(r) \exp(2 k_0 r) = 0$ .

*H. Volz.*

**Blatt, John M. and L. C. Biedenharn: Neutron-proton scattering with spin-orbit coupling. I. General expressions.** Phys. Review, II. Ser. **86**, 399—404 (1952).

Es wird im besonderen die Neutron-Proton-Streuung für einen Triplettzustand der beiden Teilchen unter dem Einfluß einer Spin-Bahn-Kopplung betrachtet. Es kombinieren die 2 Zustände  $l = J - 1$  und  $l = J + 1$  bei der Parität  $\pi = (-1)^{J+1}$ . Durch eine Streumatrix  $S$ , deren Eigenschaften näher untersucht werden, werden die auslaufenden Anteile der beiden Fälle:  $B - \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$ , in Verbindung gebracht mit den einfallenden Anteilen  $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$ . Für die Herleitung des Wirkungsquerschnitts der Streuung aus der Streumatrix werden weitere Formen angegeben, zu deren Begründung auf eine demnächst erscheinende Arbeit der gleichen Autoren verwiesen wird.

*H. Volz.*

**Lévy, Maurice: Sur la théorie relativiste des forces nucléaires. IV. Calcul de l'interaction neutron-proton produite par un champ pseudoscalaire.** C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1671—1672 (1952).

**Lévy, Maurice: Sur la théorie relativiste des forces nucléaires. V. Les propriétés du système neutron-proton aux faibles énergies.** C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1744—1746 (1952).

**Buehler, Robert J. and Joseph O. Hirschfelder: Bipolar expansion of coulombic potentials.** Addenda. Phys. Review, II. Ser. **85**, 149 (1952).

**Watson, Kenneth M.: The hypothesis of charge independence for nuclear phenomena.** Phys. Review, II. Ser. **85**, 852—857 (1952).

Ramsey, Norman F.: Long-range proton-proton tensor force. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 937—938 (1952).

Buckingham, R. A., S. J. Hubbard and H. S. W. Massey: The scattering of neutrons and of protons by deuterons. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 211, 183—203 (1952).

Daitch, P. B. and J. B. French: High energy nucleon-deuteron scattering. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 695—697 (1952).

Messel, H. and H. S. Green: The angular distribution of scattered nucleons in high energy nuclear collisions. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 65, 245—249 (1952).

Elton, L. R. B.: On the scattering of fast electrons by nuclei. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 65, 481—484 (1952).

Biswas, S. N.: On higher Born approximations in potential scattering of fast electrons by atomic nuclei in a static field. *Indian J. Phys.* 26, 38—45 (1952).

Pines, David: The stopping power of a metal for charged particles. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 931 (1952).

Blunck, O.: Zur Reichweite schneller Elektronen. *Z. Phys.* 131, 354—375 (1952).

Verf. gibt eine theoretische Untersuchung der wahren Reichweiten von Elektronen, d. h., er bestimmt die Verteilungsfunktion der wahren Bahnlängen unter Berücksichtigung aller Krümmungen. Die Berechnungen werden getrennt für schnelle Elektronen durchgeführt, deren Einfallenergie klein bzw. groß gegenüber ihrer Ruhenergie ist. Da die exakte Ermittlung der Verteilungsfunktionen ausgehend von der Rossi-Greisenschen Diffusionsgleichung auf erhebliche Schwierigkeiten stößt, bestimmt man den Verlauf dieser Funktionen aus den Potenzmittelwerten der Reichweiten an Hand eines von Pearson angegebenen Verfahrens. Die Reihenentwicklung wird mit der vierten Potenz abgebrochen, wobei die dritte und vierte Potenz bei den Elektronen der charakteristischen Verformung der Gaußschen Normalverteilung Rechnung tragen. Für die mittlere Reichweite ergeben sich einfache analytische Ausdrücke. Wahrscheinlichste und maximale Reichweite entnimmt man den berechneten Verteilungskurven. Zum Vergleich mit Experimenten stehen wegen der Meßschwierigkeiten der wahren Reichweite kaum Unterlagen zur Verfügung. Versuchsergebnisse von Williams über die Reichweiteverteilung in  $O_2$  sind in Übereinstimmung mit der Theorie. Für energiereiche Elektronen werden die Verteilungsfunktionen in Blei und Sauerstoff angegeben. *G. Ecker.*

Dalitz, R. H.: On polarized particle beams. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 65, 175—178 (1952).

L'A. introduit un opérateur statistique associé à l'état de polarisation d'un faisceau de corpuscules élémentaires. Cet opérateur est appliqué à l'analyse des phénomènes de diffusion et notamment à l'examen de la diffusion des neutrons thermiques polarisés. — Dans le cas du choc élastique de deux nucléons, on montre qu'une relation proposée par L. Wolfenstein (ce Zbl. 33, 96, 327) n'est pas valable pour l'opérateur de diffusions le plus général et présume l'invariance du potentiel d'interaction par rapport aux réflexions du temps. *G. Petiau.*

Blin-Stoyle, R. J.: A note on time reversal in polarized nuclear processes. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 65, 452—453 (1952).

Saitô, Yosio, Yoiti Watanabé and Yoshio Yamaguchi: Meson production by  $\gamma$ -rays from deuterium. *Progress theor. Phys.* 7, 103—121 (1952).

Luttinger, J. M.: Pion production and charge independence. *Phys. Review*, II. Ser. 86, 571—572 (1952).

Yamaguchi, Yoshio: Meson reactions in deuterium and meson-nucleon scattering. *Progress theor. Phys.* 7, 93—102 (1952).

Enatsu, H.: Self-energies of nucleons and the mass spectra of heavy particles. *Phys. Review*, II. Ser. 85, 483—484 (1952).

**Gaus, Heinrich:** Mesontheorie und Spin-Bahnpkopplung im Kern. *Z. Naturforsch.* **7a**, 44—55 (1952).

L'A. discute l'intervention d'un couplage du type spin-orbite par un champ mésonique neutre pour les nucléons à l'intérieur des noyaux atomiques. Il précise notamment le potentiel effectif correspondant à différents types de champs mésiques et à des hypothèses acceptables sur les potentiels en particulier dans le cas d'un modèle de Thomas-Fermi. *G. Petiau.*

**Lévy, Maurice M.:** The symmetrical pseudoscalar meson theory of nuclear forces. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 806 (1952).

**Taketani, Mitsuo, Shigeru Machida and Shoroku O-Numa:** The meson theory of nuclear forces. I. The deuteron ground state and low energy neutron-proton scattering. *Progress theor. Phys.* **7**, 45—56 (1952).

**Tannenwald, L. M.:** Nuclear phenomena deducible from  $\mu$ -pair theory with pseudoscalar coupling. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 332—339 (1952).

L'A. étudie au moyen de la théorie des paires de mésons  $\mu$  les approximations de couplage pseudoscalaire fort, faible et intermédiaire, dans les théories de la diffusion des mésons  $\mu$  par les nucléons et des forces entre deux nucléons. Ecrivant l'hamiltonien total sous la forme

$$H = H_\mu + H_i - \int d^3 x \Psi^*(x) [(x \cdot p) + \mu \beta] \Psi(x) + \frac{1}{2} \frac{1}{M} \sum_n f_n (\sigma \cdot p_n) \bar{\Psi}^*(x_n) \beta \gamma_5 \Psi(x_n)$$

avec  $\Psi(x_n) = \int d^3 x u(x_n - x) \Psi(x)$ , où  $u$  est une fonction réelle à symétrie sphérique différente de zéro seulement pour  $|x - x_n| \lesssim A^{-1}$  réalisant une coupure convenable pour les impulsions, la condition de fort couplage  $(f/2m) A^3 \geq 1$  avec  $A > \mu$  permet de ramener les problèmes étudiés à des problèmes variationnels. — Dans le cas de la diffusion des mésons  $\mu$  par un nucléon, le choix de la fonction  $u(x) = 2\pi^2 A^3 [\exp(-A x)/A x]$  conduit à une expression de la section efficace de diffusion beaucoup plus grande que celle observée expérimentalement. De même l'étude des forces entre deux nucléons conduit à des expressions liées étroitement au choix de la fonction  $u$ , et qui semblent incompatibles avec les résultats expérimentaux. Un calcul approximatif montre toutefois que ceux-ci pourraient peut être s'interpréter avec une théorie déduite de l'hypothèse d'un couplage intermédiaire entre couplage faible et couplage fort. *G. Petiau.*

**Placzek, G.:** The scattering of neutrons by systems of heavy nuclei. *Phys. Review*, II. Ser. **86**, 377—388 (1952).

Mittels der allgemeinen Formel für den Wirkungsquerschnitt eines Systems von Atomkernen (Molekül, Gas, Flüssigkeit oder fester Körper) in Bornscher Näherung für die Streuung von Neutronen wird speziell für den Fall schwerer Kerne gezeigt, daß dieser Wirkungsquerschnitt durch Mittelbildung einfacher Operatoren über den Anfangszustand des Systems gewonnen werden kann, wenn die Energie der Neutronen groß ist verglichen mit dem Termabstand des streuenden Systems. Diese Mittelwerte stellen im wesentlichen die Mittelwerte der mit einer vorgegebenen Impulsübertragung verbundenen Energieübertragung an das System bzw. deren höherer Potenzen dar, hängen also auf diesem Wege mit dem Termabstand zusammen. Die Anwendung auf Einzelkerne läßt eine Deutung im Hinblick auf den Übergang klassischer in quantenmechanische Effekte zu. Als praktische Anwendung der Ergebnisse wird die Abtrennung des Elektronenanteils der Neutronenstreuung von der Kernstreuung diskutiert, die für genügend große Neutronenenergien möglich erscheint. *H. Volz.*

**Plass, Gilbert N.:** The thermal neutron diffusion length in a heterogeneous pile. *J. appl. Phys.* **23**, 621—624 (1952).

Die Diffusionsgleichung für thermische Neutronen in einem Pile, der endliche Ausdehnung und 3-dimensionale periodische Struktur besitzt, wobei das spaltbare Material in Form von Kugeln in das Streumaterial eingebettet ist, wird gelöst durch eine Entwicklung nach Kugelfunktionen bis zur 3. Ordnung. Es wird ein Ausdruck für die sogenannte Diffusionslänge hergeleitet, der mit dem üblichen, vereinfachten Ergebnis (für homogene Durchmischung) verglichen wird. Die Diskrepanz wird um so größer, je größer der Durchmesser der eingelagerten spaltbaren Kugeln wird. Es ergeben sich so Grenzen für die Anwendbarkeit der einfacheren Formeln. *H. Volz.*



Jacrot, Bernard, Francis Netter et Francis Tyrode: Évaluation du taux d'absorption de neutrons en cours de ralentissement pour un échantillon plat. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 2357—2359 (1952).

Potts, R. B.: A combinatorial problem in electron-photon cascade theory. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 459—460 (1952).

Schlüter, Arnulf: Erzeugung von Ultrastrahlung in stellaren elektromagnetischen Feldern. Z. Naturforsch. **7a**, 136—140 (1952).

### Bau der Materie:

Wiskott, Detmar: Zur Berechnung der Wellenfunktionen im Coulomb-Feld bei anomaler Streuung. Z. Phys. **131**, 320—325 (1952).

Brown, G. E.: Electron-electron interaction in heavy atoms. Philos. Mag., VII. Ser. **43**, 467—471 (1952).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung der die elektromagnetische Wechselwirkung von Elektronen (in einem äußeren Potentialfeld) beschreibenden Breitischen Gleichung für den Fall hoher Geschwindigkeiten, der z. B. in den *K*-Elektronen der schweren Atome realisiert ist ( $v = Z/137$ ). Die Herleitung geschieht im Schwingerbild, und zwar durch Ausführung einer unitären Transformation, die die Photonenprozesse erster Ordnung eliminiert. In zweiter Ordnung erhält Verf. für die Wechselwirkungsenergie (in der Darstellung, in der  $H_{mn}^{(0)} = E_n \delta_{mn}$  ist):

$$H_{mn}^{(\text{int})} = (m | \langle c^2/4\pi r_{12} \rangle (1 - \vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2) e^{i(E_m - E_n)r_{12}} | n).$$

Für kleine  $v$  geht dies in den Breitischen Ausdruck

$$H^{(\text{int})} = (e^2/4\pi r_{12}) (1 - \vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2/2 - \vec{\alpha}_1 r_{12} \cdot \vec{\alpha}_2 r_{12}/r_{12}^2)$$

über.

G. Süßmann.

Falkoff, D. L., G. S. Colladay and R. E. Sells: Transformation amplitudes for vector addition of angular momentum; ( $j\ 3\ m\ m' / j\ 3\ J\ M$ ). Canadian J. Phys. **30**, 253—256 (1952).

Suryanarayana Rao, K.: Spin splitting of  $^5\Sigma$  and  $^6\Sigma$  electronic states. Indian J. Phys. **26**, 47—53 (1952).

Nach den Methoden von van Vleck und Kramers [Z. Phys. **53**, 422 (1929)] werden die Energieniveaus der  $^5S$ - und  $^6S$ -Zustände berechnet. E. Kreyßig.

Sternheimer, R.: Effect of the atomic core on the magnetic hyperfine structure. Phys. Review, II. Ser. **86**, 316—324 (1952).

Die durch das Kernquadrupolmoment verursachte Hyperfeinstruktur schließt einen Bestandteil ein, der einem durch das Valenzelektron in den abgeschlossenen Elektronenschalen induzierten elektrischen Quadrupolmoment entspricht. Außerdem ändert sich durch die elektrostatische Wechselwirkung des Valenzelektrons mit den übrigen Elektronen die Ladungsverteilung in den Elektronenschalen und damit auch das elektrische Feld in Kern. Verf. berechnet beide Einflüsse und weist nach, daß sie einander nahezu aufheben. E. Kreyßig.

Kichenassamy, S.: Sur les collisions entre atomes et électrons. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1035—1036 (1952).

Kichenassamy, S.: Nouvelle remarque sur les collisions entre atomes et électrons. C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1530—1532 (1952).

Lawson, J. D.: Note on the angular distribution of radiation from fairly thin targets bombarded by high energy electrons. Philos. Mag., VII. Ser. **43**, 306—308 (1952).

Roesler, Frank C.: Zur Theorie des Ramaneffektes. Acta phys. Austr. **5**, 477—495 (1952).

Gombás, P.: Über eine Erweiterung der statistischen Formulierung des Besetzungsverbotess vollbesetzter Elektronenzustände in Atomen. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **1**, 285—294 (1952).

Bei der Berechnung der Zustände von Valenzelektronen wird die gegenüber den Rumpfelektronen bestehende (aus dem Ausschließungsprinzip folgende) Orthogonalitätsvorschrift durch ein Zusatzpotential ersetzt (Verf., dies. Zbl. **26**, 38). Es wird aus einer statistischen Behandlung des Atomrumpfes gewonnen, bei der die einzelnen Nebenquantenzahlen gesondert behandelt werden. *F. Hund.*

Gombás, P.: Über ein statistisches Atommodell, in welchem die Elektronen nach der Nebenquantenzahl gruppiert sind. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* **1**, 295—300 (1952).

Die Grundgleichung des statistischen Atommodells mit Aufteilung der Elektronen nach ihrer Nebenquantenzahl (Hellmann, dies. Zbl. **14**, 336) wird durch Variation der Energie hergeleitet. *F. Hund.*

Fröman, Per Olof: A numerical comparison of the density matrix of  $\text{Rb}^+$  in the statistical approximation and in the Hartree approximation. *Ark. Fys.* **5**, 135—139 (1952).

Boys, S. F.: Electronic wave functions. VI. Some theorems facilitating the evaluation of Schrödinger integrals of vector-coupled functions. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **245**, 95—115 (1952).

Für die übrigen Teile siehe I und II dies. Zbl. **40**, 282; III, IV, V, *Proc. Roy. Soc., Ser. A* **206**, 489—509; **207**, 181—215 (1951). Die grundlegende allgemeine Theorie, die in dem vorhergehenden Teil der Arbeit über Elektronenwellenfunktionen begonnen wurde, wird durch die hier mitgeteilten analytischen Theoreme und Beweise vervollständigt. Für die in früheren Teilen definierten Vektor-Kopplungskoeffizienten wird eine Anzahl von Relationen abgeleitet, die ihre Berechnung wesentlich erleichtern. Für die Berechnung der Zweielektronenintegrale ( $\psi_\alpha(1) \psi_\beta(2) |1/r_{12}| \psi_\gamma(1) \psi_\delta(2)$ ) ist eine neue Methode entwickelt worden, die hinsichtlich ihrer Einfachheit und Allgemeinheit eine wesentliche Verbesserung des alten Condon-Shortleyschen  $c^k$ -Verfahrens zu sein scheint. — Die Anwendung dieser Ergebnisse auf die bei der Lösung der Schrödinger-Gleichung auftretenden Integrale ( $\varphi_1 |H| \varphi_2$ ) führt zu beträchtlichen Vereinfachungen. *H. J. Kopineck.*

Hall, G. G.: The molecular orbital theory of chemical valency. X. A method of calculating the ionization potentials of conjugated molecules. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **213**, 102—113 (1952).

In diesem Teil der Cambridger Abhandlungen über „the molecular orbital theory of chemical valency“ wird ein neues Verfahren beschrieben, um das Ionisationspotential von konjugierten Molekülen berechnen zu können. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Eigenfunktionen (hier gebraucht im Sinne des englischen „orbitals“) des Grundzustandes eines solchen Moleküls sehr verwandt sind mit denen eines bestimmten angeregten Molekülzustandes. Dieser Zustand, „standard excited state“ genannt, ist dadurch gekennzeichnet, daß sich alle beweglichen Elektronen in einfach besetzten antisymmetrischen Elektronenzuständen befinden und parallele Spins besitzen. Da diese antisymmetrischen Elektronenfunktionen durch eine Transformation in „äquivalente Funktionen“ übergeführt werden können, die an einem Atom lokalisiert sind, so ist damit die Möglichkeit gegeben, die Ionisationsenergie zu berechnen. An Pyridin und Anilin wird das neue Verfahren demonstriert. *H. J. Kopineck.*

Hall, G. G.: The molecular orbital theory of chemical valency. XI. Bond energies, resonance energies and triplet state energies. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **213**, 113—123 (1952).

Die bekannte Tatsache, daß die totale Energie von gesättigten Molekülen sich additiv aus den einzelnen Bedingungsenergien zusammensetzt, wird hier von der

theoretischen Seite aufgerollt und anschließend daran gezeigt, daß dies bei konjugierten Molekülen nicht der Fall ist. Hier muß vielmehr die Summe der einzelnen Bindungsenergien um einen von Molekül zu Molekül verschiedenen Betrag, die Resonanzenergie, erhöht werden, um die Totalenergie zu ergeben. — Diese Resonanzenergie kann über den „standard excited state“ berechnet werden. — Bei Kohlenwasserstoffen führt diese Methode zu denselben Gleichungen für die Resonanzenergie wie die Hückelsche Methode (E. Hückel, *Z. Phys.* **70**, 204 (1931). — Mit dem eingeführten Formalismus läßt sich die Energiedifferenz zwischen Grund- und angeregtem Triplett-Zustand bei konjugierten Molekülen berechnen. Für Kohlenwasserstoffe der Form  $C_{4n+3}H_{2n+8}$  werden einige Übergangsenergien berechnet, die mit experimentellen Werten gut übereinstimmen. *H. J. Kopineck.*

Taylor, G. Russell and Robert G. Parr: Superposition of configurations: The helium atom. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 154—160 (1952).

Mulliken, R. S.: A comparative survey of approximate ground state wave functions of helium atom and hydrogen molecule. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 160—166 (1952).

Buckingham, R. A. and A. Dalgarno: The interaction of normal and metastable helium atoms. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **213**, 327—349 (1952).

Der Energieverlauf der Wechselwirkung eines Heliumatoms im Grundzustand  $1s^21S_0$  mit einem im ersten angeregten (metastabilen)  $S$ -Zustand ( $1s2s1S_0$  bzw.  $3S_1$ ) befindlichen Heliumatom wird bis  $R = 12 a_0$  eingehend untersucht. Die korrespondierenden vier Molekülzustände — wegen der bei gleichen Kernen gegebenen  $g$  und  $u$  Unterscheidung — sind:  $1\Sigma_g$ ,  $1\Sigma_u$ ,  $3\Sigma_g$  und  $3\Sigma_u$ . Zur Durchrechnung des Problems wird das Heitler-Londonsche Verfahren benutzt, jedoch unter Berücksichtigung der Nichtorthogonalitätsintegrale; d. h., wenn  $\psi_i$  die antisymmetrische Wellenfunktion des durch  $i$  gekennzeichneten Molekülzustandes ist, so hat die Energie die Form:  $E = \int \psi_i^* H \psi_i d\tau / \int \psi_i^* \psi_i d\tau$ . Die Moleküleigenfunktionen sind in der üblichen Form aus Produkten der Elektroneneigenfunktionen aufgebaut. Von dem antisymmetrisierenden Permutationsoperator werden nur die einfachen Transpositionen benutzt. Als Elektroneneigenfunktionen werden die analytischen Funktionen von Morse, Young und Haurwitz (1935) verwendet; doch enthält die  $1s$ -Funktion des angeregten He-Atoms eine andere Kernladungszahl als die des He-Atoms im Grundzustand. Die Auswertung der Energiegleichungen zeigt folgendes: Die Potentialkurven der  $1\Sigma_u$ - und  $3\Sigma_u$ -Zustände besitzen Minima bei ungefähr  $2 a_0$ , die rund  $0,04 e^2/a_0$  ( $3\Sigma_u$ ) bzw.  $0,06 e^2/a_0$  ( $1\Sigma_u$ ) tiefer liegen als die Energien der getrennten Atome. Die  $1\Sigma_g$ - und  $3\Sigma_g$ -Kurven zeigen abstoßenden Verlauf. — Beachtenswert ist das Ergebnis, daß die „anziehenden“ Potentialkurven bei  $R \approx 4 a_0$  ein kleines Maximum von rund  $0,25 eV$  besitzen. Derartige abstoßende Barrieren, die Aktivierungsenergien entsprechen, sind z. B. von Rosen u. a. theoretisch vorausgesagt und in einigen Fällen experimentell bestätigt worden. — Verff. erwähnen, daß die oben angeführten Vernachlässigungen im Permutationsoperator sich bei einer Durchführung der genauen Rechnung im Bereich um die Potentialminima gerechtfertigt haben. — In einer abrundenden Rechnung werden für größere Kernabstände die van der Waals-Energien untersucht. — Ein Anhang behandelt die Auswertung der auftretenden Ein- und Zweizentrenintegrale. *H. J. Kopineck.*

Kopineck, Hermann-Josef: Quantentheorie des  $N_2$ -Moleküls. II. Behandlung des  $N_2$ -Moleküls als Zehnelektronenproblem. *Z. Naturforsch.* **7a**, 314—324 (1952).

Coulson, C. A., N. H. March and S. Altmann:  $\pi$ -electrons and  $\sigma$ -electrons. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 372—378 (1952).

Guy, Jean et Monique Harrand: Définition en théorie des orbitales moléculaires de polarisabilités monoélectroniques additives. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 716—718 (1952).

Yvan, Pierre: Sur une expression analytique de la relation barrière de potentiel-valence libre. *C. r. Acad. Sci., Paris* **234**, 2287—2289 (1952).

Mueller, Charles P. and Henry Eyring: Chemical valence forces and binding energy calculations. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **38**, 149—154 (1952).

Heaps, H. S. and G. Herzberg: Intensity distribution in the rotation-vibration spectrum of the OH molecule. *Z. Phys.* **133**, 48—64 (1952).

Szigeti, B.: On the torsional vibrations of long chain molecules. *Proc. phys. Soc., London, Sect. A* **65**, 19—32 (1952).



**Vidro, L. I. und M. V. Vol'kenštejn:** Über die Schwingungsspektren linearer Polymere. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 85, 1243—1246 (1952) [Russisch].

**Boyd, D. R. J. and H. C. Longuet-Higgins:** Coriolis interaction between vibration and rotation in symmetric top molecules. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 213, 55—73 (1952).

Der Einfluß der Wechselwirkung zwischen Schwingung und Rotation auf die infraroten Senkrechtbanden symmetrischer Kreiselmoleküle wird als Störung in erster Näherung berechnet. Dabei sind die Schwingungen als harmonisch vorausgesetzt; die Wirkung der Zentrifugalkraft bleibt unberücksichtigt. Die Summe der Coriolis-Koeffizienten wird angegeben, sowie der Zusammenhang zwischen den Coriolis-Koeffizienten der Grundschrwingungen und der Struktur senkrechter Ober- und Kombinationsbanden ermittelt. *E. Kreyßig.*

**Majumdar, Sudhansu Datta:** The problem of three bodies in quantum mechanics. Z. Phys. 131, 528—537 (1952).

The paper is an extension of work by Wigner [Z. Phys. 43, 624 (1927)], Breit [Phys. Review, II. Ser. 35, 569—578 (1930)] and Hirschfelder and Wigner (this Zbl. 11, 185). These authors developed a method of reducing the number of independent variables in Schrödinger's equation for  $N$  interacting particles from  $3N$  to  $3N - 6$  by using the integrals of motion. The work presented in this paper sheds light also on some mathematical properties of the wave functions for the symmetrical top, and on the states of Helium when nuclear motion is neglected. *P. T. Landsberg.*

**Bru, L., M. P. Rodriguez and R. Vega:** Analogies between the diffraction of light and electron diffraction by gas molecules. Proc. phys. Soc., Sect B 65, 249—255 (1952).

**Bazarov, I. P.:** Die dynamische Gleichung von Gibbs, die kinetische Gleichung Boltzmanns und die Irreversibilität. Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1), 75—78 (1952) [Russisch].

**Kuhrt, Friedrich:** Das Tröpfchenmodell realer Gase. Z. Phys. 131, 185—204 (1952).

The statistical mechanics of real gases has been investigated using the method of the grand canonical ensemble (in which the temperature and the chemical potential, but not the total number of particles, are assumed fixed). The basic general theory has been derived and the existence of clusters is recognised when transforming the partition function. The method of treatment allows asymptotic formulae for the cluster integrals to be derived. A detailed numerical discussion has been given for carbonic acid. *P. T. Landsberg.*

**Kuhrt, Friedrich:** Das Tröpfchenmodell übersättigter realer Gase. Z. Phys. 131, 205—214 (1952).

Results obtained in the preceding paper are applied to supersaturated real gases. It is pointed out that the relation  $\log \frac{p}{p_\infty} = \frac{2\sigma}{kTR}$  for the rise in vapour pressure of a cluster of radius  $R$  overestimates  $p$  for small  $R$ . An improved relation has been derived. *P. T. Landsberg.*

**Traupel, W.:** Zur Dynamik realer Gase. Forsch. Gebiete Ingenieurwes. 18, 3—9 (1951).

Die grundlegenden Beziehungen der Gasdynamik, die man gewöhnlich für vollkommene Gase entwickelt, werden für „reale Gase“ untersucht, d. h. für Gase mit folgenden Eigenschaften: 1. Die thermische Zustandsgleichung soll in der Form  $p = z \cdot RT$  darstellbar sein, wobei der Kompressibilitätsfaktor  $z$  eine Funktion der Entropie allein ist. 2. Für isentropische Zustandsänderungen soll  $p v^\gamma = k$  gelten, wobei  $\gamma$  über genügend große Zustandsbereiche als konstant betrachtet werden darf. Diese Bedingungen sind z. B. bei Wasserdampf erfüllt. Die Dynamik

der so definierten realen Gase ergibt sich aus der gewöhnlichen Gasdynamik der vollkommenen Gase durch Umdeutung der mathematischen Symbole, also ohne neu hinzukommende mathematische Schwierigkeiten. Man kann nämlich die für vollkommene Gase gewonnenen Ergebnisse ohne Veränderung auf reale Gase übertragen, indem man in den Gleichungen  $T$  durch  $\frac{\gamma-1}{\gamma} i/R$  sowie  $c_p$  durch  $\frac{\gamma}{\gamma-1} R$  und  $c_v$  durch  $\frac{1}{\gamma-1} R$  ersetzt. Das praktische Rechnen auf dieser Grundlage wird ausführlich besprochen. R. Sauer.

**Bergeon, René:** Le troisième coefficient du viriel pour un potentiel intermoleculaire avec force répulsive en  $r^{-a}$ . C. r. Acad. Sci., Paris **234**, 1039–1041 (1952).

**Nijboer, B. R. A. and L. van Hove:** Radial distribution function of a gas of hard spheres and the superposition approximation. Phys. Review, II. Ser. **85**, 777–783 (1952).

**McLellan, A. G.:** A new method of solving the Born-Green equation for the radial distribution function. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **210**, 509–517 (1952).

**Price, P. J.:** The radial distribution function in liquid helium. Phys. Review, II. Ser. **86**, 495–496 (1952).

Verf. macht in seiner Mitteilung darauf aufmerksam, daß die Ornstein-Zernicke-Gibbs-Formel, welche gewöhnlich verwendet wird, um die Intensität der kohärenten Streustrahlung in einer Flüssigkeit mit den thermodynamischen Funktionen in Beziehung zu bringen, für flüssiges Helium nicht gültig ist. — Weitere Formeln, welche die radiale Verteilungsfunktion enthalten, werden diskutiert.

H. Falkenhagen—G. Kelbg.

**Temperley, H. N. V.:** A new theory of liquid helium. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 619–628 (1952).

**Dingle, R. B.:** Derivation of the velocity of second sound from Maxwell's equation of transfer. Proc. phys. Soc., Sect. A **65**, 374–376 (1952).

**Verschaffelt, J. E.:** Théorie des phénomènes de transport basée sur le principe de superposition. Physica **18**, 43–62 (1952).

**Dutta, A. K.:** Molecular motion in fluids and internal dispersion and absorption of elastic and optical waves. Indian J. Phys. **26**, 142–153 (1952).

Verf. hat eine Theorie entwickelt, um die Absorption und innere Dispersion von optischen und elastischen Wellen zu bestimmen. — Als wesentlicher Faktor geht in die Theorie die Molekularbewegung ein. Im Falle elastischer Wellen wird unter Berücksichtigung der verschiedensten Kräfte, welche auf die Moleküle wirken, eine Bewegungsgleichung aufgestellt, in die als wesentliche Größen Restitutions-, Reibungs- und Polarisationskoeffizienten eingehen. Bei periodischer Druckänderung läßt sich die Bewegungsgleichung für Gase integrieren. Die komplexe dielastische Konstante, die den Brechungsindex und den Absorptionskoeff. enthält, kann angegeben werden. Auch für Flüssigkeiten läßt sich die Rechnung unter Anwendung einer Näherung durchführen. Verschiedene experimentelle Resultate sind in Übereinstimmung mit der Theorie. Ferner erfolgt bei optischen Wellen eine Berechnung der vollständigen DK des Absorptionskoeff. und des Brechungsindex.

H. Falkenhagen—G. Kelbg.

**Klein, G.:** Optical transmission of certain colloidal solutions under relaxation conditions. Proc. phys. Soc., Sect. B **65**, 40–48 (1952).

Läßt man auf Teilchen in kolloidaler Lösung ein konstantes elektrisches oder magnetisches Feld einwirken, so werden sich diese Teilchen, wenn sie ein Moment besitzen, wegen ihrer thermischen Bewegung gemäß der Boltzmann-Verteilung orientieren. Verf. untersucht nun die Änderung der Intensität des Lichtes beim Durchtritt durch eine derartige Suspension, wenn das Feld plötzlich abgeschaltet wird. Der Ordnungszustand bricht zusammen, und bei nicht kugelförmigen Teilchen wird dadurch die Absorption des Lichtes verändert. — Da bei konstanter Teilchenkonzentration von einer translatorischen Brownschen Bewegung abgesehen werden kann, interessiert nur die Rotationsbewegung. Die Verteilungsfunktion  $f(\theta, q, t)$  genügt der

partiellen Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} = D \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right\}$$

Hierin ist  $D = KT/\beta$  und  $1/\beta$  bedeutet die Rotationsbeweglichkeit der Teilchen.  $\beta$  hängt von der Gestalt und der Größe des Teilchens ab und ist noch eine Funktion der Zähigkeit  $\eta$  des umgebenden Mediums. — Die Lösung der partiellen Differentialgleichung (1) läßt sich durch eine Reihe tesseraler Kugelfunktionen ausdrücken. Mit  $z = \cos \theta$  ergibt sich

$$(2) \quad f(z, \theta, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(z) e^{-n(n+1)Dt} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(n+1)Dt} \left\{ \sum_{m=1}^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(z) \right\}.$$

Ist die Anfangsverteilung  $f(z, \varphi, 0)$  gegeben, so findet man die Entwicklungskoeffizienten

$$A_n = (2n+1) \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} P_n(z) f(z, \varphi, 0) dz d\varphi$$

$$A_{nm} + i B_{nm} = (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} e^{im\varphi} P_n^m(z) f(z, \varphi, 0) dz d\varphi.$$

Der Mittelwert irgendeiner Eigenschaft des Teilchens ist dann

$$F = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} F(z, \varphi) f(z, \varphi, t) dz d\varphi.$$

Verf. gibt nun für einige spezielle Anfangsverteilungen  $f(z, \varphi, 0)$  die Entwicklungskoeffizienten an. 1. Anfangs seien alle Teilchen parallel der  $z$ -Achse ausgerichtet, dann haben wir  $A_n = 2n+1$ . 2. Anfangs seien alle Teilchen senkrecht zur  $z$ -Achse gerichtet, dann gilt  $A_{2n} = (4n+1) P_{2n}(0)$ ,  $A_{2n+1} = 0$ . 3. Die Anfangsverteilung sei durch die Funktion gegeben  $f(z, \varphi, 0) = \xi/(4\pi \sin \xi) e^{\xi z}$ , dann ergibt sich  $A_n = (2n+1) (1/\sin \xi) (\frac{1}{2} \pi \xi)^{1/2} I_{n+1/2}(\xi)$ . Die Funktion  $f(z, \varphi, 0)$  findet man in der Theorie der Dispersion der DK. Es bedeutet  $\xi = \mu F_0/KT$ . 4. Anfangs herrsche die Verteilung  $f(z, \varphi, 0) = \alpha/(4\pi E_\alpha) e^{-\alpha^2 z^2}$ , und die Entwicklungskoeffizienten berechnen sich zu

$$A_{2n} = (4n+1) \int_0^1 P_{2n}(z) e^{-\alpha^2 z^2} dz$$

$$A_{2n+1} = 0 \quad A_2 = -\frac{5}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha^2} + \frac{3}{2\alpha} E_\alpha e^{-\alpha^2} \right).$$

Hier handelt es sich um die Verteilungsfunktion im konstanten Magnetfeld bei diamagnetischen Teilchen. — Bei der Berechnung der Intensitätsänderung des Lichtes werden nun vom Verf. zwei Fälle unterschieden: A. Die Teilchen sind groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes und sind undurchsichtig. B. Die Teilchen sind metallisch und ihr Durchmesser ist klein gegenüber der Wellenlänge des Lichtes. Zu A. Bei großen und undurchsichtigen Teilchen wird der geometrische Schatten jedes einzelnen Teilchens eine Rolle spielen und zur Verminderung der Lichtintensität führen. Ist  $N$  die Anzahl der Teilchen pro  $\text{cm}^3$ , so wird die Änderung der Lichtintensität  $dI_t(z)$  beim Durchgang durch eine Schicht der Dicke  $dz$

$$dI_t(z) = -N I_t(z) s_t dz = -c I_t(z) dz$$

sein. Die Größe  $c$  rührt von der Absorption des Mediums her. In dieser Formel bedeutet  $s_t$  die Schattenfläche eines Teilchens. Nimmt man den Mittelwert von  $s_t$ , so ergibt sich das Gesetz

$$\log(I_t/I_\infty) = -N l(\bar{s}_t - \bar{s}_\infty).$$

Bei Ellipsoidteilchen der Exzentrizität  $\varepsilon$  ist

$$s = a [1 + \varepsilon^2 z^2 / (1 - \varepsilon^2)]^{1/2}$$

und man findet

$$s_t = a \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n} A_{2n} e^{-2n(2n+1)Dt}$$

mit

$$J_{2n} = \int_0^1 \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right)^{1/2} P_{2n}(z) dz.$$

Die Änderung der Lichtintensität verläuft nach der Formel

$$\log \frac{I_t}{I_\infty} = -N l a \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} J_{2n} e^{-2n(2n+1)Dt}.$$



Der erste Term dieser Summe dominiert, so daß für alle vorher diskutierten Fälle das Gesetz besteht

$$\frac{d}{dt} \log \left( \log \frac{I_t}{I_\infty} \right) \simeq - \frac{6KT}{\beta}.$$

Zu B. Bei kleinen metallischen Teilchen werden vom Verf. die Absorptionsformeln von Gans verwendet. Auch in diesem Falle ergibt sich die Näherungsbeziehung

$$\frac{d}{dt} \log \left( \log \frac{I_t}{I_\infty} \right) \simeq - \frac{6KT}{\beta}.$$

Es ist also zu ersehen, daß dieser Formel eine ziemliche Allgemeingültigkeit zukommt.

H. Falkenhagen—G. Kelbg.

**Marvaud, Jacques:** *Tracé des trajectoires de corpusculus en suspension dans un fluide animé d'un mouvement.* C. r. Acad. Sci., Paris 234, 401—403 (1952).

**Sivuchin, D. V.:** *Elementare Theorie der monomolekularen Übergangsschicht und elliptische Polarisierung bei Reflexion des Lichtes von einer Flüssigkeit.* Vestnik Moskovsk. Univ. 7, Nr. 2 (Ser. fiz.-mat. estestv. Nauk Nr. 1), 63—74 (1952) [Russisch].

**Vogt-Nilsen, Nils:** *A note on the electrolytic double-tank.* Norske Vid. Selsk. Forhdl. 24, Nr. 22, 98—101 (1952).

**Kaiser, T. R. and R. L. Closs:** *Theory of radio reflections from meteor trails. I.* Philos. Mag., VII. Ser. 43, 1—32 (1952).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung des Reflexionskoeffizienten einer elektromagnetischen Welle an einer ionisierten Luftsäule zylindrischer Gestalt. Die Anwendung der Theorie auf Meteore hängt von der Annahme ab, daß der Meteor plötzlich einen engen ionisierten Gasschlauch bildet, welcher sich sofort radial ausdehnt. — Die Theorie sagt zwei qualitativ verschiedene Echoarten voraus, die von der Elektronenliniendichte  $\alpha$  abhängen. Wenn  $\alpha \ll 10^{12} \text{ cm}^{-1}$  ist und die einfallende elektrische Feldstärke parallel zur Achse der Säule gerichtet ist (Parallelstreuung), kann angenommen werden, daß die Elektronen kohärent und unabhängig streuen, so daß jedes Elektron den Betrag von  $4\pi (e^2/mc^2)^2$  zum Streuquerschnitt liefert. Sobald sich die Säule radial ausdehnt, nimmt die Echoamplitude exponentiell ab, wenn die Elektronendichte eine Gaußsche Funktion des Radius ist. Ist die einfallende elektrische Feldstärke senkrecht zur Säule gerichtet (Transversalstreuung), treten andere Echoverhältnisse ein. Der Reflexionskoeffizient geht durch einen Resonanzbereich, um dann exponentiell abzuklingen. Diese Resonanz hängt vom Gradienten der Elektronendichte ab. Variiert die Elektronendichte in Abhängigkeit von  $r$  nach dem Gesetz  $n = n_0 e^{-(r/r_0)^s}$  so ist die Echoamplitude proportional zu  $\alpha$ , während die Echodauer unabhängig von  $\alpha$  ist. (Der Fall  $s = 2$  wird genauer behandelt.) — Wenn  $\alpha \gg 10^{12} \text{ cm}^{-1}$  ist, so reflektiert die Gassäule wie ein metallischer Zylinder, ausgenommen eventuell anfangs, wenn der parallele Reflexionskoeffizient größer ist als der transversale, oder wenn die Reflexionskoeffizienten gleich und nahezu konstant sind. Die Echodauer ist in diesem Fall proportional zu  $\alpha$ , und die Echoamplitude ist eine langsam abnehmende Funktion von  $\alpha (\alpha^{1/4})$ . Die in dieser Arbeit erhaltenen Ergebnisse stimmen mit experimentellen Daten überein.

H. Falkenhagen—G. Kelbg.

**Smollett, M.:** *The frequency spectrum of a two-dimensional ionic lattice.* Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 109—115 (1952).

**Brenig, W. und M. Schröder:** *Zur Darstellung der spezifischen Wärme fester Körper durch Debye- und Einstein-Terme.* Z. Phys. 132, 312—317 (1952).

**Dietze, Horst-Dietrich:** *Die Temperaturabhängigkeit der Versetzungsstruktur.* Z. Phys. 132, 107—110 (1952).

**Seitz, Frederick:** *On the generation of vacancies by moving dislocations.* Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag. 1, 43—90 (1952).

**Frank, F. C.:** *Crystal growth and dislocations.* Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag. 1, 91—109 (1952).

**Herpin, André:** Contribution à l'étude de la théorie cinétique des solides. *Ann. de Physique*, XII. Sér. 7, 91—139 (1952).

**Mindlin, Raymond. D.:** Forced thickness-shear and flexural vibrations of piezoelectric crystal plates. *J. appl. Phys.* 23, 83—88 (1952).

**Emersleben, Otto:** Die elektrostatische Gitterenergie endlicher Stücke heteropolarer Kristalle. *Z. phys. Chemie* 199, 170—190 (1952).

Es wird der elektrostatische Anteil der Gitterenergie von Ionenkristallen endlicher Ausdehnung berechnet, und zwar für eindimensionale Ionenreihen streng, für das quadratische Gitter und für das einfache kubische Gitter näherungsweise unter Zuhilfenahme von numerischen Daten. Das hierbei auftretende größte Glied ist immer der sich aus der Madelungkonstanten für das unendliche Gitter ergebende Beitrag. Hinzu treten noch Glieder, die sich als Flächen, Kanten und Eckenenergien deuten lassen. — Als Anwendung wird der elektrostatische Anteil der Trennarbeit bei der Zerlegung eines Würfel- oder Quadratgitters mit  $n \cdot k$  Ionenpaaren entlang einer Kante in  $n$  Teilgitter mit  $k$  Ionenpaaren per Kante berechnet. *A. Seeger.*

**Emersleben, Otto:** Eine Darstellung des Einflusses der Kristallbegrenzung auf die Gitterenergie endlicher Ionenkristalle. *Z. Elektrochemie* 56, 305—308 (1952).

**Squires, G. L.:** Multi-oscillator processes in the scattering of neutrons by crystals. *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 212, 192—206 (1952).

**Niggli, Paul:** Grenzphänomene am kristallinen Wachstumskörper. *Studium generale* 5, 342—355 (1952).

Sieht man von den Begrenzungen ab, so ist die kristalline Materie streng gitterförmig aufgebaut. Die vorliegende Arbeit ist dem Problem der Begrenzungsflächen eines solchen Aufbaues gewidmet. Die Beobachtungen zeigen, daß die Grenzflächen dem Gesetz der rationalen Indizes gehorchen, wonach in passendem Koordinatensystem die Flächen die Achsen in Werten schneiden, deren Verhältnis sich in einfachen (d. h. kleinen) ganzen Zahlen ausdrücken läßt. Dies wird an Beispielen erläutert und physikalisch begründet. *J. J. Burckhardt.*

**Artmann, Kurt:** Zur Theorie anomaler Elektroneninterferenzen an Kristallen bei flachem Einfall. *Z. Phys.* 132, 30—43 (1952).

Der flache Einfall harter Elektronenstrahlen wird für reguläre Bragg'sche Reflexion als eindimensionales Problem behandelt. Dabei wird der allmähliche Übergang des Potentials in einer Schwelle  $S$  vom Vakuumwert zum periodischen Potential des Kristallhalbraumes  $H$  in Rechnung gestellt. Ist  $r_S = |r_S(k_z)| \cdot \exp(i\varrho_S(k_z))$  die komplexe Reflexionsamplitude der Schwelle und  $r_H = |r_H(k_z)| \cdot \exp(i\varrho_H(k_z))$  die komplexe Reflexionsamplitude des Halbraumes, so hat das Reflexionsvermögen  $|R_{00}(k_z)|^2$  des Kristalls als Funktion der Normalkomponente  $k_z$  des Vakuumwellenvektors der einfallenden Welle dann ein ausgeprägtes Minimum an der durch  $|r_S(k_z^0)| = |r_H(k_z^0)|$  bestimmten Stelle  $k_z^0$ , wenn  $(*) \varrho_S(0) + \varrho_H(0) \approx 0$  ist und  $k_z = k_z^0$  in einem verbotenen Energieband des Kristallinneren liegt. Ein solches Minimum ist von Yamaguti [*Proc. phys.-math. Soc. Japan* 23, 433 (1941)] bei der (001)-Reflexion von NaCl beobachtet worden; es wird vom Verf. in der angegebenen Weise interpretiert. Die Forderung  $(*)$  ist nur für spezielle Oberflächen gegeben und entspricht einer der optischen Bedingungen für die Entspiegelung von Linsen. Eine äquivalente Interpretation der Einsattelung wird mit Hilfe einer virtuellen Tamm'schen Oberflächenwelle gegeben (bei der die Wellenfunktion zwar im Kristallinneren, aber nicht im Kristalläußeren exponentiell abklingt).

*A. Seeger.*

**Wrinch, Dorothy:** A „megamolecular“ structure factor. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 43, 801—804 (1952).

**Booth, Andrew D.:** Invariant characteristics of X-ray Fourier syntheses. *Nature* 169, 1058 (1952).

Evans, jr., Howard T.: X-ray absorption corrections for single crystals. J. appl. Phys. 23, 663—668 (1952).

Verf. berechnet den Absorptionsfaktor  $A = \int e^{-\mu(t_1+t_2)} dv / \int dv$  eines zu beiden Seiten von Röntgenstrahlen umspülten Stäbchens mit rechteckigem Querschnitt (Seitenvektoren  $L_1, L_2$ ), falls die Einheitsvektoren  $s_1, s_2$  der einfallenden und gestreuten Röntgenstrahlung senkrecht zur Stäbchenachse stehen,  $t_1, t_2$  die vom einfallenden und gestreuten Strahl im Präparat zurückgelegten Strecken und  $\mu$  der totale lineare Absorptionskoeffizient ist. Hierzu zerlegt Verf. Querschnitt in Teilparallelogramme mit Seitenvektoren  $x_p s_1, y_p s_2 \dots$  und Teildreiecke, deren eine Seite auf einer Außenseite des  $L_1 L_2$ -Rechteckes, deren andere beide Seiten durch Vektoren  $x_0 s_1, y_0 s_2 \dots$  gebildet werden. Dabei unterscheidet man 5 Typen von Teilflächen  $j$  mit Teilabsorptionsfaktoren  $A_j$ . Für das  $x_p s_1, y_p s_2$ -Parallelogramm (Typ I) gilt z. B., wenn  $x_1$  der kürzeste,  $x_1 + x_2$  der längste Weg ist, den der Primärstrahl vor Erreichen des Parallelogramms im Präparat zurücklegen kann (entsprechend  $y_1$  und  $y_1 + y_2$  für den gebeugten Strahl nach Verlassen des Parallelogramms):

$$A_I = \frac{1}{\mu^2 (x_p + y_2) (y_p + x_2)} e^{-\mu(x_1 + y_1)} (1 - e^{-\mu(x_p + y_2)}) (1 - e^{-\mu(y_p + x_2)}).$$

Für ein Teildreieck, bei dem Primär- und Streustrahl durch die an der  $L_1 L_2$ -Oberfläche liegende Seite treten (Typ II), ist z. B.

$$A_{II} = \frac{2}{\mu^2 (x_0 + y_0)^2} [e^{-\mu(x_0 + y_0)} + \mu(x_0 + y_0) - 1].$$

Ist  $S_j$  der Inhalt der Teilfläche  $j$ , so ergibt sich für  $A$  — was das Neue der Untersuchung ist — also ein geschlossener Ausdruck  $A = \sum_j S_j A_j / \sum_j S_j$ , der die Größen  $y_0, y_1, y_2 \dots x_0, x_1, x_2 \dots$

explizit enthält. Diese sind allerdings selbst leider nur für jeden Reflex gesondert mittels einer geometrischen Konstruktion zu gewinnen. Verf. definiert zur Erleichterung dieser Konstruktionsarbeit 8 weitere Typen von Teilflächen mit entsprechenden Entartungen bei spezieller Orientierung des Präparates. Berechnung von  $A$  für 99 (hol)-Reflexe eines  $\text{BaTiO}_3$ -Einkristalls,  $|L_1| = 0,160$  mm,  $|L_2| = 0,071$  mm, Drehachse parallel tetragonaler  $b$ -Achse,  $\text{MoK } \alpha$ -Strahlung mit  $\mu = 198 \text{ cm}^{-1}$  (ohne Extinktion). Dabei variiert  $A$  zwischen 0,085 und 0,325. Die mit Geigerzähler registrierten integralen Reflexintensitäten differieren nach Anbringung der  $A$ -Korrektur noch stark von den mittels der Hartreeshen Atomfaktoren berechneten. Vergrößert man  $\mu$  um den Extinktionskoeffizienten  $\sigma_e$ , der nach R. W. James und E. M. Firth (1927) angenähert wird durch  $\sigma_e = g Q (\text{cm}^{-1})$ , wobei  $Q = j_e |f|^2 L_3 / v (\text{cm}^{-1})$  ( $j_e$  Thomson- und Polarisationsfaktor,  $|f|^2$  Strukturfaktor,  $L_3$  ein Lorentzfaktor,  $v$  Kristallvolumen) und  $g$  eine dimensionslose, empirisch zu bestimmende Zahl ist, die mit wachsender Mosaikblockverwerfung gegen Null geht, so erreicht das mittlere Fehler-Quadrat aller gemessenen und berechneten Strukturfaktoren für  $g \sim 5,06 \cdot 10^3$  ein sehr flaches Minimum von 4,72%. Diese verbleibende Diskrepanz erklärt Verf. mit merklicher Primärextinktion und Abweichungen von den Hartreeshen Atomfaktoren.

R. Hosemann.

Zachariasen, W. H.: On the anomalous transparency of thick crystals to X-rays. Proc. nat. Acad. Sci. USA 38, 378—382 (1952).

Gerstenkorn, Horst: Zur Änderung des elektrischen Widerstandes reiner Metalle am Schmelzpunkt. Ann. der Physik, VI. F. 10, 49—79 (1952).

Es wird eine modellmäßige Erklärung der verhältnismäßig kleinen Erhöhung. (50%—100%) des elektrischen Widerstandes der Alkalien beim Schmelzen gegeben. Die Meßergebnisse werden in der Weise gedeutet, daß die flüssigen Metalle als fein verteiltes mikrokristallines Gemenge betrachtet werden. Die Leitfähigkeits-elektronen werden nach Sommerfeld-Houston als „frei“ betrachtet, wobei die Unterschiede in den Strukturfaktoren der festen und flüssigen Metalle in erster Linie durch die Unterschiede in der Größe der Bezirke mit kristallischer Ordnung bestimmt sind. — Der Strukturfaktor eines aus regellos orientierten Kristalliten zusammengesetzten Mediums läßt sich aus einem von der Temperatur wenig, aber von der Korngröße stark abhängenden, von den Bragg-Reflexionen herrührenden Anteil sowie aus einem stark temperaturabhängigen, von der Korngröße nahezu unabhängigen, von der Wärmeschwingungen herrührenden Beitrag additiv zusammensetzen. Die Berechnung des letztgenannten Beitrags wurde durch Berücksichtigung der Anisotropie und Dispersion der Gitterwellen und der gleichzeitigen Wechselwirkung mit mehreren Schallquanten verbessert. — Bei der Ermittlung



der Kristallitgröße in den Schmelzen wurden die Ergebnisse der Röntgenuntersuchung benützt.

*A. Seeger.*

**Gerstenkorn, Horst:** Über elastische Wellen in kubischen Gittern. Ann. der Physik, VI. F. 10, 80—93 (1952).

Die Theorie der elastischen Wellen in einem kubisch-raumzentrierten Gitter wird (analog zu Born und v. Kármán) unter der Annahme linearer Kopplung eines Atoms mit seinen 14 nächsten und übernächsten Nachbarn bis zur expliziten Aufstellung der Säkulardeterminante durchgeführt. Es ergeben sich dabei vier Kopplungskonstanten, von denen drei näherungsweise durch die elastischen Konstanten des Kristalls ausgedrückt werden können. — Die Abhängigkeit der Hauptfortpflanzungsgeschwindigkeiten von der Wellenlänge wird näherungsweise durch einen „Dispersionsansatz“ ausgedrückt. — Im Grenzfall langer Wellen (in dem die Resultate auch für die beiden andern kubischen Gitter gelten) wird der Zusammenhang zwischen Polarisationsrichtung und Ausbreitungsvektor der Wellen studiert und mit den Verhältnissen in einem isotropen Medium verglichen. Es gibt hier eine nahezu longitudinale und zwei nahezu transversale Wellen. Die Anisotropie äußert sich vor allem in der Richtungsabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit und in zwei verschiedenen Geschwindigkeitsbeträgen für die Transversalwellen. *A. Seeger.*

**Sondheimer, E. H.:** A note on the theory of conduction in metals. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 561—562 (1952).

**Chambers, R. G.:** The kinetic formulation of conduction problems. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 458—459 (1952).

**Sondheimer, E. H.:** The mean free path of electrons in metals. Advances Phys., Quart. Suppl. philos. Mag. 1, 1—42 (1952).

Verf. diskutiert die theoretische und experimentelle Bestimmung der freien Weglänge in dünnen Schichten und Drähten ohne und mit äußerem Magnetfeld sowie den anomalen Skineffekt bei tiefen Temperaturen. *G. Höhler.*

**Bhatia, A. B.:** On the theory of electrical conductivities of monovalent metals. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 188—191 (1952).

**Dexter, D. L.:** Conductivity of cold-worked metals. Phys. Review, II. Ser. 85, 936—937 (1952).

**Rostoker, Norman:** Hall effect and ponderomotive force in simple metals. Amer. J. Phys. 20, 100—107 (1952).

**Raimes, S.:** A calculation of the cohesive energies and pressure/volume relations of the divalent metals. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 327—337 (1952).

**Cheeseman, I. C.:** The structure of the long wave absorption edge of insulating crystals. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 25—32 (1952).

**Howarth, D. J. and H. Jones:** The cellular method of determining electronic wave functions and eigenvalues in crystals, with applications to sodium. Proc. phys. Soc., Sect. A 65, 355—368 (1952).

**Katz, E.:** Splitting of bands in solids. Phys. Review, II. Ser. 85, 495—496 (1952).

**Ganzhorn, K.:** Quantenmechanik der kubisch raumzentrierten Strukturen der Übergangsmetalle. Z. Naturforsch. 7a, 291—292 (1952).

**Adams II, Edward N.:** Motion of an electron in a perturbed periodic potential. Phys. Review, II. Ser. 86, 427—428 (1952).

**Hall, G. G.:** The electronic structure of diamond. Philos. Mag., VII. Ser. 43, 338—343 (1952).

Verf. benutzt die in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 40, 284) entwickelte Methode der „equivalent orbitals“ zu einer Berechnung der Elektronenstruktur des Diamants und vergleicht sein Ergebnis mit dem von Kimball, der die Wigner-Seitz-Slater-Methode benutzt hat. (J. Chem. Phys. 3, 560 (1935)). *G. Höhler.*



## Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

**Fleckenstein, J. O.:** Les théorèmes de Laplace sur les perturbations séculaires dans les éléments vectoriels des orbites planétaires. *Experientia* 8, 136—137 (1952).

Verschiedene Autoren, u. a. W. Lenz (1934) und M. Milankovitch (1939) haben versucht, die Formeln des Zweikörperproblems und der Störungsrechnung, die in rechtwinkligen oder Polarkoordinaten oft sehr komplizierte Form annehmen, in die einfache und übersichtliche Symbolik der Vektorrechnung zu übertragen. Verf. benutzt die von Milankovitch eingeführten Vektoren  $\mathfrak{C}$  (Flächengeschwindigkeitsvektor) und  $\mathfrak{D}$  (Achsenvektor), um die Gültigkeit zweier Sätze der Störungstheorie, nämlich den Satz von der säkularen Unveränderlichkeit der Großen Halbachsen und den Satz von der säkularen Unabhängigkeit der Störungsfunktion von der Perihelzeit des gestörten Planeten, auf einfachste Weise zu zeigen.

*K. Stumpff.*

**Walter, K.:** Bahnverändernde Einflüsse in engen Doppelsternsystemen. *Astron. Nachr.* 280, 149—156 (1952).

Bei engen Doppelsternsystemen treten häufig Kräfte auf, die eine säkulare Veränderung der Bahnelemente zur Folge haben. So bewirken die Gezeitenschwingungen der Komponenten und die durch sie erzeugten inneren Reibungskräfte eine Abnahme der Bahnexzentrizität. Auch die Rotationsaufspaltung im Innern der Sterne hat ähnliche Folgen. Um ein der Rechnung zugängliches Modell zu haben, denkt sich Verf. die beiden Sterne aus frei rotierenden Kernen mit gebunden rotierendem Mantel zusammengesetzt — diese Rotationsspaltung werde durch gewisse im Sterninnern wirksame Momente aufrecht erhalten. Verf. zeigt, daß ein solches System eine säkulare Apsidenbewegung zeigt, und daß die Exzentrizität der Bahn exponentiell zu- oder abnimmt, je nach dem Drehungssinn der rotationsaufspaltenden Momente.

*K. Stumpff.*

**Pilowski, K.:** Zur Untersuchung der Sternbewegungen. *Astron. Nachr.* 280, 217—225 (1952).

Die Geschwindigkeitsverteilung der Sterne in Sonnennähe wird als Folge einer Überlagerung von Sternströmen angesehen. Die *A*-Sterne sollen drei verschiedenen Strömen angehören, während die *B*-Sterne einen einzigen Strom bilden, der annähert die gleiche Schwarmbewegung besitzt wie jeder der *A*-Stern-Ströme. — Es wird vorgeschlagen, die Bewegungen der Sterne in Gebieten senkrecht zur Milchstraßenebene zu beobachten, so daß die Strömungsgeschwindigkeit in der Milchstraße in Abhängigkeit vom Abstand von der Symmetrieebene studiert werden könnte.

*W. Fricke.*

**Kurth, Rudolf:** Das Anfangswertproblem der Stelldynamik. *Z. Astrophys.* 30, 213—229 (1952).

Die Arbeit zeigt Wege zur Lösung der Frage: Wie lautet die Verteilungsfunktion  $f(u, x, t)$  für ein Sternsystem zur Zeit  $t$ , wenn zur Zeit  $t = 0$  die Verteilungsfunktion  $F(u, x)$  ist? Gesucht wird eine simultane nichtstationäre Lösung der Liouville'schen und Poissonschen Gleichung. Es wird bewiesen, daß sich eine Folge von Verteilungsfunktionen angeben läßt, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion konvergiert, welche die einzige Lösung des Problems darstellt. Die Funktionsfolge wird durch folgende Schritte erhalten: Aus der Anfangsverteilung  $F(u, x)$  werden die Anfangswerte für die Dichte und Potentialgradienten berechnet. Mit den letzteren werden die unabhängigen Integrale  $\dot{u}$ ,  $\dot{x}$  der Bewegungsgleichungen gefunden. Die Funktion  $F(\dot{u}, \dot{x})$  stellt eine erste Approximation der Verteilungsfunktion  $f(u, x, t)$  für hinreichend kleine  $t$  dar. Das Verfahren wird schrittweise fortgesetzt. Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz wird geführt, indem eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Auflösbarkeit einer gewissen Eigenwertgleichung für den abstrakten Banachschen Raum angegeben wird, die das stellardynamische Anfangswertproblem enthält.

*W. Fricke.*



**Feinstein, J.:** Condition for radiation from a solar plasma. Phys. Review, II. Ser. 85, 145—146 (1952).

**Unsöld, A.:** Turbulenz und Temperatur der Sonnenchromosphäre. Z. Naturforsch. 7a, 121—126 (1952).

**Temesváry, Stefan:** Der Rotationszustand der Sonne. Z. Naturforsch. 7a, 103—120 (1952).

Es wird der Rotationszustand der Sonne untersucht unter besonderer Berücksichtigung der Folgerungen, die sich aus dem Einfluß des Strahlungsstromes auf die Verteilung der Winkelgeschwindigkeiten und aus der laufenden Abgabe von Drehimpuls an das umgebende interplanetarische Medium ergeben. Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß anschließend an die Wasserstoffkonvektionszone noch eine Zone existieren kann, in der Rotationsinstabilität herrscht. Diese ist vielleicht die Ursache für das Auftreten von stationären Zirkulationen, durch welche die beobachteten Gesetzmäßigkeiten des Sonnenflecken-Phänomens bedingt sind.

*H. Vogt.*

**Treffitz, Eleonore:** Zur Entwicklung einer rotierenden Gasmasse. Z. Naturforsch. 7a, 99—103 (1952).

Im Anschluß an v. Weizsäcker wird die Entwicklung einer rotierenden Gasmasse untersucht, die ihrer Eigengravitation und den turbulenten Reibungskräften unterliegt. Zur Vereinfachung wird dabei ein zweidimensionales Modell zugrunde gelegt. Durch numerische Integration der das Problem beschreibenden partiellen Differentialgleichung kommt Verf. zu dem Ergebnis, daß die Gasmasse die Tendenz zeigt, einen Kern endlicher Ausdehnung mit konstanter Dichte und Winkelgeschwindigkeit zu bilden, während die äußeren Teile ins Unendliche entweichen.

*H. Vogt.*

**Lüst, Reimar:** Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse. I. Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit turbulenter Reibung. Z. Naturforsch. 7a, 87—98 (1952).

Es wird die Bewegung einer rotierenden Gasmasse im Gravitationsfeld eines Zentralkörpers unter der Wirkung turbulenter Reibung untersucht, wobei vorausgesetzt wird, daß die Gravitations-Wechselwirkung innerhalb der Gasmasse zu vernachlässigen ist und daß die radiale Geschwindigkeit als klein gegenüber der Tangentialgeschwindigkeit angenommen werden kann. Zwei verschiedene Lösungen ergeben sich: Entweder bleibt der Drehimpuls des Zentralkörpers erhalten und fällt ein Teil der Gasmasse auf den Zentralkörper, während der Rest ins Unendliche entweicht, oder der Zentralkörper gibt Drehimpuls an die Gashülle ab, die dann vollständig ins Unendliche wegströmt.

*H. Vogt.*

**Lebedinskij, A. I.:** Die Kondensation durch Gravitation eines Sterngases und die Bildung von Sternwolken. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 84, 33—36 (1952) [Russisch].

**Thiessen, G.:** Ein magnetisch bedingter Polarisierungseffekt an Resonanzlinien im Sternspektrum. I. Z. Astrophys. 30, 307—317 (1952).

Für einen Stern, der ein Dipolmagnetfeld besitzt, mit einer Achse senkrecht zur Beobachtungsrichtung, wird der Polarisationsgrad für schwache Linien oder in Linienflügeln berechnet. Die Ergiebigkeit wird für Einzelstreuung angesetzt, das Milne-Eddington-Modell einer Sternatmosphäre zugrunde gelegt und die Rechnung für die Ca-Resonanzlinie 4227 spezialisiert. Der Polarisationsgrad wird als Funktion des Ortes auf der Sternscheibe berechnet. Die Schwingungsrichtung der maximalen Komponente ist am Sternrand gegen die Normale zur Oberfläche mehr oder minder stark geneigt. Integration über die Sternscheibe liefert einen Polarisationsgrad des integrierten Lichtes von etwa 1%, die Schwingungsrichtung ist parallel zur magnetischen Dipolachse. Ein solcher Polarisationsgrad sollte experimentell nachweisbar sein und ergäbe damit den Nachweis der Existenz auch von



kleinen Feldern mit Dipolachse senkrecht Beobachtungsrichtung, die mit der Methode der Linienaufspaltung nicht erfaßt werden können. *G. Burkhardt.*

**Stümke, H.:** Zur Berechnung der Drucktendenz bei Wärmezufuhr innerhalb einer isothermen Atmosphäre von konstanter Grundgeschwindigkeit. *Z. angew. Math. Mech.* **32**, 68—75 (1952).

Die Witterung der gemäßigten Zonen — zwischen den sogenannten „Roßbreiten“ und dem Polarkreis — ist im wesentlichen durch Luftströmungen mit vorherrschender westöstlicher Komponente bedingt. Die z. T. sehr komplizierte Natur solcher West—Ost-Driften stellt nicht nur den Prognostiker vor erhebliche Schwierigkeiten, sie bildet auch ein sehr reizvolles Problem für den Theoretiker, ein Problem, das allerdings beträchtliche Schwierigkeiten bereitet und sich wohl nur unter sehr vereinfachenden Voraussetzungen bewältigen läßt. — In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. die Zustandsänderung, die eine, anfänglich ungestörte, atmosphärische „Grundströmung“ unter dem Einfluß einer Wärmezufuhr erfährt. Die ungestörte Grundströmung gehe reibungslos und geostrophisch, in einer isothermen Atmosphäre, vor sich. Die hinzutretende Wärmezufuhr zerfällt in zwei Teile: eine „stetig verteilte“ Wärmezufuhr (die am Erdboden verschwinden soll) und einen konvektiven Teil. Zur rechnerischen Vereinfachung wird ferner die Erdoberfläche durch ihre Tangentialebene an einen Punkt des betrachteten Bereiches ersetzt. Die Aufgabe läuft, wie die meisten Probleme dieser Art, auf die Integration eines Systems von Differentialgleichungen hinaus — nämlich der drei Strömungsgleichungen, der Energiegleichung und der Kontinuitätsbedingung. Es sei hier erwähnt, daß die Strömungsgleichungen der dynamischen Meteorologie infolge des Auftretens von Corioliskräften nicht völlig mit den gewöhnlichen Eulerschen Gleichungen identisch sind, sondern daß zwei von ihnen die geogr. Breite als Parameter enthalten. — Setzt man voraus, daß die betrachteten Störungen klein sind, so lassen sich die vorgegebenen, partiellen Differentialgleichungen bezüglich der Größen des Grundzustandes linearisieren. Unter Hinzufügung einiger weiterer Bedingungen (hinreichend langsamer Verlauf der Störung, zeitliche Stetigkeit des Drucks und seiner räumlichen Ableitungen usw.) leitet Verf. schließlich aus diesem Gleichungssystem eine einzige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ab, die Grundgeschwindigkeit, Temperatur und geographische Breite als Parameter enthält. Diese (elliptische) Differentialgleichung und ihre Randbedingungen können derart transformiert werden, daß die Lösung der Gleichung mit Hilfe einer Greenschen Funktion möglich ist. Ein Vergleich der Rechnung des Verf. mit einem Ansatz von Prandtl erweist die von Prandtl abgeleitete Differentialgleichung als Spezialfall der vom Verf. abgeleiteten. In der Energiebilanz tritt gegenüber der anfangs ruhenden Atmosphäre als neues Glied ein meteorologisch wichtiger Ausdruck für die Änderung der kinetischen Energie auf. *H. Nabl.*

**Chandrasekhar, S.:** On the inhibition of convection by a magnetic field. *Philos. Mag.*, VII. Ser. **43**, 501—532 (1952).

Die Untersuchungen von Rayleigh, Jeffreys u. a. über die Stabilität einer Flüssigkeitsschicht, die von unten erhitzt wird, werden auf eine Schicht mit elektrischer Leitfähigkeit in einem äußeren Magnetfeld ausgedehnt. Aus Strömungsgleichung, Maxwell'schen Gleichungen und Wärmeleitungsgleichung wird für kleine Abweichungen vom Gleichgewicht eine Differentialgleichung 6. Ordnung für die Komponente der Strömungsgeschwindigkeit in Richtung des Temperaturgradienten erhalten. Für den Fall, daß das Magnetfeld die gleiche Richtung hat, und für verschiedene Randbedingungen mit freier bzw. starrer Oberfläche, werden die kritischen Rayleigh'schen Zahlen angegeben, bei denen Instabilität in Form einer zellularen Konvektion einsetzt. Die Stabilität wächst mit zunehmender Feldstärke. Den Rechnungen liegt die Voraussetzung zugrunde, daß die Abweichungen vom stabilen Zustand in der Nähe der Stabilitätsgrenze wie  $e^{\gamma t}$  ( $\text{Re } \gamma \rightarrow 0$  und  $\text{Im } \gamma \rightarrow 0$  an der Stabilitätsgrenze!) mit der Zeit variieren (Prinzip des „exchange of stabilities“ nach Jeffreys). Dieses Prinzip ist unter terrestrischen Bedingungen anwendbar, unter astrophysikalischen Bedingungen können dagegen an Stelle der zellularen Konvektion an der Stabilitätsgrenze Schwingungen mit wachsender Amplitude (Überstabilität) eintreten. *G. Burkhardt.*

**Jeffreys, Harold:** The free-air reduction of gravity to the second order. *Monthly Not. Roy. astron. Soc., geophys. Suppl.* **6**, 316—318 (1952).

Die Freiluftreduktion der Schwere, die gewöhnlich nur linear in der Höhe  $h$  angenommen wird, wird bis zu quadratischen Gliedern berechnet. *W. Kertz.*

**Bowden, K. F. and L. A. Fairbairn:** Further observations of the turbulent fluctuations in a tidal current. *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **244**, 335—356 (1952).

**Slezkin, N. A.:** Grundzüge einer hydrodynamischen Theorie der Verdunstung der Feuchtigkeit. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* **83**, 67—70 (1952) [Russisch].

**Schumann, W. O.:** Über die Dämpfung der elektromagnetischen Eigenschwingungen des Systems Erde-Luft-Ionosphäre. *Z. Naturforsch.* **7a**, 250—252 (1952).